全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计
学习指导

苏金梅 王万雄 吕 雄 主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计学习指导

苏金梅　王万雄　吕　雄　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导／苏金梅，王万雄，吕雄主编．—北京：中国农业出版社，2008.1
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978－7－109－11997－0

Ⅰ．概…　Ⅱ．①苏…②王…③吕…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 199923 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
责任编辑　龙永志

中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2008 年 1 月第 1 版　　2008 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：13
字数：227 千字
定价：19.00 元

内 容 提 要

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材．内容分为两大部分：概率论和数理统计．前五章为概率论部分，主要内容有随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征和大数定律及中心极限定理；后五章为数理统计部分，内容包括数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析．本书可作为高等农林院校概率论与数理统计课程辅助教材，也可作为科技人员参考书．

编 写 人 员

主　编　苏金梅　王万雄　吕　雄

副主编　李　炜

编　者（按姓氏笔画为序）

王万雄　王静泉　吕　雄　刘海军

李　炜　苏金梅　张　锋　陈传勇

前　　言

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材．全书共十章，内容分为两大部分，前五章为概率论部分，主要内容有随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征和大数定律与中心极限定理；后五章为数理统计部分，内容包括数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析．

本书是中国农业出版社出版、苏金梅、德娜主编的全国高等农林院校“十一五”规划教材《概率论与数理统计》的配套教材．书中每一章都帮助读者理清要点内容；对本章常见的习题类型作归纳和分析；提供自测题帮助读者更进一步了解自己掌握本章内容的情况；同时还给出了自测题和习题解答．

编写本教材是为了从各种角度给出示范，告诉初学读者应该如何思考、分析和表达，快速地习惯概率论与数理统计独有的思维方式，使读者能更好地抓住问题的要害，揭开随机世界的秘密．

参加本书编写的是在教学一线、具有多年教学经验的部分农林院校的教师，可以说本书是编者多年教学实践的结晶．其中第一章由内蒙古农业大学苏金梅编写，第二章由仲恺农业技术学院陈传勇编写，第三章由仲恺农业技术学院李炜编写，第四章由甘肃农业大学王万雄编写，第五章和第七章由甘肃农业大学张锋编写，第六章和第十章由内蒙古农业大学刘海军编写，第八章由内蒙古农业大学

吕雄编写，第十章由内蒙古农业大学王静泉编写．全书的统稿由苏金梅完成．

限于编者水平，错谬之处在所难免，恳请同行和广大读者批评指正．

编　者

2007年10月

目　　录

第一章 随机事件及其概率

第一节 教学目的与要求

1. 理解随机现象、随机试验、样本空间、随机事件、事件独立性的概念.

2. 了解概率、条件概率的定义；会计算古典概型及简单几何概型的概率.

3. 掌握事件之间的关系与运算；掌握概率的加法公式、乘法公式、概率的性质.

4. 会应用全概率公式和贝叶斯公式.

5. 掌握应用事件独立性进行概率计算的方法，理解独立重复试验的概念，会计算有关事件的概率.

第二节 本章概要

一、基本概念

1. 随机现象 在一定的条件下，可能的结果不止一个，且预先不能确定将要出现什么结果，就个别试验或观察而言，其结果呈现不确定性，随机遇而定的现象称为随机现象.

2. 随机试验 对随机现象的可重复的一次观察或试验称为随机试验.

3. 样本点 随机试验的最基本结果称为样本点.

4. 样本空间 随机试验的所有样本点构成的集合称为样本空间.

5. 随机事件 在随机试验中可能出现也可能不出现的一类结果称为随机事件. 随机事件是样本空间的子集. 特别地，样本空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 分别称为必然事件和不可能事件.

6. 概率 用来度量随机事件 A 发生的可能性大小的数值 $P(A)$，如果满足非负性、规范性、可列可加性，则称其为事件 A 的概率.

7. 事件的独立性

(1) 两个事件 A 与 B 相互独立当且仅当 $P(AB)=P(A)P(B)$成立.

