清华大学学术专著

湍流大涡数值模拟的理论和应用

张兆顺 崔桂香 许春晓 著

Zhang Zhaoshun Cui Guixiang Xu Chunxiao

清华大学出版社

清华大学学术专著

湍流大涡数值模拟的理论和应用

张兆顺 崔桂香 许春晓 著
Zhang Zhaoshun Cui Guixiang Xu Chunxiao

清华大学出版社
北京

内容简介

本书系统、完整地叙述了湍流大涡数值模拟的基本原理和方法，全书共5章，包括湍流的基本性质、湍流大涡数值模拟方法的基本原理、各种亚格子模型、简单湍流的大涡数值模拟和复杂湍流的大涡数值模拟。书中以大量算例说明湍流大涡数值模拟的应用，并融入了作者多年来的学术研究成果。

本书是为研究和应用大涡数值模拟方法的广大科技工作者撰写的专著，也可作为学习和研究湍流的科技工作者和学生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

湍流大涡数值模拟的理论和应用/张兆顺，崔桂香，许春晓著. —北京：清华大学出版社，2008.1

(清华大学学术专著)

ISBN 978-7-302-16777-8

Ⅰ. 湍…　Ⅱ. ①张…　②崔…　③许…　Ⅲ. 湍流—数值模拟　Ⅳ. 0357.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第004157号

责任编辑：石　磊　赵从棉
责任校对：刘玉霞
责任印制：李红英
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
c－service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：153×235　**印　张**：17.25　**字　数**：287千字
版　　次：2008年1月第1版　　**印　　次**：2008年1月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：55.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：023436－01

作者简介

张兆顺 教授、博士生导师。1957年毕业于上海交通大学造船系，1957—1959年在中国科学院和清华大学合办的第一届工程力学研究班学习，1959年起在清华大学任教。1979—1981年在英国南安普顿大学航空航天系进修，并于1982年获南安普顿大学应用科学院博士(Ph.D)。1979年起，长期从事湍流理论、实验和应用研究，在湍流相干结构、圆管流动稳定性、标量湍流和大涡数值模拟的亚格子模型的研究中有重要贡献，在国内外发表论文百余篇，担任重要的国际湍流会议科学委员会委员。

崔桂香 教授、博士生导师。1977年1月毕业于清华大学工程力学系，1978年考入清华大学工程力学研究生班，1982年获得清华大学工程力学工学硕士学位，1977年至今在清华大学任教，长期从事流体力学、粘性流体力学的教学和复杂流动的研究工作。1998年以来主要进行标量湍流和大涡数值模拟的亚格子模式研究以及湍流在环境流动中的应用研究。

许春晓 流体力学博士、教授。1985—1995年在清华大学工程力学系学习，分别获得工学学士、硕士和博士学位，1995年起在清华大学工程力学系任教。一直从事湍流的机理、数值模拟和控制的研究。

前　言

湍流是广泛存在于自然界和工程中的流动现象，例如：大气、海洋与河流中流体的运动，飞行器周围空气的运动，船舰周围水流的运动以及流体机械中空气或水流的运动等都呈湍流状态。湍流是十分复杂的多尺度不规则流动，个别简单的湍流问题可以应用理论分析近似地获得它的流动特性，实际湍流问题的预测主要采用物理实验和数值模拟方法。随着计算机的迅速发展，湍流的数值模拟日益得到重视，已经成为预测自然环境和工程流动的主要手段之一。

现有的湍流数值模拟方法有3种：直接数值模拟、大涡数值模拟和雷诺平均模拟。

直接数值模拟不需要对湍流建立模型，采用数值计算直接求解流动的控制方程。由于湍流是多尺度的不规则流动，要获得所有尺度的流动信息，需要很高的空间和时间分辨率，也就是需要巨大的计算机内存和耗时很大的计算量。目前，直接数值模拟只能计算雷诺数较低的简单湍流运动，例如槽道或圆管湍流，它还不能作为复杂湍流运动的预测方法。

