GAODENGSHUXUEXUEXIZHIDAO

21

面向21世纪普通高等教育规划教材学习指导

高等数学学习指导

（经管类）

主 编 黄玉笙　副主编 王昆仑 王宜洁 马合保　主 审 林良裕

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪普通高等教育规划教材学习指导

高等数学学习指导

（经管类）

主　编　黄玉笙

副主编　王昆仑　王宜洁　马合保

主　审　林良裕

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是《面向21世纪普通高等教育规划教材——高等数学》(经管类)的配套学习指导书，按该教材的章节体系，系统地给出学习指导内容.全书由函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数和常微分方程共10章内容组成，每章包括本章内容精要、知识脉络图、疑难解答、例题精选以及自我检测题等内容，书末附有模拟试卷及自我检测题的参考答案.

本书在归纳内容精要和疑难解答的基础上，按照分组织设计及由易到难的原则，选取了许多典型例题为读者诠释概念，使读者可以更好地理解教学内容，掌握各章节知识点并熟悉解题技巧，为后续课程的学习打下良好的基础.

本书可以帮助学生强化基础知识和提高解题能力，适合普通高等院校经管类本科各专业的学生学习及考研复习参考，可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/黄玉笙主编.—上海：同济大学出版社，2007.12

面向21世纪普通高等教育规划教材学习指导.经管类

ISBN 978-7-5608-3534-1

Ⅰ.高… Ⅱ.黄… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第166565号

面向21世纪普通高等教育规划教材学习指导

高等数学学习指导(经管类)

主　编　黄玉笙

副主编　王昆仑　王宜洁　马合保

主　审　林良裕

责任编辑　曹　建　责任校对　谢惠云　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021－65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　14.75

印　数　1—4100

字　数　295000

版　次　2007年12月第1版　2007年12月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-3534-1/O・310

定　价　22.00元

新世纪高级应用型人才培养系列
面向 21 世纪普通高等教育规划教材

前　言

本书是根据《面向21世纪普通高等教育规划教材——高等数学》(经管类)上、下册配套编写的学习指导书.高等数学课程是高等院校经济管理类专业的核心课程之一,是一门非常重要的基础课.学习好这门课程,可以帮助学生为今后学习大学专业课程所必需的数学知识打下良好的基础,同时对学生利用数学工具来研究社会经济现象和复习报考研究生都是大有裨益的.

本书按照规划教材中的内容体系,分为函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理,不定积分,定积分及其应用,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数和常微分方程共10章.每一章中又分内容精要、知识脉络图、疑难解答、例题精选和自我检测题5个部分.

高等数学是一门体系完整,逻辑性强,推理严密的课程.对于大多数经管类学生,由于高等数学课程所具有的抽象性和逻辑性,往往会觉得该课程抽象而枯燥,内容难以理解.为了帮助学生掌握这门课程,我们组织了几位长期在教学第一线上从事高等数学教学的教师编写了这部学习指导.疑难解答和例题精选是本书的主要内容和特色,详细解答了学生在学习高等数学中经常碰到的知识难点和普遍存在的问题.在例题精选中,我们广泛选取了一些例题,根据内容精要的知识脉络,按照分组织设计,从易到难的原则,点明每一道例题所涉及的基本概念,主要解法及运算技巧,并选取一些典型的经济应用例题.希望读者通过这些例题,能在较短时间内,较好地掌握各章知识点和基本概念,提高解题能力和分析问题的能力.考虑到许多高校对经济管理类专业招生文理兼收的特点,我们在例题分析时,适当选取了一些难题和研究生入学考试试题.在自我检测题中,我们按经济管理类高等数学教学大纲的要求,精选了一些与基本概念有关的填空题、单选题和提高解题能力的练习题,并附有自测题答案,供读者在每章小结时作自我检测.

参加本书编写的人员有翁忠诚(第1章)、兰友发(第2章)、陆汾(第3章)、王昆仑(第4章)、王宜洁(第5,6,7章)、陈永娟(第8章)和黄玉笙(第9,10章).最后由黄玉笙统稿、定稿.