(2) 三个事件 A_1, A_2, A_3 相互独立当且仅当

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),$$
$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),$$
$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\text{ 同时成立}.$$

(3) n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 相互独立当且仅当其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件都相互独立，即同时成立以下 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$ 个概率等式

$$P(A_{j1}A_{j2}\cdots A_{jk})=P(A_{j1})P(A_{j2})\cdots P(A_{jk})\quad(1\leqslant j_1\leqslant j_2<\cdots<j_k\leqslant n).$$

8. 试验的独立性 如果试验 E_1 的任一事件与试验 E_2 的任一事件都相互独立，则称这两个试验相互独立.

9. 贝努里试验 只有两个基本结果（成功、失败）的试验称为贝努里试验.

10. n 重贝努里试验 n 次独立重复的贝努里试验称为 n 重贝努里试验.

在一次贝努里试验中，成功的概率记为 $p(0<p<1)$，即 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p$，在 n 重贝努里试验中成功出现 k 次的事件记为 $B_{n,k}$，则其概率为 $P(B_{n,k})=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$.

11. 条件概率 事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad(P(B)>0).$$

二、重要公式

1. 古典概型的概率 $P(A)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{A\text{ 中所含样本点个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点总数}}$.

2. 概率的性质

(1) 对任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2) 对任一事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(3) $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$.

(4) 若 A_1, A_2, …, A_n, …是互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i);\ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$$

(5) 对任意两个事件 A 和 B，若 $A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B);\ P(A)\geqslant P(B).$$

(6) 对任意两个事件 A 和 B，有加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

从而 $$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B).$$

3. 乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)\quad (P(A)>0)$

$=P(B)P(A\mid B)\quad (P(B)>0).$

三个事件的乘法公式 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2).$

n 个事件的乘法公式 $P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$，其中要求 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$.

4. 事件 A 与 B 独立 ($P(B)>0$) 的充要条件是 $P(A\mid B)=P(A)$　当 A_1，A_2，…，A_n 相互独立时，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n);$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).$$

5. 全概率公式　设 B_1，B_2，…，B_n 是样本空间 Ω 的一个分割，则对 Ω 中任一事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

6. 贝叶斯公式　设 B_1，B_2，…，B_n 是样本空间 Ω 的一个分割，且各概率 $P(B_1)$，$P(B_2)$，…，$P(B_n)$皆已知且为正，A 为 Ω 中任一事件，诸条件概率 $P(A\mid B_1)$，$P(A\mid B_2)$，…，$P(A\mid B_n)$也已知，则在 $P(A)>0$ 的条件下，有

$$P(B_k\mid A)=\frac{P(A\mid B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)},\ k=1,2,\cdots,n.$$

第三节　题型分析和典型例题

题型Ⅰ　写出随机试验的样本空间及事件 A 的样本点

解题思路　要明确写出样本空间，应该充分理解试验的含义；要写出事件所含的样本点，应读懂试验结果．

需注意的问题　对于同一个随机试验来讲，所观察的内容不同，样本点及样本空间可能不同，因此，试验的样本点和样本空间要根据所观察的内容而确定.

例 1　写出下列随机试验的样本空间：

(1) 抛三次硬币；

(2) 掷三次骰子；

(3) 连续抛一枚硬币，直到出现正面为止；

(4) 在某十字路口每小时通过的机动车辆数;

(5) 在一批灯炮中任意抽取一个,测其寿命.

解 (1) 记"1"为一次抛掷中出现正面,"0"为一次抛掷中出现反面,则

$$\Omega=\{(1,1,1),(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

(2) $\Omega=\{(x,\ y,\ z)\mid x,\ y,\ z=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

(3) 与 (1) 的记法一样,则

$$\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots\}.$$

(4) $\Omega=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$.

(5) $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

例 2 设袋中装有 5 颗球,其中三颗白球,标号为 1,2,3,两颗红球,标号为 4,5,今从袋中随机取出两颗球,

(1) 观察取出两球的颜色;

(2) 观察取出两球的号码.

试写出 (1),(2) 所对应的样本空间.

解 此问题的试验是从 5 颗球中任取两颗,但所关心的内容不同,所对应的样本空间也不同.

(1) 颜色有两种:白和红.

(a) 取出的两球放在一堆,可能的结果有三种:两颗白球;两颗红球;一白一红.所以样本空间

$$\Omega=\{\text{两白},\ \text{两红},\ \text{一白一红}\}.$$

(b) 若考虑取出的次序,则 $\Omega=\{(\text{白},\ \text{白}),\ (\text{红},\ \text{红}),\ (\text{白},\ \text{红}),\ (\text{红},\ \text{白})\}$.

