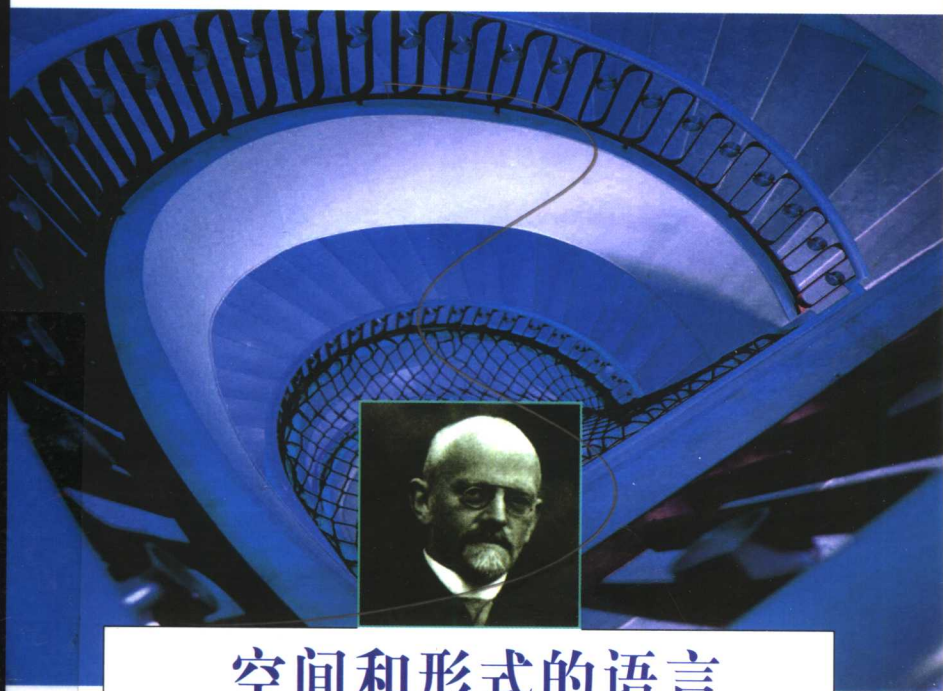


数学之旅

THE HISTORY OF MATHEMATICS

几何学

Geometry



空间和形式的语言

THE LANGUAGE OF SPACE AND FORM

〔美〕约翰·塔巴克 著

John Tabak



商务印书馆

018/45

2008

数学之旅

几 何 学

——空间和形式的语言

〔美〕约翰·塔巴克 著

张红梅 刘献军 译

胡作玄 校

商 务 印 书 馆

2008 年·北京

图书在版编目(CIP)数据

几何学:空间和形式的语言/[美]塔巴克著;张红梅,刘献军译. —北京:商务印书馆,2008
(数学之旅)

ISBN 978-7-100-05557-4

I. 几… II. ①塔…②张…③刘… III. 几何学
IV. 018

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 110189 号

所有权利保留。

未经许可,不得以任何方式使用。

数学之旅

几 何 学

——空间和形式的语言

[美] 约翰·塔巴克 著

张红梅 刘献军 译

胡作玄 校

商 务 印 书 馆 出 版

(北京王府井大街 36 号 邮政编码 100710)

商 务 印 书 馆 发 行

北 京 民 族 印 刷 厂 印 刷

ISBN 978-7-100-05557-4

2008 年 2 月第 1 版

开本 850 × 1168 1/32

2008 年 2 月北京第 1 次印刷

印张 7³/₈

印数 5 000 册

定价: 17.00 元

数学之旅的意义

数学有着几千年的历史。数学的历史最早开始于人类要用星星预测未来,后来有了古希腊人到埃及用几何方法测量金字塔的高度,再以后有了哥白尼、伽利略、牛顿、达·芬奇……一个又一个响亮的名字,他们大胆的设想、计算、实验,铺就了一条数学之路。这条路的近端是我们面前的计算机等各种数字化的现代科学。正是这条路,见证了人类文明发展的历程,也把由数学改变的物质生活带到了人间。

