普通高等教育规划教材

机械最优设计技术及其应用

孟兆明　常德功　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普 通 高 等 教 育 规 划 教 材

机械最优设计技术及其应用

孟兆明　常德功　编著
王孚懋　主审

机 械 工 业 出 版 社

机械最优设计技术是将数学规划理论、计算机技术和机械设计理论与方法组合在一起，以解决机械设计中最优化的设计问题。本书主要内容有一维寻优最优化技术、无约束解析法最优化技术、无约束直接法最优化技术、有约束转化寻优最优化技术、有约束直接搜索寻优最优化技术、线性规划最优化技术、多目标最优化技术。各种寻优技术均配有计算机程序和操作举例。

本书与高等院校机械原理、机械设计等课程紧密结合，列举了许多工程中常用的设计实例。

本书可作为高等工科院校机械专业本科生、研究生课程教材，亦可供机械工程技术人员、科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

机械最优设计技术及其应用/孟兆明，常德功编著．—北京：机械工业出版社，2008.7

普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-111-24511-7

Ⅰ．机…　Ⅱ．①孟…②常…　Ⅲ．机械设计：最优设计—高等学校—教材　Ⅳ．TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 095994 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：蔡开颖　版式设计：张世琴　责任校对：张玉琴

封面设计：张　静　责任印制：李　妍

北京中兴印刷有限公司印刷

2008 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 13.25 印张 · 328 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-24511-7

定价：24.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：(010)68326294

购书热线电话：(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：(010)88379713

封面无防伪标均为盗版

前　言

机械最优设计技术，是随着计算机技术的发展、计算机的普及而迅速发展起来的一种新的机械设计技术，它将数学规划理论、计算机技术和机械设计理论与方法组合在一起，以解决机械设计中最优化的设计问题。这种现代的机械设计技术不同于传统的依赖于常规计算、类比、经验试凑、图表求解等确定设计参数的设计模式，不同于具有费时、费力、精度低、不可靠、设计方案杂乱等诸多不足的传统设计方法，它是按照一定的逻辑格式，迭代优选出一组设计参数，从而使设计问题达到最佳的设计效果。

机械最优设计技术，产生于20世纪50年代后期，至今虽然时间不长，但是发展迅速，成果显著。小到简易机构的设计，大至飞机、航天器的设计，这种先进的设计技术都在起着非常重要的作用。可以预言，随着计算机进一步普及，数学规划理论的进一步完善，机械最优设计技术必将在机械设计技术领域占有极其重要的地位，它的应用将会为人类的文明创造更多的财富。

本书是作者结合多年来从事机械原理、机械设计、机械设计课程设计、最优化方法课程的教学以及相关科研的经验与体会编著而成的。本书力求通俗易懂，简化了繁多的数学理论推导与证明。在介绍最优化技术基础理论的基础上通过列举机械原理、机械设计等课程中几种常见的通用机械设计实例，如曲柄摇杆机构的设计、曲柄滑块机构的设计、凸轮机构的设计、圆柱齿轮减速器的设计、螺旋压缩弹簧的设计、链传动的设计、机械刨床的设计等，将机械最优设计技术与传统设计方法所获得的不同的设计结果、设计过程、设计效果进行对比，充分体现最优设计技术的优越性、先进性和重要性。本书同时注重实用性，针对每一种最优技术，在求解过程中另外配有计算机程序，对实际工程应用有立竿见影之效。

本书可作为高等工科院校机械类专业本科生、研究生必修或选修课程教材，参考学时数为30～50。对从事机械原理、机械设计、机械设计课程设计课程教学的教师具有很好的参考价值。此外，本书亦可供机械工程技术人员、科研工作者以及企业管理人员自学或参考之用。自学者在阅读本书前，应具备相应的数学规划理论技术、计算机技术及机械设计技术的基础知识能力。