(2) 号码有 5 种,1,2,3,4,5,所以取出的两球:

(a) 若不考虑顺序,则样本空间

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}.$$

(b) 若考虑顺序,样本空间

$$\Omega=\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),(2,3),(3,2),\\(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4)\}.$$

题型Ⅱ 利用事件的运算表示事件

解题思路 首先要了解事件运算的含义,其次常用维恩图来分析事件间的关系,并结合事件所满足的运算规律,将一些复合事件分解成简单事件的运算,以便今后利用概率的性质进行事件概率的计算.

需注意的问题 利用事件的运算表示某一事件时,其表示法不惟一,只要

分解成的事件与给定事件等价即可．当然在今后概率的计算中，可以根据已知条件结合概率的性质有目的地进行分解．

例 3 叙述下列事件的对立事件，并将其都表示为简单事件的运算：

(1) $A=$“掷两枚硬币，皆为正面”；

(2) $B=$“射击三次，皆命中目标”；

(3) $C=$“加工四个零件，至少有一个正品”．

解 (1) 设 A_i 表示事件“掷两枚硬币，第 i 次出现正面”，$i=1,2$，则 $A=A_1A_2$，

A 的对立事件 $\overline{A}=$“掷两枚硬币，至少有一枚为反面”，则 $\overline{A}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2$.

(2) 设 B_i 表示事件“射击三次，第 i 次命中目标”，$i=1,2,3$，则 $B=B_1B_2B_3$，

B 的对立事件 $\overline{B}=$“射击三次，至少有一次没有命中目标”，则 $\overline{B}=\overline{B}_1\cup\overline{B}_2\cup\overline{B}_3$.

(3) 设 C_i 表示事件“加工四个零件，第 i 个是正品”，$i=1,2,3,4$，则 $C=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$，

C 的对立事件 $\overline{C}=$“加工四个零件，皆为次品”，则 $\overline{C}=\overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3\overline{C}_4$.

例 4 设 A、B 是任意两个事件，化简下列各式：

(1) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$；

(2) $AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}-\overline{A}\overline{B}$.

解 (1) 由事件运算的分配律

$$\because\quad (A\cup B)(A\cup\overline{B})=AA\cup BA\cup A\overline{B}\cup B\overline{B},$$

再由结合律、交换律，上式 $=A\cup(BA\cup\overline{B}A)\cup\varnothing=A\cup A\cup\varnothing=A$，

同理 $(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{A}$.

$\therefore$ 由结合律 $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}=\varnothing$.

(2) $\because$ $AB\cup\overline{A}B=B$，$A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}=\overline{B}$，$\overline{A}\overline{B}=\overline{A\cup B}$，

$\therefore$ 由结合律

$$\begin{aligned}&AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}-\overline{A}\overline{B}\\&=(AB\cup\overline{A}B)\cup(A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B})-\overline{A}\overline{B}=B\cup\overline{B}-\overline{A}\overline{B}\\&=\Omega-\overline{A\cup B}=A\cup B.\end{aligned}$$

题型Ⅲ 利用古典概型、几何概型概率计算公式计算事件的概率

解题思路 (1) 若所涉及的随机试验 E 只有有限个基本结果（样本点），且各个基本事件都是等可能事件，则此试验属古典概型，其计算公式为：

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含基本事件数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含基本事件总数}}.$$

在 Ω 所含的样本点数很少时，可采用前面写出样本空间的办法，但当样本空间所含的样本点数很多时，一般要用计数方法，即排列、组合．

（2）若所涉及试验的可能结果有无穷多个，样本空间构成一个区域，并且每一个样本点的出现具有等可能性，即任一点落在测度相同的子区域的可能性都一样，则此试验属几何概型，事件概率的计算公式为

$$P(A)=\frac{\text{构成事件 }A\text{ 的子区域的测度}}{\text{样本空间的测度}}.$$

所以在几何概型下计算事件 A 的概率时，关键是要确定样本空间的测度及事件 A 所在区域的测度.

需注意的问题 ①对古典概型，当考虑的角度不同，同一试验下样本空间可以不同，但是在计算某事件 A 的概率时，计算样本点总数和事件 A 所含样本点个数时，必须在同一确定的样本空间中考虑.②在几何概型的概率计算中，构造样本空间是一个较灵活，同时也是较难的关键问题，合理、有效地构造符合试验的样本空间所对应的区域，可以使概率计算简单化.