我们出版这套“数学之旅”不仅为了让大家了解数学的形成和发展,还想告诉大家,数学在形成和发展的过程中经历了什么——不仅在于如何发现问题,更在于怎样提出问题;不仅在于怎样解释问题,更在于怎样解决问题。就这样,数学发展了。由于数学的精确性,所有的自然科学学科几乎都与数学有关联。数学成了各个自然科学研究学科的主要工具之一。之所以这样说,是因为数学不仅可以作为计算的准则,而且它更能体现定性和定量的转化,也就更加便于传授和继续研究。很多自然科学的问题就在科学家的数学计算中解决了。其结果是提高了人的生活质量,丰富了人类的物质文明。

“数学之旅”不是教科书,也不是教辅,它只是为在新时代中对数学和自然科学历史感兴趣的人提供一些阅读生活。不过,从中

2 几何学

学到一些如何观察现象和提出问题的方法,了解教科书中那些定理的形成,从而把自己投入到人类文明的进程中去,或许可以成为读者意想不到的收获吧。

商务印书馆编辑部

序

胡作玄

数学,也许还有古典音乐,是人类精神的最高创造。它完全从头脑中产生,就像雅典娜从宙斯的前额中跳出来一样。作为人类思想的最高境界,数学往往带有它那种特有的灵性和神秘,远离芸芸众生,可是对于少数人,数学却能像音乐一样,给他们以巨大的心灵震撼。请看一下《罗素自传》的第一卷:“11岁时,我开始学习欧几里得几何学,哥哥做我的老师。这是我生活中的一件大事,就像初恋一样令人陶醉。我从来没有想象到世界上还有如此美妙的东西。”无独有偶,爱因斯坦在他的“自述”中也谈到:“12岁时,我经历了另一种性质完全不同的惊奇:这是在一个学年开始时,当我得到一本关于欧几里得平面几何的小书时所经历的。这本书里有许多断言,比如,三角形的三条高线交于一点,它们本身虽然并不是显而易见的,却可以很可靠地加以证明,以致任何怀疑似乎都不可能。这种明晰性和可靠性给我造成了一种难以形容的印象。”当然,他们两位所说的还是2300年前的欧几里得,而到21世纪我们所有的数学瑰宝就更加光彩夺目,远远超出人们的想象。

虽说数学大厦高耸入云,它却不是建在天上,只是少数神仙的游乐场。它植根于地下,也朦胧地出现在每个人的心中。这是因

4 几何学

为数学不仅有精神天父的基因,也有物质地母的基因。这决定数学从一开始就不可避免地是一种实用知识,它们实在太俗了,以至于某些自以为有高贵血统的人拼命要掩盖其卑贱的出身,就像概率论学者不爱提它来自赌场的问题。计量、商贸、会计、人口普查是最早的应用数学,现在依然如此。尽管它们早已被排除在数学之外,可是正是这些活动把数学与日常生活联系在一起,也正因为如此,基础数学教育应运而生,至今仍是兴旺发达的事业。说到这里,我们不能不为中国古代的数学和数学教育而自豪,早在孔夫子之前,中国(至少在齐国),九九表已经相当普及,可是两千年后,意大利的商人子弟在家乡只能学会加法,而要学乘法就得进城请教专家、大师了。西方的基础教育有 3R(Reading, Writing, Arithmetic)的说法,简言之就是读、写、算,这说明在把文盲教育成识字的人的同时,还要使他们不致维持“数盲”的状态。其实,对于绝大多数人来说,这已经足够了,哪怕是现在的“信息时代”、“数字化时代”。

奇怪的是,虽然人们并不太需要太多的数学,数学教育家却结结实实地灌输给学生大量的数学。如果你小学毕业,6 年数学都是主课。如果你完成义务教育,那就得念 9 年数学。高中 3 年的数学更是难得要命,这还没有算上微积分。即便中学不学微积分,上大学许多人还是逃不掉,不仅学理工的要念微积分,学经济、金融、管理的也要念。学文的虽然可逃此一劫,可老托尔斯泰的《战争与和平》的最后,就有微积分的论述,而且颇为深刻。马克思、恩格斯、列宁也懂微积分。这么说,难道一个人非得念十好几年的数学吗?更糟的是,正课之余许多学生还得为“奥数”拼搏。这些题之偏之难连国际著名的数学大师陈省身都不一定做得出来。费了半天劲,除了文凭和分数之外,究竟有什么收获呢?