本书由孟兆明、常德功教授编著，王孚懋教授担任主审。本书的编写得到了青岛科技大学邹玉静、宋冠英、张莹的支持和帮助，在此向她们表示感谢。

由于水平所限，书中难免会有错误与不妥之处，恳切希望读者批评指正。

作者

目　　录

第 1 章　基 础 知 识

1.1　引言

机械可以减轻人们的体力劳动、提高劳动生产率、改善人们的生活质量，从而在人们的日常生活和生产中被广泛地使用着。随着科学技术的进步、人民生活水平的不断提高，人们对机械的需求越来越高、越来越广泛，于是有了这样的观点：机械的设计水平、制造水平、使用水平是衡量一个国家科学技术水平和现代化程度的一个重要标志。众所周知，任何机械的成功应用，必然要经过设计、制造、实验、维护、改进等多个环节，其中机械设计是首要环节。如果没有机械设计现代化，就不会有高水平的机械工业，也就不会有国家的强盛。因此，高水平的机械设计技术必然会引起机械设计技术人员的高度重视。

多年来，机械设计人员在机械设计中大都是采用传统的设计方法，凭借经验、图表和类比的办法，借助有限的计算次数，得到有限的设计方案，然而确定出的设计结果却不能令人满意。如何使自己设计的结果能够获得公认最优，如设计出的机械产品结构最紧凑、成本最低、重量最轻、工作性能最好等，即技术经济效果最佳，这是机械设计人员毕生的愿望。目前，由于机械设计技术的不妥、计算手段的落后、设计时间的限制，这种愿望往往难以实现。但是，随着科学技术的发展、数学规划理论的进一步完善以及计算机技术的普及、机械设计方法与技术能力的渐趋提高、科技新成就的不断丰富，使得机械设计方法技术有了突破的跃进条件和可能。机械最优设计技术、机械创新设计、计算机辅助设计（CAD)、现代设计方法学等新型设计技术由此而产生。这些新技术的应用，对加速机械产品的开发与应用、改变机械工业的面貌将会起到非常重要的作用。

1.2　最优设计的概念

随着人类越来越聪明，人们用数学函数描述事物规律变得越来越准确，人们便希望能够找到描述事物变化规律的极值。对于设计问题，便是去寻求设计方案的“最优”。“最优设计”特别强调了个“最”字，强调了设计方案的唯一性。其唯一、最优可用以下例子体现。

例 1-1　如图 1-1 所示，已知有一长为 9m 的围栏，靠一墙面围成一矩形。试确定矩形尺寸的长和宽。

解　设所围矩形的宽为 x、长为 y，所围面积为 S，传统设计通常有如下几个有限的设计方案：

设计方案 1

$$x = 1\text{m}$$
$$y = 7\text{m}$$
$$S = 7\text{m}^2$$

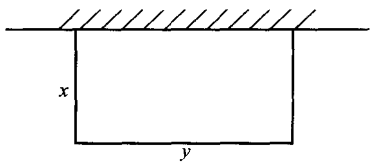

图 1-1　围栏所围矩形

设计方案 2

$$x = 2\text{m}$$
$$y = 5\text{m}$$
$$S = 10\text{m}^2$$

设计方案 3

$$x = 3\text{m}$$
$$y = 3\text{m}$$
$$S = 9\text{m}^2$$

设计方案 4

$$x = 4\text{m}$$
$$y = 1\text{m}$$
$$S = 4\text{m}^2$$

通常追求在满足设计要求下，所围矩形面积最大。比较诸设计方案，由于设计方案 2 所围面积相对最大，故该方案被选用，该方案通常称为“优选方案”。但是该方案并不是最优方案，该问题的最优方案为