本书由林良裕教授主审.林良裕教授是我国著名的多复变函数论专家,在高等数学教学领域有着丰富的经验.林良裕教授仔细审阅了书稿,提出了许多宝贵的意见和建议,在此我们表示诚挚的谢意!

希望读者通过本书的学习，能加深对高等数学的理解并能对高等数学产生兴趣．由于编者水平有限，书中必有不少错误和不足之处，恳请读者批评指正．

黄玉笙

2007年11月

目　次

第 1 章　函数、极限与连续

1.1　内容精要

1.1.1　函数的概念及性质

1. 函数的定义

设 D 是一个给定的非空数集，x 和 y 是两变量，若存在对应关系 f，使得当变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照对应关系 f，总会取到唯一确定的数值和 x 对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记为

$$f: D \to R.$$

此时，x 称为自变量，y 的值由它所依赖的变量 x 所确定，故称 y 为因变量. 数 x 对应的数 y 称为函数 f 在 x 处的函数值，记为 $y = f(x)$. 数集 D 称为函数 f 的定义域，函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 f 的值域，用 $f(D)$ 或 R_f 表示. 即

$$R_f = f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

2. 函数的性质

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$. 如果存在数 K_1，使对任一 $x \in X$，有 $f(x) \leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 图形特点是 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = K_1$ 的下方.

如果存在数 K_2，使对任一 $x \in X$，有 $f(x) \geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 图形特点是，函数 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = K_2$ 的上方.

如果存在正数 M，使对任一 $x \in X$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 图形特点是，函数 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间.

函数 $f(x)$ 无界，就是说对任何 M，总存在 $x_1 \in X$，使 $|f(x)| > M$.

(2) 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的. 图形特点是沿 x 轴正向逐渐上升.

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$，则 $-x \in D$). 如果对于任一 $x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于任一 $x \in D$，有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

对于偶函数，若点 $A(x, f(x))$ 在图形上，由于 $f(-x) = f(x)$，则 A 点关于 y 轴的对称点 $A'(-x, f(x))$ 也在图形上，故偶函数的图形关于 y 轴对称.

对于奇函数，若点 $A(x, f(x))$ 在图形上，由于 $f(-x) = -f(x)$，则 A 点关于原点的对称点 $A'(-x, -f(x))$ 也在图形上，故奇函数的图形关于原点对称.

(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x \in D$ 有 $f(x+l) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期. 满足这个等式的最小正数 l 称为函数的最小正周期，通常周期函数的周期指的是最小正周期.

3. 反函数

定义 设函数 $y = f(x)$，$x \in D$，$y \in R_f$，如果对每一个 $y \in R_f$，在 D 中都存在唯一的 x 与之对应，其对应关系记为 f^{-1}，则确定了一个函数 $x = f^{-1}(y)$，$y \in R_f$，它称为 $y = f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数.

由于我们习惯用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以通常将函数 $x = f^{-1}(y)$ 中的自变量 y 改写成 x，因变量 x 改写成 y，这样函数 $y = f(x)$ 的反函数就成为 $y = f^{-1}(x)$. 它的定义域为 f 的值域 R_f，值域为 f 的定义域 D，对应关系 f^{-1} 完全由 f 确定，此时 f 必为一一对应的函数关系.

4. 复合函数

对任意的 $x \in D$，由于 $g(x) \in D_1$，故存在唯一的 $y = f[g(x)]$ 与 $g(x)$ 对应，从而有如下的对应关系：

$$x \to g(x) \to f[g(x)], \quad 或\ x \to u \to y,$$

即对 x,通过 u,有唯一的 $y = f[g(x)]$ 与之对应,于是就建立了以 x 为自变量,y 为因变量的新函数,因为对应的次序是先 g 后 f,故记 x 和 y 的对应关系为 $f \circ g$,这样新函数为

$$y = (f \circ g)(x) = f[g(x)], \quad x \in D.$$

我们称新函数是由函数 g 和 f 构成的复合函数,u 为中间变量.

5. 初等函数

初等函数是由基本初等函数构成的. 下列(1) ~ (5) 的函数称为基本初等函数.

