

无法解出的方程



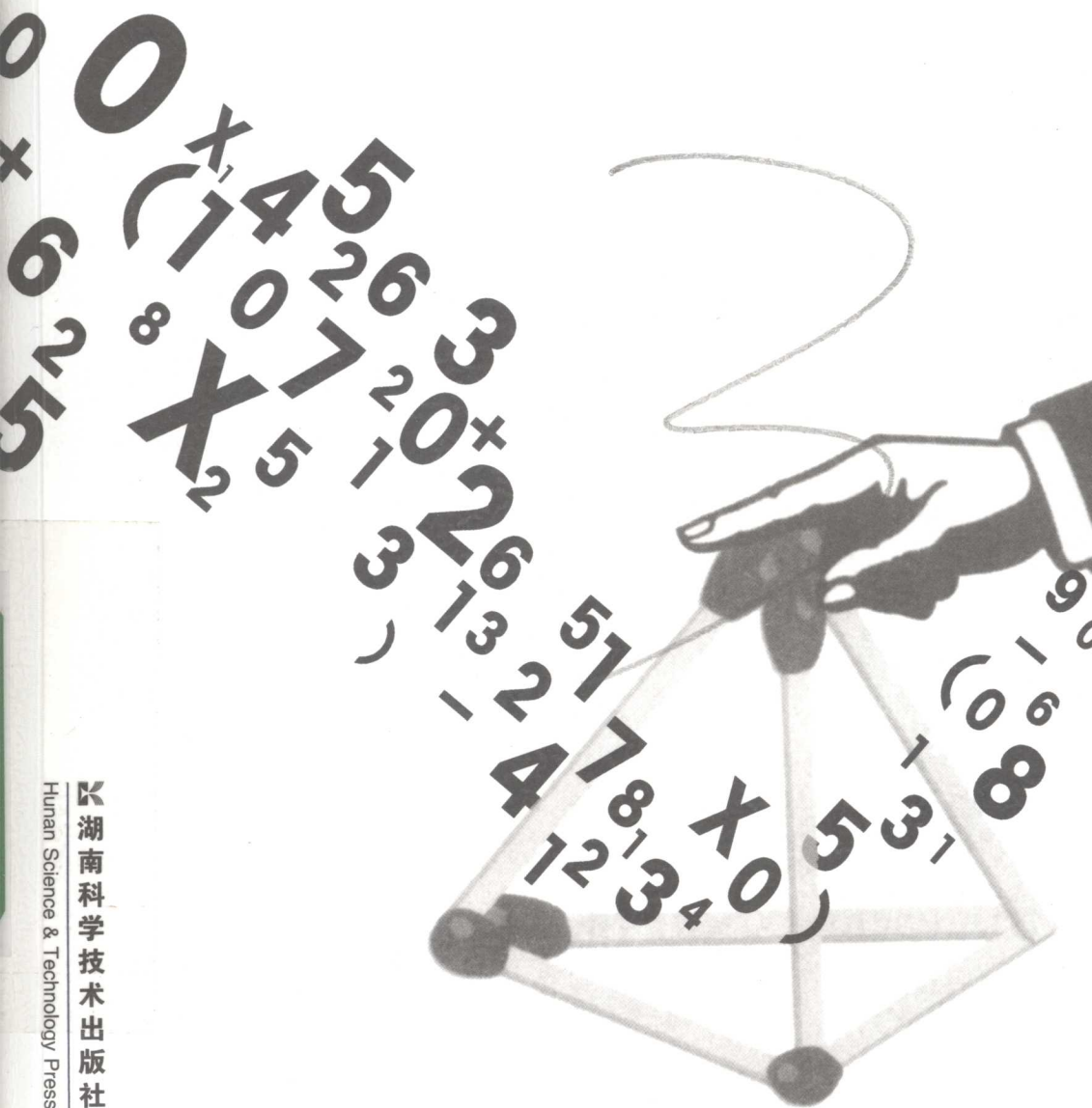
数学圈丛书

MATHEMATICAL
CIRCLES

The Equation
That Couldn't
Be Solved

■ [美] 马里奥·利维奥
■ 译者 / 王志标
■ 校译 / 尹怀琼

—— 天才
与对称



湖南科学技术出版社
Human Science & Technology Press

■【美】马里奥·利维奥
 ■译者 / 王志标
 ■校译 / 尹怀琼

——天才与对称



*THE EQUATION THAT COULDN'T BE SOLVED: HOW MATHEMATICAL GENIUS
DISCOVERED THE LANGUAGE OF SYMMETRY*

Copyright © 2005 by Mario Livio

Simplified Chinese characters edition arranged with Simon & Schuster Inc. through BIG
APPLE TUTTLE MORI AGENCY, LABUAN, MALAYSIA.

