大气中尺度运动的动力学基础及预报方法

高守亭　著

气象出版社

大气中尺度运动的动力学基础及预报方法

高守亭　著

气象出版社

内 容 简 介

本书的内容主要包括：第 1 章中的大气普适基本动力参数及其物理意义；第 2 章中的描述中尺度运动的基本方程组，以及由基本方程组变形而来的中尺度涡度、散度、位涡及位涡物质方程，流线涡方程和螺旋度方程；第 3 章中的基于风场分解基础上的变形场方程和广义锋生理论；第 4 章中的非均匀饱和大气中的广义位温及其广义位涡理论；第 5 章中的重力波的控制方程、重力波特性、重力波极化理论、波作用量方程以及重力波的重建等；第 6 章中的中尺度稳定性方法简介及涡层不稳定分析；第 7 章中的标量场理论及其动力预报方法；第 8 章中的矢量场理论，特别是波作用守恒理论及其动力预报方法。

本书可作为各大专院校、科研院所的教师、科研人员、研究生和高年级本科生的参考书，也可作为研究生的教材，也可供有一定大气动力基础的台站科研预报人员学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

大气中尺度运动的动力学基础及预报方法/高守亭著.
北京：气象出版社，2007.4
ISBN 978-7-5029-4302-8

Ⅰ. 大… Ⅱ. 高… Ⅲ. ①天气尺度-大气动力学②天气尺度-大气运动学-天气预报 Ⅳ. P433 P45

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 042152 号

出版者：气象出版社
地　址：北京市海淀区中关村南大街 46 号
网　址：http：//cmp.cma.gov.cn
邮　编：100081
E-mail：qxcbs@263.net
电　话：总编室：010-68407112
发行部：010-62175925

责任编辑：俞卫平
终　审：黄润恒
封面设计：王　伟
责任校对：程铁柱
印刷者：北京京科印刷有限公司
发行者：气象出版社
开　本：787mm×960mm　1/16　**印　张**：14　**字　数**：300 千字
版　次：2007 年 4 月第一版　2007 年 4 月第一次印刷
印　数：1～2000
定　价：40.00 元

序

中小尺度系统是造成局地灾害性天气的关键，随着社会经济和大气探测技术的发展，其形成和演变过程已逐渐为人们所重视。为了更好地对这些系统开展研究，我们需要对中尺度动力学的最新进展有充分地了解，但目前这方面的专著相对来说还是很少。因此，《大气中尺度运动的动力学基础及预报方法》一书的出版对从事中尺度动力学研究的气象工作者而言是非常及时和重要的。

高守亭研究员长期以来从事中尺度动力学的研究和教学工作，在湿空气动力学、中尺度平衡动力学以及中尺度临近预报动力方法等领域均有深厚的造诣，研究成果卓著。本书即为作者在中尺度动力学方面三十余年教学和科研成果的总结，是一部研究性专著。正因为此，该书的内容充分体现了学术上的创新性，如其中第 4 章的广义湿位涡、非均匀饱和湿空气的动力方程、第 7 和第 8 章的水汽位涡和对流涡度矢量等理论都是作者在中尺度动力学领域中取得的最新研究成果，是中尺度动力学过程尤其是湿大气过程的研究中的新理论和新方法。注重理论知识与实际预报的紧密结合是该书的另外一个重要特点，这不仅体现在第 7 和第 8 章专门动力预报方法的介绍上，而且在每一章中对基本理论阐述后，作者都对相关理论的实际应用问题进行了大量介绍，这不仅使读者可以掌握基本理论，而且对如何应用理论解决实际问题也有很好的认识，从而循循善诱地把读者引导到理论联系实际。另外，虽然是一部研究性专著，但该书的内容保持了完整性和一致性：从中尺度过程基本特征的分析，到中尺度运动方程的建立，再到中尺度动力学理论的发展，最后回归到实际的预报问题，整部书的内容循序渐进，由浅入深，基本涵盖了中尺度动力学中的主要理论和方法，这非常有利于读者顺利掌握中尺度动力学的基本理论和最新进展及其应用。

总体而言，这本专著创新性显著、重点明确、特色鲜明、内容丰富，是一本不可多得的可读性强的学术著作，我相信该书的出版将吸引更多学者进行中尺度动力学的研究，从而推动我国中尺度动力学研究的进一步发展。

伍荣生

2006 年 11 月 2 日于南京

前 言

《大气中尺度运动的动力学基础及预报方法》是一部学术专著，集中反映了作者三十余年来在教学与科研工作中有关中尺度动力学理论和临近预报方法上的研究成果，也是作者数十年来有关中尺度理论追求和探索的概述。自20世纪90年代末中国科学院知识创新工程开展以来到2006年上半年，我一直担任中国科学院大气物理研究所中小尺度天气与灾害研究部的主任，这给了我压力又给了我动力，加之长期的科研及在研究生院教学工作的需求，使我深深地意识到有一种责任和义务，尽可能写出一本反映当代大气中尺度运动的动力基础及预报方法的著作。本书的写作得到了老一辈科学家叶笃正、陶诗言、曾庆存、周秀骥的关心，特别感谢巢纪平和伍荣生先生在百忙之中审阅了该书的初稿，并提出很多宝贵而又具体的指导性意见。黄荣辉、吴国雄、李崇银等先生的相关动力学理论研究成果，也给予了我不少启发。在此一并表示衷心的感谢。