$$x = 2.25\text{m}$$
$$y = 4.5\text{m}$$
$$S = 10.125\text{m}^2$$

除此之外，不会再有其他方案能使所围面积 $S \geqslant 10.125\text{m}^2$，所以该设计结果是唯一的，该方案称为“最优方案”。

例 1-2 如图 1-2 所示，有一均布载荷为 q、长为 l 的简支梁。问支承距离 x 为多少，梁受弯矩最小。

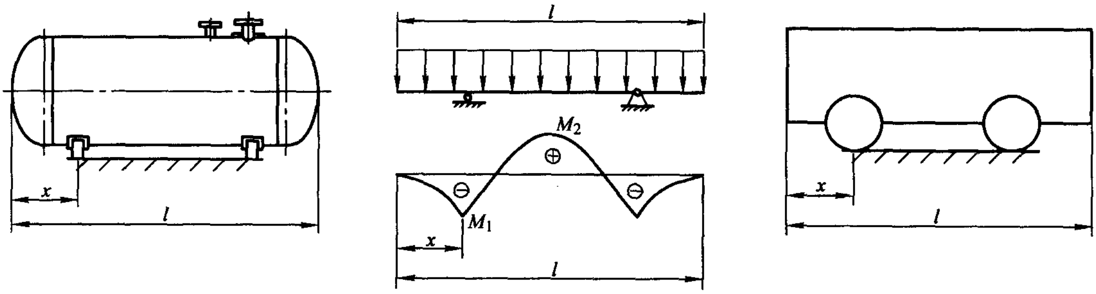

图 1-2 简支梁支承问题

解
$$|M_1| = \frac{qx}{2}x$$
$$M_2 = \frac{ql}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{ql}{2}\,\frac{l}{4}$$

令
$$|M_1| = M_2$$

有
$$\frac{q}{2}x^2 = \frac{ql}{2}\left(\frac{l}{4} - x\right)$$
$$x^2 + lx - \frac{l^2}{4} = 0$$

$$x_{12}=\frac{-l\pm\sqrt{l^2+l^2}}{2}$$

根据题意选择正根，即

$$x=\frac{l}{2}(\sqrt{2}-1)$$
$$=0.207106781l$$

梁受最大弯矩　　$M_{max}=0.021446609ql$

$x=0.207106781l$ 为该设计问题的“最优方案”，除此之外，不会再有其他的方案能使梁受的弯矩 $|M|\leqslant 0.021446609ql$，故该方案唯一且最优。

1.3　机械最优设计简介

机械最优设计技术是将数学规划理论、计算机技术和机械设计理论三者结合在一起的。它既不同于传统的机械设计理论，也不同于机械优化设计，它是将机械设计问题通过数学模型的建立，转变为数学函数格式化，然后采用数学规划理论，由计算机寻优迭代确定设计问题的极值，其结果的唯一性充分体现了设计公认最优。机械最优设计与机械优化设计的不同可用以下实例比较加以区别。

例 1-3　如图 1-3 所示，设计一偏置曲柄滑块机构，已知滑块的行程速比系数 $K=1.5$，行程 $H=50$cm。试确定曲柄长度 l_2、连杆长度 l_3、偏心距 e 的尺寸。