湖南科学技术出版社通过大苹果股份有限公司独家获得本书中文简体版中国大陆
地区出版发行权。

著作权合同登记号: 18-2006-070

图书在版编目 (C I P) 数据

无法解出的方程: 天才与对称 / (美) 利维奥著; 王
志标译. —长沙: 湖南科学技术出版社, 2008.4

ISBN 978-7-5357-5161-4

I. 无... II. ①利...②王... III. 数学—通俗读物 IV.

O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 013579 号

无法解出的方程

—天才与对称

著 者: [美] 马里奥·利维奥

译 者: 王志标

校 译: 尹怀琼

责任编辑: 赵 龙 吴 炜

出版发行: 湖南科学技术出版社

社 址: 长沙市湘雅路 276 号

<http://www.hnstp.com>

邮购联系: 本社直销科 0731 - 4375808

印 刷: 长沙化勘印刷有限公司

(印装质量问题请直接与原厂联系)

厂 址: 长沙市青园路 4 号

邮 编: 410004

出版日期: 2008 年 4 月第 1 版第 1 次

开 本: 700mm×960mm 1/16

印 张: 19.25

字 数: 396000

书 号: ISBN 978-7-5357-5161-4

定 价: 32.00 元

(版权所有 · 翻印必究)



前言

自从高中时代我就被埃瓦利斯特·伽罗瓦吸引。一个20岁的人能创造一门令人激动的新的数学分支，这一事实成为我真正的灵感之源。然而，到我大学快毕业时，那个浪漫的法国年轻人也已经让我深感挫折：当认识到自己23岁时仍然没有完成任何可与之比拟的事情时，你会做什么？由伽罗瓦引入的概念——群论——今天已经被视为所有对称性的“正宗”语言。而且，自从对称性从视觉艺术和音乐学渗透到心理学和自然科学中，它的重要性就不言而喻了。

直接或间接对本书有所贡献的人员名单完全可以列好几页。这里，我只能提一些人，没有他们的帮助，我就很难完成手稿。感谢弗里曼·戴森、罗嫩·普勒瑟、纳丹·赛伯格、斯蒂文·温伯格和埃德·威腾，他们谈到了对称性在物理学中的作用；迈克尔·阿蒂亚爵士、彼得·纽曼、约瑟夫·罗特曼、罗恩·所罗门，特别是希勒尔·高赫曼，他们总体上为数学，特别为伽罗瓦理论提供了他们的真知灼见和批评性意见；约翰·奥康纳和艾德蒙·罗伯



特森提供了数学史方面的帮助；西蒙·康维·莫丽丝和大卫·派利特在有关进化和进化心理学的主题上为我指出了正确的方向；我与艾伦·维纳广泛地讨论了创造力主题；菲利普·查普蓝、让-鲍尔·奥弗雷、诺伯特·威德尔为我提供了关于伽罗瓦的宝贵材料和信息；维克托·利维奥特帮助我理解了伽罗瓦的验尸报告；史蒂芬洛·柯瑞兹、卡尔拉·卡奇亚里和蕾蒂西亚·斯堂何里尼提供了关于博洛尼亚数学家的有用信息；同样地，艾玛诺·比安科尼圣提供了圣色波克罗数学家的信息；劳拉·加布利诺、莉维亚·加卡蒂和弗兰科·帕斯宙恩向我提供了数学史的基本材料；帕特利加·莫斯科卡特利和比安卡斯特拉·安托尼奥提供了来自博洛尼亚大学图书馆的重要文献；如同扬格瓦尔·雷切尔特所做的那样，亚理德·斯塔布豪格帮助我理解了尼尔斯·阿贝尔生活的一些方面，并且提供了重要的文献。