工程中广泛应用的湍流数值模拟方法采用雷诺平均模型，这种方法将流动的质量、动量和能量输运方程进行统计平均后建立模型。雷诺平均模型不需要计算各种尺度的湍流脉动，它只计算平均运动，因此它的空间分辨率要求低，计算工作量小。雷诺平均模型的主要缺点是它只能提供湍流的平均信息，这对于近代自然环境的预报和工程设计是远远不够的；雷诺平均模型的致命弱点是它的模型没有普适性。

20世纪70年代，一种新的湍流数值模拟方法问世，即大涡数值模拟。它的主要思想是：大尺度湍流直接使用数值求解，只对小尺度湍流脉动建立模型。所谓小尺度，习惯上是指小于计算网格的尺度，而大于网格尺度的湍流脉动通过数值模拟获得。这种新方法的优点是：对空间分辨率的要求远小于直接数值模拟方法；在现有的计算机条件下，可以模拟较高雷诺数和较复杂的湍流运动；另一方面，它可以获得比雷诺平均模拟更多的湍流信息，

例如，大尺度的速度和压强脉动，这些动态信息对于自然环境预报和工程设计是非常重要的。

随着计算机的发展，大涡数值模拟有可能在不远的将来成为预测实际流动的手段。从 20 世纪 90 年代开始，大涡数值模拟方法已成为湍流数值模拟的热门课题，与湍流问题有关的广大科技工作者纷纷应用大涡数值模拟方法预测湍流，甚至流动计算的商业软件中也增设了大涡数值模拟的模块。

随着大涡数值模拟方法日益广泛地被采用，作者认为有必要撰写一本专著，阐述大涡数值模拟的基本理论，说明大涡数值模拟计算精度的分析方法，介绍大涡数值模拟应用的实例。应用大涡数值模拟的科技工作者有必要了解它的基本原理及其精度分析的方法，以便更好地使用这种方法。不加分析地采用某种大涡数值模拟的模型，得到看似合理的计算结果就满足；或者盲目信任商用流体力学计算软件的结果都是很危险的。

本书的安排如下：第 1 章讲述湍流基本性质、统计描述方法和简单湍流的基本特性。本章提供读者基本的湍流知识，例如湍流尺度、能谱等，这些知识对于正确应用大涡数值模拟方法是必要的，已经具有湍流基本知识的读者，可以越过第 1 章直接阅读后面各章。第 2 章详细地论述大涡数值模拟的基本原理，包括控制方程、亚格子应力的概念和产生机制以及边界条件提法等。第 3 章详细介绍各种亚格子模型，包括它们的构造原理、模型特点(包括缺点)。第 4 章介绍简单湍流的大涡数值模拟，以实际算例重点分析亚格子模型的适用范围。第 5 章介绍复杂湍流的大涡数值方法，本章最后，对大涡数值模拟方法的理论和应用作简要的展望，特别提出大涡数值模拟方法的精度估计和复杂物理化学湍流的数值预测问题。