采用传统设计或者 CAD 技术，可获得如下的几个设计方案：

设计方案 1：

曲柄　　$l_2=10$cm

连杆　　$l_3=74.818924$cm

偏心距　　$e=64.6314$cm

最小传动角　　$\gamma_{min}=4.05743°$

设计方案 2：

曲柄　　$l_2=15$cm

连杆　　$l_3=66.4368$cm

偏心距　　$e=49.2429$cm

最小传动角　　$\gamma_{min}=14.76524°$

设计方案 3：

曲柄　　$l_2=20$cm

连杆　　$l_3=52.49982$cm

偏心距　　$e=27.6992$cm

最小传动角　　$\gamma_{min}=24.6931°$

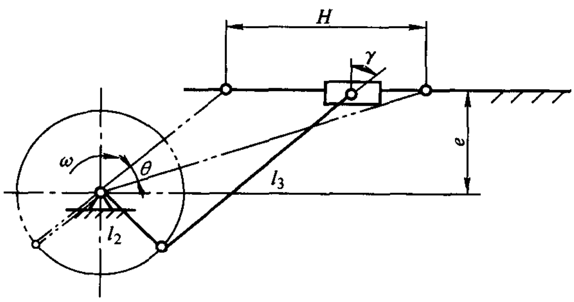

图 1-3　偏置曲柄滑块机构

设计方案 4：

曲柄　　$l_2=24$cm

连杆　　　　$l_3=33.00204\mathrm{cm}$

偏心距　　　$e=6.03226\mathrm{cm}$

最小传动角　$\gamma_{\min}=24.4930°$

……

比较诸设计方案可知，设计方案 3 中机构运动性能的重要参数，即机构最小传动角 $\gamma_{\min}=24.6931°$为所有设计方案中最大。故其设计结果为优化设计结果。其方案的确定过程为优选过程。但是，该方案并非是最优方案。由最优设计技术确定的最优结果为：

曲柄　　　　$l_2^*=22.53709\mathrm{cm}$

连杆　　　　$l_3^*=41.64129\mathrm{cm}$

偏心距　　　$e^*=14.41339\mathrm{cm}$

最小传动角　$\gamma_{\min}^*=27.45768°$

除此之外，将不会再有其他更好的设计结果能使机构最小传动角 $\gamma_{\min}^*\geqslant 27.45768°$，所以该结果为公认最优，该设计结果为机械最优设计结果。

尽管最优设计技术确定的设计结果是机械设计问题函数化的极值结果，但是寻优过程一般不是采用经典的微分或变分等分析方法求解的，因为这些方法求解要求条件过于苛刻，一般机械设计问题是难以满足的，而最优设计技术是按照一定的逻辑格式采用数值计算方法，通过步步迭代逐渐逼近极值点，从而实现最优设计结果的。如上述曲柄滑块机构这一几乎最简单的机械最优设计问题，若采用微分法求解，尽管能够实现，但是相对较为困难[9]。而对于一般的机械设计问题，经典的微分法则是无能为力的。

1.4　专业用语及其含义

1. 设计变量

机械设计方案可以用一组参数来表示，这些参数中有些是已知的，另一些则需要在设计中优选确定。这些需要优选确定的独立的未知参数称为设计变量。

在例 1-1 围栏围矩形面积的设计问题中，尽管需要确定的几何参数有矩形长和宽，但是由于围栏的总长是 9m，所以在参数宽 x、长 y 中只要确定其中一个，另外一个参数会随之确定。故该设计问题只有一个设计变量，通常称为一维设计问题。

在例 1-3 曲柄滑块机构设计中，尽管需要确定的几何参数有 l_2、l_3、e，但是由传统的图解设计过程可知，在设计参数 l_2、l_3、e 中只要选定一个，另外两个参数则随之确定，故该设计问题的设计变量只有一个，是一维设计问题。

对于不同的设计问题，通常使用的符号不同。如在斜齿圆柱齿轮设计中，分度圆直径用 d、齿数用 z、法面模数用 m_n、螺旋角用 β 等，为了简化问题，表达统一化，设计变量用 x_1，x_2，…，x_n 表示，n 代表维数，其矢量表示为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad 或\ \boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

工程中通常将 $n<10$ 称为小规模设计问题，$n=10\sim50$ 称为中等规模设计问题，$n=$

50～200 称为大规模设计问题，$n>200$ 称为超大规模设计问题。随着设计维数的增加，设计难度将增大，计算过程也将趋复杂。

2. 目标函数

目标函数是设计变量的函数，是评价设计优劣的数学表达式。如果在设计中，仅仅以一个目标函数评价设计方案的好坏，则称为单目标最优设计问题。求极小化目标函数表达为 $\min f(\boldsymbol{X})$，求极大化目标函数表达为 $\max f(\boldsymbol{X})$。