(1) 幂函数. $y = x^{\mu}$ ($\mu \in \mathbf{R}$ 是常数).

(2) 指数函数. $y = a^{x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

(3) 对数函数. $y = \log_{a}x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ,a 称为对数的底.

(4) 三角函数. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$.

(5) 反三角函数. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

(6) 初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

6. 有关经济问题的函数

在经济学中需要对成本、价格、收益等经济量之间的关系进行分析,以下是一些经济学中常用的函数.

(1) 需求函数. 消费者购买某种商品的数量,也就是这种商品的需求量,取决于商品的价格、消费者的收入、相关商品的价格、个人的兴趣爱好以及时间等因素,假定除价格外,其他因素不变,则需求 D 为价格 P 的函数,记为 $D = f(P)$,它可以表为线性函数 $D = - aP + b$,即商品价格上涨,则需求量降低,需求是价格的单调减少的函数.

(2) 供求函数. 某种商品的供应量取决于商品的价格、消费者的收入、相关商品的价格、生产成本以及自然条件等因素. 假定其他条件不变,研究价格对供应量的影响,则供应量 S 也是价格 P 的函数,可表为 $S = aP - b$,即商品价格上涨,则供应量增加,供应量是价格的单调增加函数.

当需求量 D 与供应量 S 相等时,称供求关系均衡,此时的价格为均衡价格,D,S 称为均衡交易量.

1.1.2 极　限

1. 数列的极限定义(ε-N)

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. 函数的极限定义(ε-δ)

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，$\ni 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，$\ni |x| > X \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

3. 左、右极限

左极限：$f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$；

右极限：$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

特别地　　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

4. 极限的性质

(1) 收敛数列的有界性. 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

(2) 极限的唯一性. 数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

(3) 函数极限的局部保号性

① 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，而 $A > 0$（或 $A < 0$），那么存在常数 $\delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

② 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$)，而且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，那么 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

(4) 保序性. 若 $f(x) \geqslant g(x)$，则 $\lim f(x) \geqslant \lim g(x)$.

(5) 数列极限与函数极限间的关系定理

海涅定理. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是对任意数列$\{x_n\}(x_n \neq x_0)$，当 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 时，有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

5. 极限运算

(1) 数列极限运算

设数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都收敛，则它们的和、差、积、商(分母的极限不为零)的

数列也收敛.即设

$$\lim_{n\to\infty}x_n = A,\quad \lim_{n\to\infty}y_n = B,$$

那么

① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$;

② $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$;

③ 当 $y_n \neq 0(n = 1,2,\cdots)$ 且 $B \neq 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$.

(2) 函数极限运算

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x) = B$,那么

① $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0}f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0}g(x) = A \pm B$;

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x) = A\cdot B$.

推论 1 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,而 c 为常数,则$\lim\limits_{x\to x_0}[c\,f(x)] = c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

推论 2 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,而 n 是正整数,则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n$.

上述情形可推广到有限个函数的和、差、积的情形(其中对 $x\to\infty$ 的情形也有相应的结果).

③ 当 $B \neq 0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

(3) 复合函数极限运算

若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = a$, $\lim\limits_{u\to a}f(u) = A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u\to a}f(u) = A$.

6. 极限存在判别法

(1) 准则 1(夹逼).如果数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

① $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n(n = 1,2,3,\cdots)$,

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n = a$,

那么数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.

注 这一准则可以推广到函数极限情形.

(2) 准则 2.单调有界数列必有极限.

(3) 函数极限存在的充分必要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = A \Longleftrightarrow f(x_0+0) = f(x_0-0) = A.$$

(4) 无穷小量与极限间的关系定理

$$\lim f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha,\text{其中 } \alpha \text{ 为无穷小量}.$$

7. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1 \Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta\to\infty}\Delta\sin\dfrac{1}{\Delta}=1.$

(2) $\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=\mathrm{e} \Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\Delta}\right)^{\Delta}=\mathrm{e}.$

1.1.3 无穷小量与无穷大量

1. 定　义

定义 1　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$），则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量. 简称无穷小.