希望本书对应用和研究大涡数值模拟的广大科技工作者有所帮助，书中不当之处望读者不吝指正。

作　者

2007 年 5 月于清华园

目　录

第 1 章　湍流的性质……………………………………………………… 1
1.1　湍流的基本性质 ………………………………………………… 1
1.1.1　不规则性…………………………………………………… 1
1.1.2　多尺度性…………………………………………………… 2
1.1.3　复杂的非线性输运………………………………………… 3
1.2　湍流的统计方法和统计特性 …………………………………… 4
1.2.1　湍流的统计平均…………………………………………… 4
1.2.2　湍流脉动速度的矩和相关………………………………… 6
1.2.3　湍流脉动的谱 …………………………………………… 10
1.3　湍流的统计输运性质………………………………………… 13
1.3.1　平均运动方程和脉动运动方程 ………………………… 13
1.3.2　雷诺应力和雷诺应力输运方程 ………………………… 15
1.3.3　不可压缩湍流的标量输运方程 ………………………… 19
1.4　各向同性湍流及其性质……………………………………… 21
1.4.1　均匀各向同性湍流场的相关函数和谱张量 ………… 23
1.4.2　不可压缩各向同性湍流的能量传输 ………………… 27
1.4.3　不可压缩均匀各向同性湍流中的特征尺度和能谱 … 36
1.5　简单剪切湍流………………………………………………… 43
1.5.1　平壁湍流的统计特性 …………………………………… 43
1.5.2　湍流边界层的拟序结构 ………………………………… 48
1.6　自由剪切湍流的统计特性和结构…………………………… 51
1.6.1　自由剪切湍流的边界层近似 …………………………… 51
1.6.2　自由剪切湍流的相似性解 ……………………………… 52
1.6.3　简单剪切湍流的相干结构 ……………………………… 52

第 2 章 湍流大涡数值模拟方法的基本原理 …… 54
2.1 湍流的基本方程和数值模拟方法 …… 54
2.1.1 湍流的直接数值模拟 …… 55
2.1.2 雷诺平均 N-S 方程的数值模拟方法 …… 56
2.1.3 大涡数值模拟方法 …… 57
2.2 湍流脉动的过滤 …… 59
2.2.1 均匀过滤器及其性质 …… 60
2.2.2 非均匀空间过滤器与交换误差 …… 68
2.3 湍流的大涡模拟控制方程 …… 72
2.3.1 不可压缩湍流的大涡数值模拟控制方程 …… 72
2.3.2 被动标量湍流的大涡数值模拟控制方程 …… 74
2.3.3 可压缩湍流的大涡数值模拟控制方程 …… 75
2.4 亚格子通量的性质 …… 76
2.4.1 亚格子应力的机制 …… 76
2.4.2 亚格子标量通量的输运机制 …… 81
2.5 初始条件和边界条件 …… 84
2.5.1 初始条件 …… 85
2.5.2 边界条件 …… 86

第 3 章 亚格子模型 …… 90
3.1 唯象论的亚格子涡粘和涡扩散模型 …… 90
3.1.1 唯象论亚格子涡粘和涡扩散模型的基本思想 …… 90
3.1.2 亚格子涡粘和涡扩散模型 …… 91
3.2 唯象论亚格子涡粘和涡扩散模型的改进 …… 101
3.2.1 动力模式 …… 101
3.2.2 各向异性过滤器的修正 …… 107
3.3 结构型亚格子模式 …… 109
3.3.1 尺度相似模式 …… 109
3.3.2 反演模式 …… 111
3.4 理性亚格子模式 …… 114
3.4.1 理性亚格子应力模式(CZZS 模式) …… 114
3.4.2 理性亚格子标量通量模式 …… 123
3.5 亚格子模型的考核 …… 125