我特别感谢帕特里克·高登、维克托·利维奥特和伯尔纳德·利维奥特帮助翻译了法语材料；感谢托迈·威克林德和席勒莎·威格尔特帮助翻译了挪威语材料；感谢史蒂芬洛·卡瑟塔诺、尼诺·潘拿加和玛西摩·斯蒂亚维里帮助翻译了意大利语和拉丁语材料；伊丽莎白·弗雷瑟和莎拉·斯蒂文斯-雷伯恩为我提供了宝贵的目录和语言帮助；如果没有沙龙·图兰熟练的准备工作和科利斯塔·威尔德特的绘图，书稿就无法付诸印刷。

研究和写作这样一本书给我的家庭生活带来了不可避免的负担。没有我的妻子苏菲和我的孩子沙龙、奥仁和玛亚的不断支持和无尽耐心，很难想像我能完成本书。我希望母亲道罗茜·利维奥会喜欢这本有关对称性的书，她的生活一直并仍将以音乐为中心。

最后，我诚挚地感谢代理商苏桑·雷宾纳所做的令人难以置信的工作和给予我的鼓励；感谢西蒙 & 舒斯特公司的编辑鲍勃·本德尔的敬业和百般支持；感谢约翰娜·李、罗勒塔·登纳、维克托利亚·迈耶和西蒙 & 舒斯特的整个团队在出版和宣传本书方面所给予的帮助。



目 录

1	第一章	对称
30	第二章	想象中的对称
52	第三章	在你的方程式中永远不要忘记这一点
93	第四章	穷困潦倒的数学家
115	第五章	浪漫的数学家
162	第六章	群
203	第七章	对称法则
237	第八章	它们中哪个最对称?
266	第九章	一个浪漫天才的安灵曲
281	附录 1	扑克难题
282	附录 2	求解两线性方程构成的方程组
283	附录 3	丢番图的解
284	附录 4	丢番图方程
285	附录 5	塔尔塔利亚的诗和公式
288	附录 6	亚德里安·范·罗曼的挑战
289	附录 7	一元二次方程根的性质



291	附录 8 伽罗瓦家谱
295	附录 9 14-15 之谜
296	附录 10 火柴问题的解
297	致谢



第一章

对称

一张纸上的一滴墨水不是特别吸引眼球，但是如果在墨干之前将纸对折，你可能得到如图 1 所示的图形，这是非常迷人的图形。事实上，对于相似墨斑的解释构成了自 20 世纪 20 年代以来由瑞士精神病学家荷曼·罗夏（Hermann Rorschach）发展的著名的罗夏实验的基础。该实验所宣称的目的是，对于想要解释二重或多重形状的人，引出他们内心所隐藏的害怕、狂野的幻想和深层思考。实验的实际价值作为一种“心理的 X 射线”在心理学流派中备受争议。正如艾墨蕾大学心理学家斯考特·利林费尔德曾经说的：“谁的想法，受测者还是测试者？”然而，毫无疑问，类似图 1 的图像传递了某种富有吸引力和令人着迷的形象。为什么？

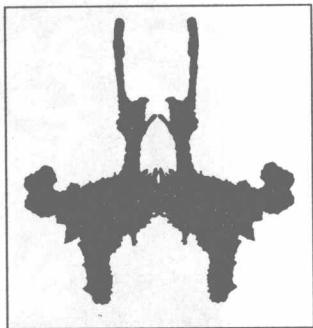


图 1

这是因为人类身体、大部分动物和很多人造物品都拥有一种相似的两侧对称性吗？那么为什么乍看起来，所有那些人类虚构的动物特征和创作物都展示了这样一种对称性呢？

大部分人察觉到像波蒂切利（Botticelli）所创作的《维纳斯的诞生》（图 2）这样和谐的作品是对称的。艺术史家恩斯特·H·贡布里希（Ernst H. Gombrich）甚至注意到，“为了获得一种优美的外观，波蒂切利发乎本性的自由增加了设计的美丽与和谐。”然而，数学家会告诉你，绘画中色彩和形式的安排在数学意义上根本不是对称的。相反地，大多



数非研究数学的观察者没有察觉到图3所示的图案是对称的，虽然根据正式的数学定义，它实际上也是对称的。那么，何为真正的对称性？如果有对称性，它在感觉上起着什么作用？它是如何与我们的美感相联系的？在科学王国中，为什么对称性成为我们对于宇宙的想法和努力解释它的基本理论中关键的概念？既然对称性跨越了这么广阔的学科，那么我们使用什么语言、什么语法来描述和概括对称性以及它们的特点？还有，如何创造那种世界语？说点轻松的，“你认为我性感吗？”是摇滚歌星罗德·史都华（Rod Stewart）的一首歌名，对称性能为由“你认为我性感吗？”引起的非常重要的问题提供一个答案吗？