求目标函数极小化问题和求目标函数极大化问题可以互相转化。如求目标函数极小化问题转化为求目标函数极大化问题，只需将目标函数式中系数的正负号改为相反号，并且将优化结果中的最优值也改变正负号，其最优解不变，即

$$\min f(\boldsymbol{X}) = -\max f(\boldsymbol{X})$$

如果在设计中，以两个或者两个以上目标函数评价设计方案好坏时，则称为多目标最优化设计问题。多目标最优化问题寻求目标函数表达式为

$$F(\boldsymbol{X}) = (f_1(\boldsymbol{X}), f_2(\boldsymbol{X}), \cdots, f_m(\boldsymbol{X}))^{\mathrm{T}} \tag{1-2}$$

$$\begin{cases} \min f_1(\boldsymbol{X}) \\ \max f_2(\boldsymbol{X}) \\ \vdots \\ \min f_m(\boldsymbol{X}) \end{cases} \tag{1-3}$$

例 1-4 如图 1-1 所示，已知一围栏长 9m，靠一墙面围成矩形。

1）追求所围面积最大。

2）追求所围面积最大且所围矩形呈黄金矩形（矩形的宽与长的比为 0.618）。

分别写出以上两设计问题的目标函数，并指出其设计问题是单目标最优化问题还是多目标最优化问题。

解 1）设计问题只有一个追求目标，故为单目标最优化问题。目标函数的表达式为

$$\max f(\boldsymbol{X}) = x(9-2x) \tag{1-4}$$

2）设计问题有两个追求目标，故为多目标最优化问题。目标函数的表达式为

$$F(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{X}) \\ f_2(\boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

$$\begin{cases} \max f_1(x) = x(9-2x) \\ \min f_2(x) = \left| 0.618 - \dfrac{x}{9-2x} \right| \end{cases} \tag{1-6}$$

例 1-5 如图1-3所示，设计一偏置曲柄滑块机构，已知滑块的行程速比系数 K，行程 H，确定曲柄、连杆和偏心距的尺寸。

1）追求机构最小传动角呈最大。

2）追求机构最小传动角呈最大，且滑块的最大加速度呈最小。

分别写出以上两设计问题的目标函数，并指出其设计问题是单目标最优化问题还是多目标最优化问题。

解 1）设计问题只有一个追求目标，故为单目标最优化问题，目标函数的表达式为

$$\max f(\boldsymbol{X}) = \gamma_{\min} \tag{1-7}$$

2）设计问题有两个追求目标，故为多目标最优化问题，目标函数的表达式为

$$F = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{X}) \\ f_2(\boldsymbol{X}) \end{bmatrix} \tag{1-8}$$

$$\begin{cases} \max f_1(\boldsymbol{X}) = \gamma_{\min} \\ \min f_2(\boldsymbol{X}) = a_{\max} \end{cases} \tag{1-9}$$

式中　a———机构滑块运动的加速度。

一般说来，寻优目标函数越多对设计的评价就越周全，但是计算也越复杂。对多目标函数的寻优技术将在第 8 章介绍。

3. 结束条件

在机械设计中，多数场合下会对设计变量进行一定的限制。如设计确定的几何尺寸、面积、重量等不能出现负值，强度计算时零件的工作应力不能超过其材料的许用应力，机构构件之间相对运动不能相互干涉等。这种根据限制设计变量条件所建立的数学函数称为约束条件。约束条件分为等式约束和不等式约束。

等式约束　　$h_i(\boldsymbol{X}) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m)$　　(1-10)

不等式约束　　$g_j(\boldsymbol{X}) \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,w)$　　(1-11)

一般说来，在设计寻优过程中，约束条件越多计算也就越复杂，对寻优收敛精度的要求就越高。如果设计问题没有约束，则表达式为 $X \in E^n$。

4. 数学模型

目标函数、约束条件和设计变量完整的数学表达式称为数学模型。以设计单目标极小化寻优为例，一般表达形式为

目标函数　　$\min f(\boldsymbol{X})$

约束条件　　$h_i(\boldsymbol{X}) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m)$