3.6 其他亚格子模式 …… 127
3.6.1 单调整合模式 …… 128
3.6.2 多尺度模式 …… 128
3.6.3 线性随机估计模式 …… 129

第 4 章 简单湍流的大涡数值模拟 …… 130
4.1 谱方法 …… 130
4.1.1 谱方法的基本原理 …… 130
4.1.2 伪谱法和混淆误差 …… 132
4.2 不可压缩均匀湍流的大涡数值模拟 …… 134
4.2.1 均匀湍流大涡数值模拟的基本方程和初始场 …… 134
4.2.2 均匀湍流大涡数值模拟的算例 …… 137
4.2.3 均匀旋转湍流的大涡数值模拟 …… 144
4.2.4 无剪切湍流混合层的大涡数值模拟 …… 148
4.3 简单壁湍流的大涡数值模拟 …… 151
4.3.1 简单壁湍流的大涡数值模拟方程和边界条件 …… 151
4.3.2 平面槽道湍流和库埃特湍流的大涡数值模拟 …… 153
4.3.3 圆管湍流的大涡数值模拟 …… 163
4.3.4 平壁湍流边界层的大涡数值模拟 …… 166
4.4 简单自由剪切湍流的大涡数值模拟 …… 169
4.4.1 简单自由剪切湍流的大涡数值模拟方程和边界条件 …… 169
4.4.2 平面湍流混合层的大涡数值模拟算例和亚格子模式比较 …… 172
4.5 简单湍流场中标量湍流的大涡数值模拟 …… 179
4.5.1 线源标量湍流扩散的大涡数值模拟 …… 180
4.5.2 平均等梯度标量场在均匀湍流场中的扩散 …… 181
4.5.3 槽道湍流中标量输运的数值计算 …… 184

第 5 章 复杂湍流的大涡数值模拟 …… 186
5.1 有限体积法 …… 186
5.1.1 有限体积法的基本方程 …… 186
5.1.2 有限体积法的离散方式和表示方法 …… 187

5.1.3 有限体积法离散的基本方程…… 188
5.1.4 插值公式…… 189
5.1.5 边界条件…… 190
5.2 复杂几何边界湍流绕流的网格设计 …… 191
5.2.1 贴体网格…… 191
5.2.2 重叠网格…… 192
5.2.3 非结构型网格…… 192
5.2.4 直角网格的浸没边界法…… 193
5.3 复杂湍流的近壁处理 …… 194
5.3.1 壁函数…… 194
5.3.2 壁函数模型的算例…… 196
5.4 复杂几何边界湍流的算例 …… 197
5.4.1 平面扩压器…… 197
5.4.2 绕圆柱流动…… 199
5.5 高精度有限体积法的大涡数值模拟 …… 204
5.5.1 高精度有限体积法的计算公式…… 204
5.5.2 高精度有限体积法的大涡数值模拟算例…… 207
5.5.3 环境流动的算例…… 215
5.6 雷诺平均和大涡数值模拟的组合模型(RANS/LES) …… 221
5.6.1 雷诺平均统计模式…… 221
5.6.2 RANS/LES 组合模型的基本思想和实施方法 …… 229
5.6.3 RANS/LES 组合模型算例 …… 233
5.7 复杂湍流大涡数值模拟方法的展望 …… 240
5.7.1 大涡数值模拟方法的误差估计和优化…… 240
5.7.2 复杂物理化学流动的大涡数值模拟方法…… 248

名词索引…… 252

参考文献…… 255

第1章 湍流的性质

本章简要介绍湍流的性质、主要平均特性和数值模拟方法。

1.1 湍流的基本性质

1.1.1 不规则性

湍流又称紊流，它是一种极不规则的流动现象。

湍流的不规则性不仅表现在速度、压强等流动物理量在时空中的不规则分布，还表现在它的不重复性。以无限长圆管内的牛顿流体流动为例，在相同压强梯度、粘度和温度等条件下重复实验，如果流动的雷诺数很小，则流动是层流，不论圆管内的初始状态是什么状态，当流动达到稳定状态后，圆管内沿径向的速度分布一定是抛物线形状，管壁切应力恒定不变。这种层流运动状态完全由流体性质和边界条件确定。当流动的雷诺数超过某一临界值后，圆管内的流动发展为湍流。这时重复实验，同一空间点上测得的速度时间序列总是不相同的，同样，速度在空间的分布也是不可重复的。图1-1显示在不同时刻采集的圆管湍流中心线上的流向脉动速度($Re=6000$)。可以看到，两次采集的速度时间序列都是极不规则的，并且两次采集的结果没有重复性。