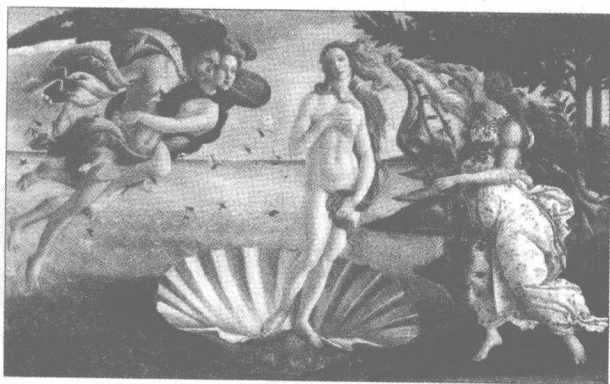


图2

我将试着为所有这些问题，甚至更多的问题提供至少部分答案。沿着这个思路，我希望本书整体上将既描写数学的人文主义一面，甚至更重要的是，也描写数学家人性的一面。正如我们将看到的，对称性对于沟通科学与艺术、心理学与数学是极为重要的工具。它充满了从波斯地毯到生命中的分子结构，从西斯廷教堂到广受欢迎的“万物至理”的对象和概念。然而，群论，这门描述对称性的本质和探究其特点的数学语言，根本未从对对称性的研究中产生。而且，这种令人惊奇的现代思潮的统一思想产生于一个最出人意料的来源——一种无法解出的方程



式。这种方程式戏剧性的和曲折的历史是其智慧传奇的一个基本部分。同时，这个故事将清楚地揭示面对似乎难以克服的挑战时天才的孤独和人类智慧的坚韧。我已经竭尽全力尝试揭开两个世纪前本书主人公——天才的数学家埃瓦利斯特·伽罗瓦（Évariste Galois）的死亡之谜。我相信自己已经比以往更接近了真相。

风趣的剧作家乔治·伯纳德·肖（George Bernard Shaw）曾经说过：“理性的人让自己适应世界；不理性的人坚持让世界适应自己。因此，所有的进步取决于不理性的人。”在本书中，我们会遇到许多不理性的男人和女人。创

新的过程，本质上依赖于无法言传的智力和情感因素。通过简要的数学抽象，可以窥见创造力的真正本质。长话短说，开始步入对称的奇境吧。

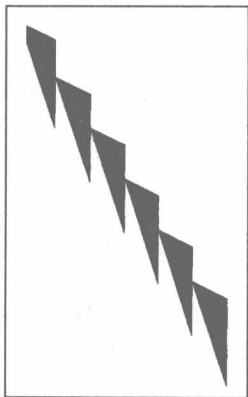


图 3

不发生改变

单词“symmetry”有古老的词根，源自希腊的“sym”和“metria”，它们合起来的意思是“同样的尺寸”。当希腊人为一件艺术作品或一项对称的建筑设计贴上标签时，他们意在说明，一个人可以识别那件作品的一小部分，而所有其他部分的尺寸与那部分存在准确的倍数关系（各部分是“可以比较的”）。这种早期的定义更符合我们现在对比例而非对称的感觉。然而，伟大的哲学家柏拉图（Plato，公元前 428/427～前 348/347）和亚里士多德（Aristotle，公元前 384～前 322）很快将对称和美联系起来。用亚里士多德的话说：“美的主要形式是有序排列（希腊语 taxis），比例（symmetria）和有限性（horisimenon），这些尤其在数学中得到了展现。”追随希腊传统，有影响的罗马建筑师维特鲁威（Vitruvius，约公元前 70～前 25）随后宣扬通过“恰当的比例”



来认识对称性，这种观念一直延续到文艺复兴时期。在他的《De Architectura Libri Decem》（《建筑十书》）——欧洲几个世纪以来实际上的建筑圣经中，维特鲁威写道：

教堂的设计要讲究对称，建筑师必须认真遵守对称原理。它们应归于比例。比例就是一件完整作品的各部分尺寸之间、整体与被选做标准的某部分之间的一致性。此即对称原理。

在精确的数学意义上，对称的现代意思（在18世纪晚期引入）其实是“一点儿都不改变”。或者，像数学家赫尔曼·外尔（Hermann Weyl, 1885~1955）曾经说的：“如果有一样可以加工的东西，你加工后它如前一样，那么这件东西是对称的。”例如下面这首诗：