本书共分8章。第1章论述了大气基本普适动力参数及其意义，着重讨论了维赛拉频率和理查森数在大气处于不同的干湿状况下的具体形式及应用。第2章从正压和斜压的基本方程组出发，结合中尺度的特征得到中尺度动力学基本方程组，在风场分解的基础上推导了中尺度涡度方程、散度方程；还推导了中尺度位涡方程、位涡物质方程、流线涡方程和螺旋度方程，并分析了它们在不同的大气层结以及干湿状况下的简化形式。第3章主要介绍了变形场方程、基于总变形和非均匀饱和广义湿位温基础上的广义锋生理论。第4章是针对实际大气的非均匀饱和特性，提出了非均匀饱和湿大气中广义湿位涡理论，为非均匀饱和湿空气动力学的研究奠定基础。基于大气重力波在中尺度天气中的重要作用，第5章论述了重力波的控制方程、三维惯性重力波和对称惯性重力波的波动特征、极化性质和波作用量方程，并简要地介绍了如何从资料中识别重力波的小波－交叉谱分析方法。第6章通过对稳定性的分类和一些基本分析方法的简要介绍，论述了中尺度的静力不稳定、对称不稳定、切变不稳定等几类常见的不稳定分析方法。最后两章集中反映了作者在临近预报动力方法领域的研究成果：第7章是基于标量场理论的动力预报方法，着眼于研究涡度、散度及变形和其他因素结合而成的如位涡、湿位涡以及广义湿位涡等新标量的临近预报意义，用到了大城市夏季的高温高湿天气的识别与预测、气旋移动的追踪与预报、暴雨落区预报、强降水预报等领域；第8章则是矢量场理论与动力预报方法，阐述了对流涡度矢量、湿位涡矢量、动力涡度矢量、非均匀饱和湿大气中非地转 $\boldsymbol{Q}$ 矢量、$\boldsymbol{E}$ 矢量、波作用矢量等新的矢量场理论及其动力预报方法。

本书写作特色之一是力求对中尺度动力学知识从理论上加以认识深化，使基本概念阐述清晰，在理论上尽量反映新的研究成果，同时书中各章节也反映了作者自己的研究特色与著作风格，力求具有学术价值的创新性。在内容上，书中加强了近来长时间没有受到足够重视而迫切为中尺度动力学发展所依赖的理论，如非均匀饱和湿大气的广义湿位涡理论、对流涡度矢量理论及广义锋生理论等，旨在为湿大气过程的研究开辟新方法。书中加强了重力波的分析方法，还创造性地提出了一些在临近动力预报中将发挥显著作用的新矢量等。除此之外，本书的另一写作特色在于理论知识与实际预报应用的结合，还特别介绍了具有理论基础的动力预报方法，使理论同实际紧密联系。

本书的写作目的在于：把我多年来在教学和研究中形成的成果奉献给读者，拓宽和深化中尺度研究领域和内容，希望与读者在学术思路方面互相启发，互相交流，促进中尺度研究的进一步发展。这本书的部分内容还在中国科学院研究生院、浙江大学、成都信息工程学院多次讲授过。

本著作主要是在国家基金委华北暴雨重点项目（项目号：40433007）、科技部及中科院奥运项目（项目号：2001BA904B09、KACX1-02）以及 973 项目（项目号：G1998040907、2004CB418301）的资助下得以完成的。在写作过程中，我的学生冉令坤、周玉淑、崔晓鹏、平凡副研究员和孙石沿高工，以及博士生周菲凡、曹洁、杨帅、朱科锋、刘传熙，特别是博士生周菲凡做了许多具体工作，在此表示感谢。最后，对大力支持和关心本书完稿的各有关部门、单位与个人也表示衷心地感谢。

作者

2007 年 2 月于北京

目 录

第 1 章　大气基本普适动力参数及其意义

为了研究大气中尺度系统发生、发展的原理及动力结构，首先要了解一些描述中尺度特征的基本动力学参数，例如表示大气旋转效应的 Rossby（罗斯贝）数、表示大气层结程度的内 Froude（弗劳德）数以及表示大气不稳定度的 Richardson（里查森）数等，还要知道它们的具体内涵以及如何应用到中尺度大气运动的研究之中。因此，本书的第 1 章，首先介绍一些重要的基本普适动力学参数。