如果实验次数用自变量 $\tilde{\omega}$ 表示(例如第1次实验 $\tilde{\omega}=1$，第2次实验$\tilde{\omega}=2$，等等)，则不能重复的湍流速度场是时间、空间坐标和实验次数 $\tilde{\omega}$ 的不规则函数：

$$u_i = u_i(\boldsymbol{x}, t, \tilde{\omega}) \tag{1.1}$$

给定 $\tilde{\omega}$ 的一次实验流场称为一个样本流动，式(1.1)提供研究不规则湍流运动的描述方法，它包含样本流动中湍流物理量的丰富信息。例如，将

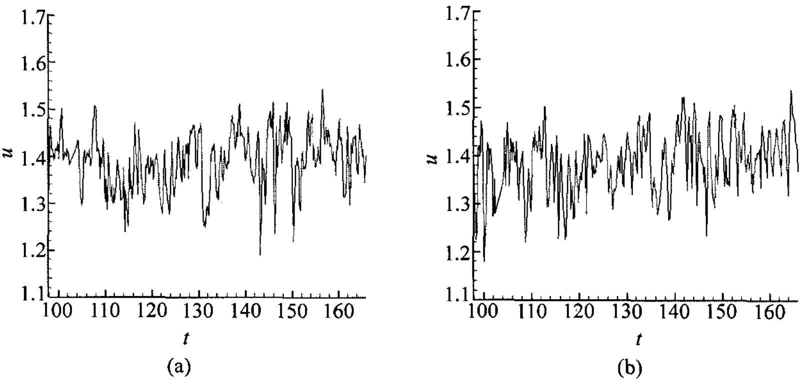

图 1-1 圆管中心流向速度的两次实验的时间序列

式(1.1)中所有实验次数做统计平均，可以获得平均速度，并用$\langle u_i \rangle$表示，样本流动速度和平均速度之差称为脉动速度，并用 u_i'表示，即

$$u_i'(\boldsymbol{x},t,\tilde{\omega}) = u_i(\boldsymbol{x},t,\tilde{\omega}) - \langle u_i \rangle \tag{1.2}$$

类似地，可以定义平均压强、平均温度和脉动压强、脉动温度等。湍流平均量是不规则湍流物理量最基本的信息，更丰富的湍流物理量信息包含在脉动量中。

1.1.2 多尺度性

湍流是在连续介质范畴内流体的不规则运动，它包含许多不同尺度的运动。以脉动速度的时间序列为例(图 1-1)，对很长时间序列的脉动速度作傅里叶分析[①]，就可以发现湍流脉动速度具有连续的频谱：

$$\hat{u}_i(\boldsymbol{x},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_i'(\boldsymbol{x},t)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

频率的倒数是周期，它是一种时间尺度。脉动速度的频谱(图 1-2)表示湍流运动具有不同时间尺度成分。通常时间尺度很小(频率很高)或时间尺度很长(频率很低)的脉动成分很少，某一时间尺度的脉动含有的动能最大。

在空间上，脉动速度也具有不同尺度成分，对于空间均匀的湍流(关于均匀脉动的概念，后面有详细的定义)，可以用傅里叶分析获得脉动的波谱：

$$\hat{u}_i(t,\boldsymbol{k}) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty} u_i(\boldsymbol{x},t)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.4}$$

① 湍流脉动是不规则函数，这里的傅里叶积分应理解为广义傅里叶积分(Batchelor，1953)