例 5 将 15 名新生（其中有 3 名优秀生）随机地分配到三个班级中，其中一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名，求：

（1）每一个班级各分配到一名优秀生的概率；

（2）3 名优秀生被分配到同一个班的概率.

解 这是一个古典概型.先求样本空间所含样本点数

将 15 名新生分别分配到一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名的分法共有

$$n=C_{15}^{4}C_{11}^{5}C_{6}^{6}=\frac{15!}{4!5!6!}\text{ 种}.$$

（1）将 3 名优秀生分配给三个班各一名，其分法共有

$$C_{3}^{1}C_{2}^{1}C_{1}^{1}=3!\text{ 种}.$$

再将剩下的 12 名学生分配到一班 3 名，二班 4 名，三班 5 名，其分法共有

$$C_{12}^{3}C_{9}^{4}C_{5}^{5}=\frac{12!}{3!\ 4!\ 5!}\text{种}.$$

设事件 A= “将其中有 3 名优秀生的 15 名学生分配到一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名，且各班有一名优秀生”，则根据乘法原理

$$\text{事件 }A\text{ 所含样本点数为 }k=3!\times\frac{12!}{3!\ 4!\ 5!}=\frac{12!}{4!\ 5!}.$$

从而根据古典概型计算公式

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\dfrac{12!}{4!\ 5!}}{\dfrac{15!}{4!\ 5!\ 6!}}=\frac{12!\ 6!}{15!}=\frac{24}{91}=0.263\ 7.$$

(2) 3 名优秀生分配到同一个班，都被分配到三个班的任一个班，即完成一件事情有三种可能.

(a) 若都分到一班，则一班分配 4 名新生，二班分 5 名新生，三班分 6 名新生的分法共有

$$k_1=C_3^3C_{12}^1C_{11}^5C_6^6=\frac{12!}{5!\ 6!}\text{种}.$$

(b) 若都分配到二班，则一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名，新生的分配方法共有

$$k_2=C_3^3C_{12}^4C_8^2C_6^6=\frac{12!}{2!\ 4!\ 6!}\text{种}.$$

(c) 若都分配到三班，则一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名新生的分配方法共有

$$k_3=C_3^3C_{12}^4C_8^5C_3^3=\frac{12!}{3!\ 4!\ 5!}\text{种}.$$

设事件 $B=$ “将 15 名学生分配到一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名，且其中的 3 名优秀生都分配到同一班”，则由加法原理，事件 B 所含样本点数为

$$k=k_1+k_2+k_3=\frac{12!}{5!\ 6!}+\frac{12!}{2!\ 4!\ 6!}+\frac{12!}{3!\ 4!\ 5!}=\frac{12!\ \times12\times4\times3\times17}{2!\ 3!\ 4!\ 5!\ 6!}.$$

由古典概型概率计算公式

$$P(B)=\frac{k}{n}=\frac{12!\ \times12\times4\times3\times17}{2!\ 3!\ 4!\ 5!\ 6!}\cdot\frac{4!\ 5!\ 6!}{15!}=\frac{17\times2}{35\times13}=0.074\,73.$$

例 6 若设一个人的生日等可能地分布在 12 个月中，求：

(1) 6 个人的生日恰好集中在一月和二月内的概率；

(2) 6 个人的生日都在两个月内的概率.

解 这是一个古典概型. 每个人的生日都等可能地分布在 12 个月中，这相当于将 6 颗不同的球随机地投入 12 个不同盒子中，所以样本空间总数 $n=12^6$.

(1) 6 个人的生日恰好集中在一月和二月内，这相当于选定了 2 个盒子，6 颗球落入指定的两个盒子中，共有 2^6 种，但这里包含了 6 个人的生日都集中在 1 月或者集中在 2 月的情况，这两种都不应包含在所求事件中，若设事件 $A=$ “6 个人的生日恰好集中在一月和二月”，则

$$A\text{ 所包含的样本点数 }k_1=2^6-2,$$

从而由古典概型概率的计算公式

$$P(A)=\frac{k_1}{n}=\frac{2^6-2}{12^6}=0.207\,6\times10^{-4}.$$