　　　　　　$g_j(\boldsymbol{X}) \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,w)$

设计变量　　$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$

例 1-6　如图 1-1 所示，已知一围栏长 9m，靠一墙面围成一矩形。追求所围面积最大，试写出该设计问题的最优化数学模型。

解　设所围矩形面积的宽为 x，则寻优最优化数学模型为

$$\begin{cases} \max f(\boldsymbol{X}) = x(9 - 2x) \\ g_1(\boldsymbol{X}) = x > 0 \\ g_2(\boldsymbol{X}) = 4.5 - x > 0 \\ \boldsymbol{X} = x \end{cases} \tag{1-12}$$

例 1-7　要造一个容积等于 1000m^3 的长方体泳池，要求泳池的深度在 2～3m，试确定泳池的长 x_1、宽 x_2、深 x_3，希望使泳池壁用料最省。写出该设计问题的最优化数学模型。

解 最优化数学模型为

$$\begin{cases} \min f(\boldsymbol{X}) = x_1x_2 + 2(x_1x_3 + x_2x_3) \\ g_1(\boldsymbol{X}) = x_1 > 0 \\ g_2(\boldsymbol{X}) = x_2 > 0 \\ g_3(\boldsymbol{X}) = x_3 - 2 \geqslant 0 \\ g_4(\boldsymbol{X}) = 3 - x_3 \geqslant 0 \\ h(\boldsymbol{X}) = x_1x_2x_3 - 1000 = 0 \\ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{1-13}$$

（该设计问题也可以利用等式条件，消去一个变量）

最优化数学模型的建立是否科学、合理、完善，是寻优结果能否被公认最优的关键所在，机械最优设计要求设计人员必须具有丰富的机械设计理论知识。

例如针对例 1-3，对偏置曲柄滑块机构设计，如果数学模型中寻优目标函数为机构最小传动角呈最大，即

$$\begin{aligned} \max f(\boldsymbol{X}) &= \gamma_{\min} \\ &= \arccos \frac{e + l_2}{l_3} \end{aligned} \tag{1-14}$$

寻优设计结果为

$$\begin{aligned} e &= 14.41339\text{cm} \\ l_2 &= 22.53709\text{cm} \\ l_3 &= 41.64129\text{cm} \\ \gamma_{\min} &= 27.45768^\circ \end{aligned}$$

其设计会在满足设计要求下（行程 $H=50\text{cm}$，行程速比系数 $K=1.5$）机构运动性能最好、滑块运动阻力最小、摩擦最轻、运动寿命最长。建立的寻优目标函数科学、合理，设计结果通常会被认可最优。如果该问题建立的寻优目标函数为最节省材料、机构杆尺寸之和最短、结构最紧凑，即

$$\min f(x) = l_2 + l_3 \tag{1-15}$$

取收敛精度为 10^{-4} 时，寻优设计结果为

$$\begin{aligned} e &= 2.439539 \times 10^{-5}\text{cm} \\ l_2 &= 25\text{cm} \\ l_3 &= 25.00004\text{cm} \\ \gamma_{\min} &= 0^\circ \\ l_2 + l_3 &= 50.00004\text{cm} \end{aligned}$$

该设计结果在满足 $H=50\text{cm}$、$K=1.5$ 的条件下，虽然尺寸短、结构相对紧凑，但是机构运动性能差，机构会因自锁不能实现运动。因此，其建立的寻优目标函数不周到、不合理，设计结果通常不会被认可。由此可见，在机械最优设计中，如何建立最优化数学模型是极为重要的。

最优化数学模型建立的重要性，等同于受力体力学模型的建立。对相同的受力体，如果建立的力学模型不同，得到的计算结果会不同，甚至还会相差很大[31,32]。

5. 可行解

凡可满足设计约束的解称为可行解。例如，例 1-1 围栏围矩形的设计问题，设计方案 1、2、3、4 均为可行解；例 1-3 曲柄滑块机构设计问题，设计方案 1、2、3、4 也均为可行解。一般说来，对非离散设计问题要么无解，要么有无穷多可行解。