把大量数学教给青少年也许并不是那么不合理。相反,从古到今,数学一直受到重视。柏拉图的学园禁止不懂几何学的人入内。按照他的说法,不会几何学就不会正确的思考,而不会正确思考问题的人不过是行尸走肉。这就形成后来学习没用的数学的辩护词,你学的数学可能不直接有用,但它是训练头脑的体操。不过这个体操对许多学生还是太难了。那时教材也就是欧几里得的《几何原本》。许多学生学到第五个命题“等腰三角形两底角相等”就过不去了,于是这个命题被称为“驴桥”,也就是笨人难过的桥。不过,就算勉强过了,是否能变聪明也真的很难说。如果说,以前多学数学还无所谓,那么,17世纪末近代科学的产生的确充分证明数学的威力。牛顿不愧是有史以来最伟大的科学家,他一手建立牛顿力学,另一手建立微积分,正是他在三百多年前把科学奉献给文明社会。18世纪美国大诗人蒲柏这样赞美:

自然及其规律浸没在黑暗中,

上帝说,让牛顿诞生,

于是,世界大放光明。

正是牛顿使科学和基于科学的技术推动了历史,使它变成须臾不可离的东西。同时,他也给后人带来不少麻烦。虽然你可以“师夷人之长技以制夷”,可是,那永远走不远,因为许多技术建立在科学基础之上,不学科学难对技术有重大改进,而学科学又不能不学一整套数学,其中微积分只不过是基础的基础。而学数学又与学自然科学不同,总要从基础学起。要想学微积分,首先要把算术、代数、几何、三角、解析几何学好,学计算机又要学离散数学,学经济和金融又要学概率、统计等等。其实这些说到底都是二三百年前的数学了,不过,让这些功课都进入中学的数学课,对于多数人来

说,还真有些吃不消。

这就是为什么数学成为现在压在学生头上的两座大山之一(另一座是英语)。多学数学没有坏处,问题是花了这么大的力气,究竟收获几何?真是可怜得很。多数人根本用不上他们所学的知识,也没有掌握数学的思想方法,在理解新的数学时仍然感到十分困难。而更糟的是,许多学生失去学习数学的兴趣。如果一个人觉得数学很重要,只是被动地硬着头皮去学,肯定是事倍功半;可是,如果主动地、津津有味地学,也许会事半功倍。有没有既能培养数学兴趣,同时又能提高对数学理解力的道路呢?有!那就是学点数学史。

数学史所能告诉读者的信息,大部分是其他数学书一般根本没有的,甚至根本不具备的。一般数学书一上来就是定义、定理、证明,它们论述得非常严格,但是读者一般感觉就是丈二和尚摸不着头脑。数学讨论的许多抽象概念,最难掌握的是研究的动机,也就是引入这些概念究竟干什么,而这只能通过历史才能看到它的来龙去脉。许多数学理论都是通过解决一个理论问题或一个实际问题在历史长河中慢慢形成的。古希腊的三大几何问题经过两千多年才在 19 世纪得到完满解决,并且形成伽罗瓦理论。历史的流变总是帮助读者认识到问题的难点以及数学上的伟大突破,可是教科书则很少告诉你,什么是重要的,什么是不重要的。只有懂得这些,才能说是懂得数学。一句话,数学史绝对有助于理解抽象难懂的数学。

其次,数学史不是拘泥于狭窄的学科领域,而是在更大的文化背景之下看数学的发展。这反映出数学与社会是紧密联系在一起,正因为如此,数学在各个领域中的应用也就是顺理成章的事。

文艺复兴的巨匠们的绘画之所以栩栩如生,正是由于他们掌握了透视的基本方法,这导致射影几何学的诞生。大航海时代推动了地图(海图)绘制技术的发展,它反过来也推动了人们了解曲面的几何学。同样,工程画也成为工程技术人员的通用语言。随着客观世界的不确定性的大量出现,概率和统计也应运而生。尽管概率论有着并不光彩的出身,但赌徒的问题毕竟使数学家建立起系统的理论,而且有越来越多的应用。说到底,物理科学是产生数学与应用数学最重要的领域,这从历史上也可以体会到。我们现在司空见惯的事物,例如无线电波,都是解微分方程的产物,这些结果是如此深刻,超出一般人的理解,其原因就是它们是巨人的劳作,而这些巨人又是站在巨人的肩膀上。

数学的实质在于有一套提出问题和解决问题的普遍理论及方法。数学家人数现在不能说少,但作出巨大贡献的天才也不算太多。数学史与通史一样,首先推崇英雄,他们少说有二三十位,多说有四五十位,学数学史就是要从他们的身上学点东西。