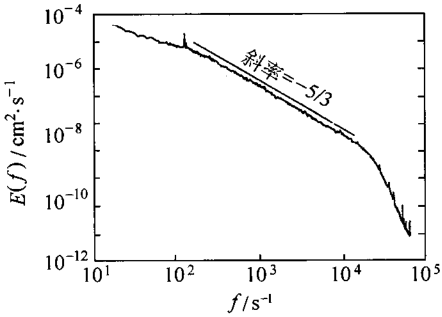

图 1-2　脉动速度的频谱示意图，$E(f)$是脉动速度平方的频谱

波数的倒数是波长，它是一种长度尺度。脉动速度的波谱如图 1-3 所示，它表示脉动速度动能在空间各尺度上（波数上）的分布。

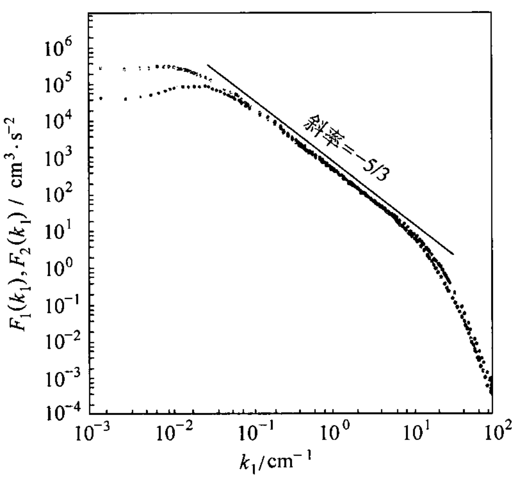

图 1-3　脉动速度的波谱示意图

湍流运动的多尺度特性不仅给分析这种运动带来困难，而且数值模拟这种运动需要精细的数值方法和容量很大的计算机。

1.1.3　复杂的非线性输运

湍流运动的不规则性和多尺度性质导致湍流脉动间复杂的非线性输运特性。必须强调指出，湍流是流体微团的不规则运动，湍流脉动的最小时间

尺度和最小空间尺度都远远大于分子热运动的相应尺度。因此对于每一个样本流动，即一次实验流动，都服从流动的宏观守恒方程，对于不可压缩牛顿流体来说，湍流的控制方程是纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程，简称N-S方程：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+f_i \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{1.6}$$

式(1.5)中 $u_j\partial u_i/\partial x_j$ 是非线性项，它属于流体微团的惯性项，如果将它写作$\partial u_iu_j/\partial x_j$，它表示微团动量通量(张量)的散度。在流动的欧拉描述法中，它表示微团动量的空间输运。如果湍流脉动速度用傅里叶展开表示，脉动动量输运等于：

$$u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}=\mathrm{i}\sum_{l+m=k}k_j\hat{u}_j(\boldsymbol{l})\,\hat{u}_i(\boldsymbol{m}) \tag{1.7}$$

上式表示湍流脉动动量输运是各种尺度脉动非线性相互作用之和。在湍流场中，质量、能量的湍流输运也有类似的非线性相互作用。在后文中将可以看到湍流脉动的非线性输运是主宰湍流运动的重要性质。

湍流脉动的不规则性、多尺度性和复杂的非线性输运是湍流运动的主要性质。

1.2 湍流的统计方法和统计特性

1.2.1 湍流的统计平均

1. 系综平均

不规则的湍流运动需要用统计方法描述它的平均运动特性，式(1.1)是湍流运动的最基本描述方法，将所有样本(即在给定边界条件下一切可能的运动状态)速度场做算术平均，称为湍流的系综平均，即

$$\langle u_i\rangle(\boldsymbol{x},t)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tilde{\omega}=1}^{N}u_i(\boldsymbol{x},t,\tilde{\omega}) \tag{1.8}$$

系综平均是最一般的随机量的平均方法，系综平均的速度场可以是非定常和非均匀的。系综平均运算是样本的算术平均，因此它和求导运算可交换。就是说样本速度导数的系综平均等于系综平均速度的导数，即

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle (\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tilde{\omega}=1}^{N} \frac{\partial u_i(\boldsymbol{x},t,\tilde{\omega})}{\partial x_j} \tag{1.9a}$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle (\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tilde{\omega}=1}^{N} \frac{\partial u_i(\boldsymbol{x},t,\tilde{\omega})}{\partial t} \tag{1.9b}$$