6. 可行域

包括约束边界，所有可行解的集合称为可行域。可行域之外的区域称为非可行域。

7. 最优解

使目标函数取得最小值（或最大值）的可行解称为最优解或最优点。最优解即为设计问题的最优方案，以 $\boldsymbol{X}^*$ 表示。

$$\boldsymbol{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^{\mathrm{T}} \tag{1-16}$$

如例 1-1 围栏围矩形的设计问题，其最优解为 $x^*=2.25\mathrm{m}$，最优设计方案为 $x^*=2.25\mathrm{m}$、$y^*=4.5\mathrm{m}$。

如例 1-3 曲柄滑块机构的设计问题，其最优解为 $l_2^*=22.53709\mathrm{cm}$，最优设计方案为 $l_2^*=22.53709\mathrm{cm}$、$l_3^*=41.64129\mathrm{cm}$、$e^*=14.41339\mathrm{cm}$。

8. 最优值

评价函数得到的最小（或最大）函数值或者最优解对应的目标函数值称为最优值，用 $f(\boldsymbol{X}^*)$ 或 f^* 表示。

如例 1-1 围栏围矩形的设计问题，其最优值为 $f(\boldsymbol{X}^*)=10.125\mathrm{m}^2$。

如例 1-3 曲柄滑块机构的设计问题，其最优值为 $f(\boldsymbol{X}^*)=27.45768°$。

9. 线性规划与非线性规划

目标函数、约束条件均为线性函数的最优化问题称为线性规划问题，而目标函数、约束条件至少有一项是非线性函数的最优化问题称为非线性规划问题。在机械设计问题中几乎均为非线性规划设计问题。

10. 等值线

当评价函数为一相同值时，设计变量的连续曲线即为等值线。对二维设计问题，等值线也称为等高线，如图 1-4 所示。

对于多维设计问题，为了便于从几何图形反映评价函数值的相互关系以及目标函数极值点的位置，也可以用图 1-5 所示的等值线来描述。

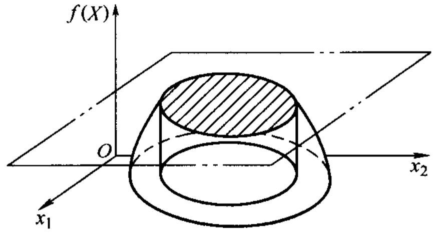

图 1-4　等高线

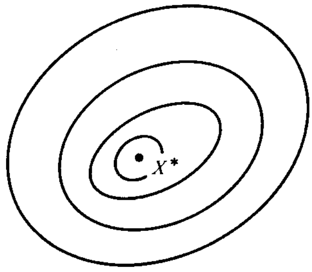

图 1-5　等值线

11. 一维搜索

求解一元或 n 元非线性函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的极值时，经常会遇到从一初始点 $\boldsymbol{X}^0$ 起按某一个已知方向 P^0 寻求最小或最大值的寻优问题，这种在一条已知线上确定单变量函数极小或极大点的数值计算方法称为一维搜索。从初始点至极值点的距离称为一维搜索最优步长，通常用 t^* 表示。图 1-6 所示为二维非线性函数一维搜索的几何图形。对于 n 维情况，可用图 1-7 类似表示。