塔巴克的一套五本数学史,最为适合有一般数学知识的读者,它内容丰富、行文流畅、通俗易懂、生动有趣,如果能够好好看看,对数学的理解必定会大有提高,而这种收益是读多少教材、教辅,做多少题也达不到的。

目 录

引言.....	1
---------	---

第一部分 古代的几何学

第一章 希腊人之前的几何学.....	9
第二章 早期的希腊几何学	16
没有数的数学	18
毕达哥拉斯学派	21
黄金分割	23
雅典的几何学	25
第三章 希腊重要的几何学著作	30
《几何原本》, 亚历山大的欧几里得著	30
重新审视欧几里得	37
阿基米德的《方法》《论球与圆柱》及其他著作	39
《圆锥曲线论》, 佩尔格的阿波罗尼奥斯著	45
圆锥曲线的研究	50
《数学汇编》, 亚历山大的帕普斯著	52
希腊数学传统的终结	56

2 几何学

第二部分 射影几何学

第四章 文艺复兴时期的数学和艺术	63
达·芬奇	68
丢勒	72
第五章 第一批定理	78
梅森	86
第六章 射影几何学被重新发现	87
蒙日的学生	90
射影几何学——一门成熟的数学分支	96
当代射影几何学	100
群和几何学	102
第七章 非欧几何学	105
我们生活的空间是欧几里得空间吗?	112

第三部分 坐标几何学

第八章 解析几何学的起源	117
梅内克缪斯和佩尔格的阿波罗尼奥斯	120
笛卡儿	123
几何学里的代数符号	128
费马	131
毕达哥拉斯定理和笛卡儿坐标	134
第九章 微积分和解析几何学	136
牛顿, 新几何学和旧几何学	139
双极坐标系	144

欧拉和立体几何学	147
蒙日	155
第十章 微分几何学	158
黎曼	163
第十一章 时空观的形成	171
几何学和狭义相对论	174
毕达哥拉斯定理和狭义相对论	178
几何学和“普通”曲面的科学	180
诺特和对称性	182
第十二章 无限维几何学	189
大事年表	196
术语表	215

引 言

什么是几何学？学习几何学时，我们究竟学到了什么呢？

当数学家们研究几何学时，点、线和面是他们研究的一些对象，人类始终对线和形的问题感兴趣。法国拉斯科的最近一次冰河时期的石窟壁画，呈现出了相当精致的野生动物的图画，这些美丽的图画大约创作于15 000年以前。在人类历史的长河中，人们几乎无法想象它们的古老程度，当时人类正处于以打猎为生的石器时代。直到创作这些图画几千年以后，世界上才有了文字，但這些石窟壁画表明了这样一个事实：在15 000年以前，石窟艺术家对线和形的使用非常敏感。这就意味着他们知道几何学吗？如果他们确实知道一些几何学，那么他们知道几何学的哪些数学内容呢？

几个世纪以来，欧洲、中东，以及北非的数学家认为他们知道“什么是几何学”。对他们来讲，答案很简单。“几何学”这一术语指的是古希腊的几何学，这种几何学用希腊最著名的数学家之一——亚历山大的欧几里得——的名字来命名，称作欧几里得几何学。学习几何学时，我们究竟学到了什么呢？这个问题的答案（对于他们）也同样显然：我们在欧几里得的名著的《几何原本》里学习了定理和证明。这些早期的数学家没有探究是否可能存在其他的几何学，他们相信能够学习的大部分几何知识早期已经在其他地方学过了，留给他们所做的全部工作就是掌握希腊的几何学，

2 几何学

以及阐明他们自认为是希腊几何学里仍需要阐明的观点。欧几里得几何学是几何学,他们认为自然界中的一切事物只不过是欧几里得几何学里的一道习题而已。

众所周知,古希腊人在几何学领域取得了辉煌的成就。在大约一千年的时间里,希腊文化哺育出了一代又一代的杰出的数学家。无论在这之前还是之后,没有其他文化能与之相匹敌,它在数学上的精彩程度以及影响的深远程度上都创造了历史纪录。几乎从一开始,希腊人就提出了有关数学的本质以及怎样才算理解了数学之类的深刻问题。他们创造了证明的思想,同时也努力把几何学置于牢固的逻辑基础之上。希腊的许多数学发现——证明和结果本身的陈述——现在读者听起来仍然具有现代色彩。虽然希腊人创造了在我们现代意义下所能理解的数学,但是他们的工作对洞悉当代数学家关于几何学的理解没有什么帮助。现在的数学家们已经认识到欧几里得几何学只是许多几何学中的一种。