2. 概率平均

如果已知不规则速度场 $u_i(\boldsymbol{x},t)$ 在任意时空点上的概率密度分布 $p(u_i,\boldsymbol{x},t)$，则可以用积分方法计算平均速度：

$$\langle u_i \rangle (\boldsymbol{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i p(u_i,\boldsymbol{x},t) \mathrm{d}u_i \tag{1.10}$$

可以证明概率平均等价于系综平均。

3. 雷诺时间平均

如果系综平均或概率平均的速度场与时间无关，这种湍流速度场属于时间平稳态的不规则运动，称为定常湍流。这里提醒读者，定常湍流是指湍流平均场是定常的，不要和湍流样本运动混淆，湍流样本流动总是非定常的。对于定常湍流，可以用时间平均取代系综平均和概率平均，时间平均是雷诺最早提出的湍流平均方法，故又称雷诺平均(Reynolds, 1894)，公式如下：

$$\bar{u}_i(\boldsymbol{x}) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i(\boldsymbol{x},t) \mathrm{d}t \tag{1.11}$$

雷诺平均用上画线“—”表示，以区别于系综平均或概率平均。由式(1.11)可见，雷诺平均的结果和时间无关，就是说无论从时间序列中哪一时刻开始计算，平均值都是相等的。

系综平均结果和时间无关的不规则运动称做时间平稳态，对时间平稳态有各态遍历定理，该定理证明：时间平稳态的不规则运动的系综平均和雷诺时间平均相等。从运动性质上来理解各态遍历定理，就是说，平稳的不规则运动的时间序列取尽了系综中所有可能的速度值。

4. 空间平均

如果系综平均速度场和空间坐标无关，称做空间均匀湍流，或简称均匀湍流。这时系综平均可以用体积平均取代：

$$\langle u_i \rangle (t) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^3} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} u_i(\boldsymbol{x},t) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \tag{1.12}$$

也可以用各态遍历定理证明：均匀湍流场中湍流量的系综平均等于体积

平均。

有些湍流运动中，系综平均速度在某一方向或两个方向上是均匀的，则可以用均匀方向上的线平均或面平均取代系综平均。

总之，系综平均是一般的统计平均，本书在论述或表示湍流统计量时都用系综平均，在具体计算时，根据湍流运动的性质，采用时间平均、体积平均、面平均或线平均。

1.2.2 湍流脉动速度的矩和相关

湍流样本速度和系综平均速度之差称为脉动速度，即式(1.2)，

$$u_i'(\boldsymbol{x},t,\tilde{\omega}) = u_i(\boldsymbol{x},t,\tilde{\omega}) - \langle u_i \rangle$$

为了简明起见，略去样本变量 $\tilde{\omega}$，脉动速度等于

$$u_i'(\boldsymbol{x},t) = u_i(\boldsymbol{x},t) - \langle u_i \rangle \tag{1.13}$$

1. 脉动速度的矩

脉动速度乘积的系综平均值称为脉动速度的矩，乘积包含的因子数定义为阶数。

(1) 脉动速度的平均值，即 1 阶矩，等于零

将式(1.13)做系综平均，有

$$\langle u_i'(\boldsymbol{x},t) \rangle = \langle u_i(\boldsymbol{x},t) \rangle - \langle \langle u_i \rangle \rangle$$

由于系综平均速度$\langle u_i \rangle$是确定性量，对它作系综平均等于平均速度，即

$$\langle \langle u_i \rangle \rangle = \langle u_i \rangle$$

于是就证明了：

$$\langle u_i'(\boldsymbol{x},t) \rangle = 0 \tag{1.14}$$

(2) 脉动速度的高阶矩

脉动速度平方、立方和高次方的系综平均称做脉动速度的高阶矩。3 个脉动速度分量平方的系综平均值之和的一半等于脉动运动的动能，并称做湍动能，用 k 表示：

$$k = \frac{1}{2}(\langle u_1'u_1' \rangle + \langle u_2'u_2' \rangle + \langle u_3'u_3' \rangle) = \frac{1}{2}\langle u_i'u_i' \rangle \tag{1.15}$$