不对称是“对称”，奇怪吗？

“对称”是不对称。

多么奇怪。^①

如果逐字从后向前阅读，这首诗内容不变——它是与反读有关的对称。如果设想把这些单词像珠子一样串在一根绳子上，你会认为这种逆向阅读^②是该诗的一种（不是字面上的）镜面反射。当在上面的意义下

本书注释皆为参考原注之上的译者注

① 原文是：

Is it odd how asymmetrical

Is “symmetry”?

“Symmetry” is asymmetrical.

How odd it is.

② 如果采用反读，则这首诗是

is it odd How. asymmetrical

is “Symmetry”?

“symmetry” Is asymmetrical

how odd it Is



被镜面反射时，这首诗不会变化——对于这样的镜面反射而言，它是对称的。或者，如果你喜欢以大声阅读的方式思考，那么按照一定的时间间隔进行反读有点像重新绕一个录像带（仍然不是字面上的，因为每个音节并非颠倒的）。具有这种特点的短语称为回文。

一般认为回文是由玛罗涅亚（Maronea）的淫秽诗人苏塔德斯（Sotades）发明的，他生活在公元前3世纪希腊统治下的埃及。回文极为许多文字游戏大师，如英国人J. A. 林顿（J. A. Lindon）和超级娱乐数学作者马丁·加德纳（Martin Gardner）所崇尚。林顿的一首可笑的以单词为单位的回文是：“穿着比基尼游泳的女孩望着男孩，发现男孩正望着游泳女孩穿的比基尼。”^①其他回文在逐个字母从后向前阅读时是对称的——“Able was I ere I saw Elba”（被戏谑地认为是拿破仑说的），或者一个著名的NOVO项目^②的标题：“A Mam, a Plan, a Canal, Panama.”

奇怪的是，回文不仅出现在风趣的文字游戏中，而且出现在决定男性性别的Y染色体结构中。Y的全部基因组排序只是在2003年才完成。这是一种艰苦努力的集体成果，并且它揭示了，这种性别染色体的保存作用被大大低估了。其他人类“染色体对”通过交换基因与破坏性的突变进行斗争。因为Y染色体缺少一个伴，基因组生物学家目前已经估计，它的基因载体也许在500年左右会缩减。然而，令人惊异的是，测序组的研究者发现，该染色体通过回文方式与衰亡抗争。在5千万DNA字母中大约有600万形成了回文序——在两条双螺旋线上向前和向后读是一样的。基因复制不仅在遭遇恶性变异时能提供支持，而且允许染色体在某种程度上与自己发生性交换——螺旋的两臂能交换位置；从而能改变基因。正如基因组负责人麻省理工学院（MIT）的大卫·帕基（David Page）所说：“Y染色体恰似经过镜面反射的长廊。”

当然，在镜面反射对称中最著名的例子是两侧对称，两侧对称是动

① 原文是：Girl, bathing on Bikini, eyeing boy, finds boy eyeing bikini on bathing girl.

② 意为创新项目。



物王国所具有的特征。从蝴蝶到鲸，从鸟到人，如果你在一个镜子中反射左半部，那么你会得到和右半部几乎相同的东西。即便令人焦虑的外部差异确实存在，我也将暂时忽略这个细节，同时要忽略一个事实，这个事实就是，无论大脑的内部解剖还是其功能，都不具备两侧对称性。

对于许多人来说，单词“对称”实际上就是两侧对称。甚至在《韦伯斯特第三部新国际词典》中，对“对称”的定义之一是：“居于分界线或界面的两侧相对的部分在尺寸、形状和各部分相对位置之间的相似性。”反射对称的数学精确描述使用了与之相同的概念。拿一个两侧对称的蝴蝶画，并且在图中间标一条直线。如果你沿正中线对折那幅画，完美的重叠会发生。在关于中心线的反射中，蝴蝶保持不变——也就是说它具有反射不变性。