几何学是对几何性质的研究,这是几何学的一个比较现代化的定义。它也是前面那个问题的一个简洁易懂的答案,但显然不是一个完整的答案,它只是把我们的注意力从“几何学”这个术语引到“几何性质”这个短语上来。

什么是几何性质? 三维(甚至更高维)空间中的点、线、面、角、曲线、曲面和物体可能都值得几何学进行研究,但对一个对象来讲,并不是每个有关它的性质都是几何性质。一个三角形的形状可以看作是一个几何性质,但它的颜色、温度以及它与读者的距离都不是几何性质。那可能是显而易见的,但也是重要的。理解数学家们所研究的几何学内容的关键在于:辨别一个对象有哪些性质是几何性质。

我们不妨设想在一个平展的表面上有一个三条边等长的三角形(三条边相等的三角形称作等边三角形)。因为这个三角形的三条边等长,所以不难证明它的三个角也必定相等。它的三个角相等是三条边相等的“推论”,我们还可以进一步推出如下结论:因为这个三角形的三个角相等,所以它的每个角必定是 60° 。因此,如果我们知道了三角形的三条边等长,就能推出它的三个角都是 60° 。

现在,我们假定:让这个三角形从它的初始位置倾斜。它还是等边三角形吗?它的三个角还相等吗?每个角还是 60° 吗?当我们使它倾斜或者使它稍微向一侧偏离时,我们还能够确信上述结论成立吗?或者我们不得不重新研究这个三角形?

我们中的绝大多数人只是假定:一旦知道了一个三角形的三个角的大小之后,如果我们只是使三角形移动离开了它的初始位置,那么就没有必要重新证明我们的发现。欧几里得做了同样的假设。让这个三角形从一个位置倾斜或滑动至另一位置,边的长度和角的大小保持不变。这对你来说可能是显然的,其中不太明显的含义可能是:这个简单例子也包含着理解数学家研究几何时到底研究什么的关键。

几何学研究的是图形在一组特殊的运动下不改变的那些性质。例如,欧几里得几何学研究的是当图形倾斜(旋转)或沿一条直线运动(平移)时不改变的那些性质。当古希腊人证明某个图形具有一个特殊的几何性质时,这个证明也适用于位于任何地方能够通过一系列平移和旋转与原图形重合的每个图形。这就是说,因为长度和角度在旋转和平移下保持不变,所以它们是欧几里得几何学里的几何性质。

4 几何学

文艺复兴时期,艺术家们试图在二维画布上描绘出三维图形,射影几何学正是起源于这样的尝试的一门几何学,它是用另一组不同的运动来定义几何学的一个例子。定义射影几何学的运动称作射影。射影既不保持线段的长度,也不保持角的大小。这听起来可能让人感到很奇怪,实则不然。当图像从胶卷“投射”到电影屏幕上时,我们能够用射影几何学来描述它们是如何变化的。在射影几何学里,尽管两个看起来不同的三角形最初可能有不同的形状或大小,但它们能够通过一系列的射影“运动”重合。因此,在射影几何学里,两个看起来完全不同的三角形有可能是“相同的”。总之,研究射影几何学的数学家们不关心长度和角度,长度和角度不是射影几何学里的几何性质。

其他几何学可以用别的一组运动来定义。

数学家们花费了很长时间才把他们的想象力从单一的欧几里得几何学扩展到现在种类繁多的、异彩纷呈的几何学。他们几乎花费了同样长的时间来认识什么是几何性质:几何性质是在一类运动下保持不变的性质。这种描述令人感到奇怪,几何学看起来好像是静止的,每种几何学却通过一类运动来定义。

在这一卷书里,我们追溯了几何学的历史,那是想象力、创造力和努力工作交织在一起的故事。我们从中可以看到以下内容:一些思想和一些问题如何从一代数学家流传到下一代数学家,每一代数学家如何用新的观点和新的方法解决这些问题,以及每一代数学家如何扩展具有原创性的思想和重新解释起初看起来相对简单的问题。简单和复杂,具体和抽象,这些对立的描述刻画了几何学。几何学这门学科的历史至少和文明一样古老。

几何学仍处在不断发展和变化之中。数学家对形和空间的理