定义 2　如果一个函数在自变量变化过程中函数值不是趋于某个确定的常数，而是它的绝对值无限增大，则称函数是这个变化过程的无穷大量，简称无穷大. 并记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty \quad (\text{或} \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty).$$

2. 无穷小的性质

性质 1　有限个无穷小的和仍是无穷小.

性质 2　有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 3　有界函数和无穷小的乘积是无穷小.

性质 4　在自变量的同一变化过程中，(1) 若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；(2) 若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

3. 无穷小的比较

定义　设 α,β 是同一过程的两个无穷小量，且 $\alpha\neq 0$，$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限.

(1) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$（即 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$），则称 β 是比 α 较高阶的无穷小（或称 α 是比 β 低阶的无穷小），记为 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$,则称$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小.

特别地,若$c = 1$,则称β与α是等价的无穷小,记为$\alpha \sim \beta$.

1.1.4 求极限问题的方法总结

(1) 用极限定义证明极限.

(2) 初等函数在定义域内求极限,$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(3) 利用无穷小与无穷大的互倒关系.

例如,求$\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{2+x}}{x-4}$. 因$\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{2+x}} = 0$,所以$\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{2+x}}{x-4} = \infty$.

(4) 对于有理方式函数,当$x \to \infty$时,用x高次项除以分子分母.

例如,求$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(2x-1)^6 (3x+2)^{10}}{(2x-5)^{16}}$.

则　原式$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2^6 \times 3^{10}}{2^{16}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$.

说明:这种类型的题,其极限值等于最高阶的系数,如

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

(5) 利用等价无穷小的代换或等价无穷小的性质.

若在同一极限的过程中,$\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x) \Longleftrightarrow \lim \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1$, $\lim \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1$, 则$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

熟记以下等价式,对以后解题大有帮助:

当$x \to 0$时,有

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \tan x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

(6) 分解因式,约去使分母极限为零的公因式.

例如,$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3$.

(7) 利用数列的求和公式求极限.

例如,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}}$.

则　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1-\dfrac{1}{4^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{4}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{4\left(1-\dfrac{1}{4^{n+1}}\right)}=\dfrac{3}{2}$.

(8) 利用两个重要极限.

(9) 夹逼同极限法则求极限.

(10) 通过恒等变化求极限.

例如,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

则　因为 $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$,

$$\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2},$$

$$\cdots$$

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}}=2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}.$$

所以　$\sin x=2^n\sin\dfrac{x}{2^n}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

因此,当 $x\neq 0$ 时,则有

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}.$$

故　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$.

以后还将学到

(11) 利用洛必达法则求极限.

(12) 泰勒展开式求极限.

(13) 利用微分(积分)中值定理求极限.

(14) 利用定积分定义求极限.

(15) 利用级数收敛的必要条件求极限.

1.1.5 函数的连续性

1. 函数连续的三个等价定义

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$, 当 $|\Delta x|<\delta$ 时,有 $|\Delta y|=|f(x_0+\Delta x)-f(x)|<\varepsilon$.

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

2. 间断点

定义 使函数不连续的点叫做间断点.

间断点的分类 (1) 若左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$ 都存在,那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.第一类间断点又分两种情形:

(2) 若 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$,则称 x_0 为跳跃间断点.

(3) 若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$,这时 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但 $f(x_0)$ 没有定义或有定义而不满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则 x_0 为可去间断点.这是因为若 $f(x_0)$ 没有定义,则可以在 $x=x_0$ 处补充定义,令 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;若 $f(x_0)$ 有定义,则修改 $f(x)$ 在 x_0 处的定义使其满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.上述这两种做法都可使 x_0 成为连续点.

(4) 若左极限 $f(x_0-0)$ 及右极限 $f(x_0+0)$ 至少有一个不存在,那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

3. 连续函数的运算

连续函数的和、差、积、商(分母不为零)均为连续函数;连续函数的反函数、复合函数仍为连续函数.一切初等函数在定义域内都是连续函数.

4. 闭区间上的连续函数的性质

(1) 最大值最小值定理.在闭区间上连续的函数在该区间一定有最大值及最小值.

(2) 有界性定理.在闭区间上连续函数一定在该区间上有界.