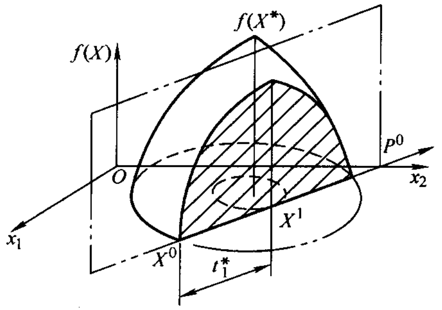

图 1-6　二维非线性函数一维搜索

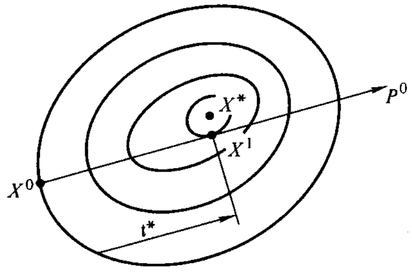

图 1-7　n 维非线性函数一维搜索

12. 凸集与凸函数

凸集：设 R 为 n 维欧氏空间 E^n 中的一个集合，对任意两点 $\boldsymbol{X}^1 \in R$、$\boldsymbol{X}^2 \in R$ 的连线，都属于集合 R，则称这个集合为凸集，否则为非凸集。图 1-8、图 1-9 所示分别为二维凸集和二维非凸集。

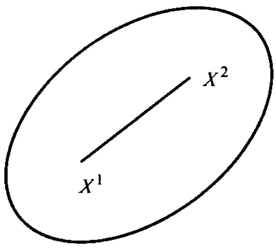

图 1-8　二维凸集

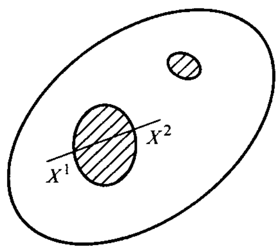

图 1-9　二维非凸集

凸函数：$f(\boldsymbol{X})$ 为定义在 n 维欧式空间 E^n 凸集 R 上的函数，若对任意实数 k（$0 \leqslant k \leqslant 1$）和 R 中任意两点 $\boldsymbol{X}^1 \in R$、$\boldsymbol{X}^2 \in R$，恒有

$$f(k\boldsymbol{X}^1 + (1-k)\boldsymbol{X}^2) \leqslant kf(\boldsymbol{X}^1) + (1-k)f(\boldsymbol{X}^2) \tag{1-17}$$

则称 $f(\boldsymbol{X})$ 为定义在 R 上的一个凸函数。若对任何实数 k（$0<k<1$）和 $\boldsymbol{X}^1 \neq \boldsymbol{X}^2 \in R$，恒有

$$f(k\boldsymbol{X}^1 + (1-k)\boldsymbol{X}^2) < kf(\boldsymbol{X}^1) + (1-k)f(\boldsymbol{X}^2) \tag{1-18}$$

则称 $f(\boldsymbol{X})$ 为定义在 R 上的一个严格凸函数。对一般函数来讲，函数的极小点（或极大点）并不一定是函数的全局极小点（或全局极大点）。但是，对于凸函数，其极小点（或极大点）就是全局的极小点（或全局的极大点）。

13. 梯度

函数 $f(\boldsymbol{X})$ 连续可导，函数对自变量一阶偏导数作为坐标分量的矢量，其矩阵表示形式为

$$\nabla f(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n}\end{bmatrix},\quad 或\ \nabla f(\boldsymbol{X})=\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1},\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}} \tag{1-19}$$

函数在某点 $\boldsymbol{X}^0$ 的梯度为

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^0)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{X=X^0},\quad 或\ \nabla f(\boldsymbol{X}^0)=\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1},\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}}_{X=X^0} \tag{1-20}$$

在函数的极值点有

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^*)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{X=X^*}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \tag{1-21}$$

例 1-8 求函数 $f(\boldsymbol{X})=x_1^2+x_2^2-x_1x_2-15x_1+75$ 的梯度，求 $f(\boldsymbol{X})$ 在点 $\boldsymbol{X}^0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 的梯度值，并判断该点是否是极值点。

解

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1}=2x_1-x_2-15$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2}=2x_2-x_1$$

梯度

$$\nabla f(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}2x_1-x_2-15\\2x_2-x_1\end{bmatrix}$$

$f(\boldsymbol{X})$ 在点 $\boldsymbol{X}^0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 的梯度值为

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^0)=\begin{bmatrix}2x_1-x_2-15\\2x_2-x_1\end{bmatrix}_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=\begin{bmatrix}-15\\0\end{bmatrix}$$

因为

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^0)\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$