两侧对称在动物中是如此普遍，以致它几乎不能归于偶然。事实上，如果你把动物看作成万亿计的巨大的分子集合，那么从这些结构单元中有更多的方法构建不对称结构而非对称结构。一个破花瓶碎片能以许多种组合堆成一堆，但是只有一种排列可使其复原为完整的（并且通常是两侧对称的）花瓶。然而，出自澳大利亚埃迪卡拉山的化石记录表明，上溯至新原生纪第三个时期（6.5 亿至 5.4 亿年前）的软体组织（斯普里格蠕虫）已经显示出了两侧对称性。

地球上的生命形态通过无数个世纪的演变和自然选择才定型，不管何故，在演变过程中它们一定是优选了两侧或镜面对称。在所有可以拿来参照的不同外观的动物中，两侧对称型动物具有优越性。藉此可得出结论，这种对称性是生物增长的一种可能结果。我们会理解这种特殊眷爱的原因吗？至少，我们可以努力依据机械原理找到它的一些工程道理。这里关键的一点是；地球表面的各个方向创造得不均等。上与下（生物术语里动物的背与腹）之间的清楚的区别是由地球重力引发的。在大多数情况下，上升者必然下降，反之则不然。另一方面，前与后的区别，是由动物的移动造成的。

如果前部不同于后部，任何动物无论在海里，陆地上，天空中相对



快速地移动都具有明显的优势。前部具有所有感觉器官，是光、声、气味、口味的主要探测器，明显地帮助了动物决定去哪里和怎样最好地到那里。前部的一个“雷达”也提供了一种预警，以化解潜在的危险。前部的嘴可以首先明辨是否够得着食物。同时，在地球重力作用下的实际运动结构明确地区分了底部和顶端。一旦从海里出现在陆地上，某种机械装置——腿——就得发展起来，以使动物可以到处走动。顶部不需要这样的附属肢体，因此顶部与底部之间的区别甚至变得更显著。飞行（仍然在地球重力下）的空气动力学配以登陆传动装置加某些方式的地面运动，引出了鸟类顶部—底部的差别。

然而，这里有一个重要的认识：无论在海里、陆地上、空中，没有一种主要的生物区分左和右。鹰向右所看到的环境与向左看到的是相同的。对于上和下则不然——上，鹰在空中甚至飞得更高；下，鹰则着陆，筑巢。其实，地球上左和右实际上没有大的区别，因为没有强的水平力。可以肯定，地球绕着它的轴旋转对于地球的磁场（事实是，地球像一块条形磁铁一样作用于它的周围）的确引入了一种不对称性。然而，这些效应在宏观水平上不如重力对于快速的动物运动的效应那么重要。

到此为止的描述解释了为何活的生物体的两侧对称在机械学上有意义。两侧对称也是经济的——通过一套系统同时造就两个器官。这种对称性或缺乏对称性如何在进化生物学（基因学），甚或更基本地在物理规律中出现，是一个更加困难的问题，在第7章和第8章我将详细讲述这些问题。此时还是看看多细胞动物吧，它们有一种缺乏两侧对称性的早期胚胎。随着胚胎发育，在修改“上帝造物”背后的驱动力可能确实是灵活性。

并非所有生物都快节奏地生活。固定在某个地方或无法自愿移动的生命形式，如植物和固着动物，的确有非常不同的顶部和底部，但没有前与后，或左与右的差别。它们有类似圆锥体的对称性——它们在任何通过它们中央垂直轴中的镜子里产生对称反射。一些动物，如水母，移



动得很慢，有相似的对称性。

显然地，一旦在活的生物中已经形成了两侧对称性，到处都可以找到理由保持其完整。无论失去一个耳朵或一只眼睛，都会使一只动物在不注意时更易受到捕猎者的偷袭。

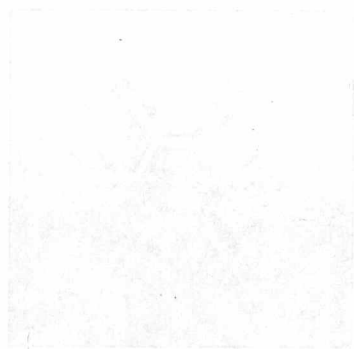
一个人总想知道自然所赋予人类的独特的标准形体是否最佳。举个例子，罗马神杰纳斯（Janus）门神，也是掌管新的开始（包括新年第一月）之神。因此，在艺术上他总被描绘成有两张脸，一张朝前（象征着来年），一张朝后（朝着过去的一年）。人类的这种安排，在某些方面是有用的，但可能不会给处理非感觉系统的大脑部分留下空间。马丁·加德纳在他精彩的书《新的灵巧宇宙》中讲了一个芝加哥演员的故事，那个演员有一个讨论让各种感官长在身体上不寻常部位所带来的优势的习惯。举个例子，腋窝下的耳朵可以在寒冷的芝加哥冬天保暖。很清楚，这样的一种配置也会带来缺点——如果你不让你的胳膊一直抬着，腋窝下耳朵的听力会严重受损。