2. 脉动速度分量间的相关

(1) 一点相关

时空中同一点两个速度分量乘积的系综平均值称为速度的一点 2 阶相

关，记作 $R_{ij}(\boldsymbol{x},t)$，即有

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \langle u_i'(\boldsymbol{x},t)u_j'(\boldsymbol{x},t)\rangle \tag{1.16}$$

脉动速度一点 2 阶相关有 9 个量，很容易证明它们组成 2 阶正定对称张量。

同理，3 阶相关的定义是

$$R_{ijk}(\boldsymbol{x},t) = \langle u_i'(\boldsymbol{x},t)u_j'(\boldsymbol{x},t)u_k'(\boldsymbol{x},t)\rangle \tag{1.17}$$

它是 3 阶张量。2 阶速度相关的物理意义是局部脉动动量通量的平均值，一点 3 阶相关的物理意义是脉动动量的湍流输运的平均值。

（2）时间相关

同一空间点不同时刻的两个脉动速度分量乘积的系综平均称为速度时间相关，记作 $R_{ij}(\boldsymbol{x},t_1,t_2)$，

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},t_1,t_2) = \langle u_i'(\boldsymbol{x},t_1)u_j'(\boldsymbol{x},t_2)\rangle \tag{1.18a}$$

令 $\tau=t_2-t_1$，并称之为相关时间，式(1.18a)可写作：

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},t_1,\tau) = \langle u_i'(\boldsymbol{x},t_1)u_j'(\boldsymbol{x},t_1+\tau)\rangle \tag{1.18b}$$

时间相关的物理意义是脉动速度在时间序列上的相互联系。当 $\tau=0$ 时，时间相关等于 $t=t_1$ 时的一点相关。一般来说，相隔很长时间的 2 个湍流脉动速度场之间几乎不相关，就是说，当 $\tau\to\infty$时，时间相关等于零，即

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},t_1,\infty) = \langle u_i'(\boldsymbol{x},t_1)u_j'(\boldsymbol{x},t_1+\infty)\rangle = 0$$

脉动速度的 2 阶时间相关也是 2 阶张量，但是没有对称性，因为

$$\langle u_i'(\boldsymbol{x},t_1)u_j'(\boldsymbol{x},t_2)\rangle \neq \langle u_j'(\boldsymbol{x},t_1)u_i'(\boldsymbol{x},t_2)\rangle$$

如果时间相关只和相关时间有关，即

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},\tau) = \langle u_i'(\boldsymbol{x},t_1)u_j'(\boldsymbol{x},t_1+\tau)\rangle$$

这种脉动速度场称为时间平稳态。它的意义在于不论时间相关的起始时刻 t_1 从什么时候算起，只要相关时间间隔 τ 相等，相关值就相同。时间平稳态的 2 阶速度相关有以下性质：

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},\tau) = R_{ji}(\boldsymbol{x},-\tau) \tag{1.19}$$

因为

$$\begin{aligned} R_{ij}(\boldsymbol{x},\tau) &= \langle u_i'(\boldsymbol{x},t_1)u_j'(\boldsymbol{x},t_1+\tau)\rangle = \langle u_i'(\boldsymbol{x},t_2-\tau)u_j'(\boldsymbol{x},t_2)\rangle \\ &= R_{ji}(\boldsymbol{x},-\tau) \end{aligned}$$

还可以定义 2 个时刻间的 3 阶时间相关：

$$R_{i,jk}(\boldsymbol{x},\tau) = \langle u_i'(\boldsymbol{x},t_1)u_j'(\boldsymbol{x},t_1+\tau)u_k'(\boldsymbol{x},t_1+\tau)\rangle \tag{1.20}$$

以此类推，可以定义 2 个时刻间的 n 阶相关。

（3）空间相关

同一时刻不同空间点的两个脉动速度分量乘积的系综平均称为速度空