科幻片总是放映两侧对称的外星人。如果生物学上已经进化的外星智慧生物存在，那么他们拥有反射对称性的可能性有多大呢？可能性很大。如果物理规律，尤其是引力和运动规律是普遍的，太阳系外行星上的生命形态会面对与地球人同样的环境挑战。引力仍然使每一样东西都停留在行星表面上，并且在上与下之间创造出一种明显的不同。运动相似地分成了前和后。外星人很可能有或者曾经有过灵巧的双手和大脑。这并不是说访问我们的某个外星人代表会和我们有什么相似之处。任何进化到能做星际旅行的文明可能早就把智慧生命与更优越的计算技术产生的生命融合在一起了。那种以计算机为基础的超级智能很可能是微观的东西。

一些在字母表中的大写字母属于人类创造的无数与镜面反射有关的对称物之一。如果你把一张写有字母 A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y 的纸举到一面镜子前，镜里的字母看起来（与纸上的）是同样的。由这些字母组成并垂直印刷的单词（甚或整个短语），如以下不



太深奥的指令



Y
O
U
M
A
Y
W
A
X
I
T
T
I
M
O
T
H
Y

在镜面反射时仍不变。瑞典流行音乐组合艾巴乐队，它的名字“ABBA”在拼写上煞费心机，使名字成为镜面对称的，他们的音乐剧《妈妈咪呀^①》获得了巨大成功（垂直书写的MAMMA MIA也是镜面对称的）。像B, C, D, E, H, I, K, O, X这样的字母，如果从中间部位横向截开它们，它们也是镜面对称的。由这些字母组成的单词，如

① Mamma Mia



COOKBOOK, BOX, CODEX, 或者熟悉的拥抱和接吻的符号 XOXO, 上下颠倒后举到镜子前仍然不变。

镜面反射对称对我们的感觉与审美鉴赏, 对对称的数学理论, 对物理规律, 和对一般科学的重要性, 怎么强调都不为过, 后面我仍有几次要回到镜面对称上来。当然, 其他对称确实存在, 并且它们是同样重要的。

雪的欢乐建筑

本节所选择的标题源自美国诗人和散文家拉尔夫·华都·爱默生 (Ralph Waldo Emerson, 1803 ~ 1882) 的《暴风雪》。它表达了一个人目睹了迷人的雪花形状后所感到的困惑 (图 4)。尽管通常所说的“没有两瓣雪花是相同的”在肉眼水平不确切, 但在不同环境下形成的雪花确实是不同的。发现了行星运动规律的著名天文学家约翰尼斯·开普勒 (Jo-

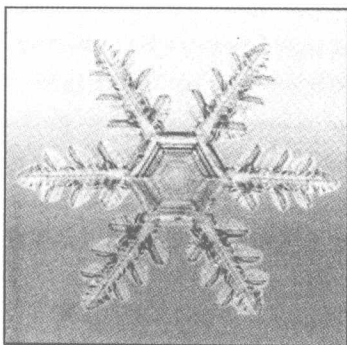


图 4

hannes Kepler, 1571~1630) 对雪花的奇迹那样入迷, 以致他写了一篇完整的论文《六角形雪花》, 希望以此解释雪花的对称性。除了镜面对称外, 雪花还拥有旋转对称——你可以绕着一条铅直线沿着它们的平面 (过中心) 通过某些角度旋转它们, 它们仍然是同样的。由于水分子的特点和形状, 雪花典型地有 6 个 (几乎) 相同的角。因此, 保持形状不变的最小旋转角 (除非根本不转) 是 60° 。其他造成无法分辨的最终图形的角是这个角的简单倍数: 120° 、 180° 、 240° 、 300° 和 360° (最后一个角使雪花返回原位, 等价于根本没有旋转)。雪花因此有 6 重旋转对称性。相类似地, 海星有 5 重旋转对称性: 他们可以旋转 72° 、 144° 、