1.1　同旋转及层结有关的参数及动力相似性

大气是包围地球具有层结（温度层结和湿度层结）的旋转流体，地球的旋转效应在大气运动中有时起着重要的作用。因此，需要弄清楚什么时间尺度的系统旋转对它是重要的。为说明这一问题，在此首先给出旋转率，即：

$$\Omega = \frac{2\pi}{\text{地球完成一次自转的时间}} = \frac{2\pi}{1\text{天}} = 7.29 \times 10^{-5}/\text{s}$$

如果大气运动的时间尺度同地球完成一次自转的时间尺度是可比较的或更长，那么这种大气运动会感受到地球自转的效应，于是通常定义无量纲数

$$\omega = \frac{\text{地球完成一次自转的时间}}{\text{大气运动的时间尺度}} = \frac{\frac{2\pi}{\Omega}}{T} = \frac{2\pi}{T\Omega} \tag{1.1.1}$$

如果 $\omega \leqslant 1$，那么要考虑旋转效应，这对应于时间尺度 T 要超过 1 天（约 24 小时）的大气运动。通常还可以用大气运动的位移特征尺度 L 同其特征速度 U 之比作为大气运动的时间尺度 T，这时有如下的无量纲参数

$$\tau = \frac{\frac{2\pi}{\Omega}}{\frac{L}{U}} = \frac{2\pi U}{\Omega L} \tag{1.1.2}$$

若 $\tau \leqslant 1$，则旋转是重要的。

除了旋转之外，大气层结也是十分重要的。若对参考密度为 ρ_0、在 H 高度内密度变化值为 $\Delta\rho$、基本运动速度为 U 的大气而言，相应的单位体积内位能变化为 $(\rho_0 + \Delta\rho)gH - \rho_0 gH = \Delta\rho gH$，基本动能为 $\frac{1}{2}\rho_0 U^2$，则可组成无量纲数

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 U^2}{\Delta\rho g H} \tag{1.1.3}$$

若 $\sigma \sim 1$，则认为层结是需要考虑的。因为要使这样的层结下大气扰动充分发展，需消耗与基本动能相当的位能。若 $\sigma \ll 1$，则说明该层结大气中远没有足够的动能使扰动充分发展，层结起着决定性的作用；若 $\sigma \gg 1$，说明位能变化对基本动能影响很小，即层结是不重要的，这时层结效应可以被忽略(Benoit，1994)。

在大气动力学中经常用一些无量纲参数来表示大气旋转或层结的程度。这些无量纲参数是在用尺度分析方法对大气方程组进行无量纲化的过程中得到的，它们分别是 Rossby 数、内 Froude 数、Burger(伯格)数和 Richardson 数等。

Rossby 数 Ro 是平流惯性力同科氏力之比，其数学表达式为

$$Ro = \frac{\frac{U^2}{L}}{fU} = \frac{U}{fL} \tag{1.1.4}$$

Rossby 数 Ro 可以表示大气的旋转效应。

内 Froude 数 Fr_i 是平流惯性力对浮力的比或是动能对重力位能的比，其数学表达式为

$$Fr_i = \left[\frac{\text{惯性力}}{\text{浮力}}\right]^{\frac{1}{2}} \propto \left[\frac{\rho_0 U^2/L}{(\rho_2 - \rho_1)g}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{U}{\sqrt{g'L}} \tag{1.1.5}$$

其中 $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_0$，$\rho_1$，$\rho_2$ 分别是上下流体层的密度，ρ_0 是参考密度。

由于 $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_0 = -g\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}H = N^2 H$

则由(1.1.5)式可知

$$Fr_i = \frac{U}{\sqrt{g'L}} = \frac{U}{N\sqrt{HL}} \tag{1.1.6}$$

对 $L \sim H$ 的中尺度系统则有 $Fr_i = \dfrac{U}{NH}$。

可见，内 Froude 数表示了大气的层结效应。

Burger 数定义为

$$Bu = \frac{f^2 L^2}{N^2 H^2} \tag{1.1.7}$$

且 Burger 数同 Rossby 数 Ro 及内 Froude 数 Fr_i 有如下的关系：

$$Bu = \left(\frac{f^2 L^2}{N^2 H^2}\right)\frac{\left(\dfrac{U}{N\sqrt{HL}}\right)^2}{\left(\dfrac{U}{fL}\right)^2} = \left(\frac{Fr_i}{Ro}\right)^2 \tag{1.1.8}$$

对典型的深对流系统常有 $L \sim H$，有

$$Bu = \frac{f^2}{N^2}$$

从以上表达式中可以看出 Burger 数体现了大气旋转效应和层结效应的相对大小。具体可以分为以下几种情况(Norbury 和 Roulstone, 2002):$Bu=1$ 表示层结效应处于主要地位,此种大气中黏性作用会使重力惯性波破碎,例如低纬度的环流或次天气尺度现象;$Bu>1$ 表示旋转效应处于主要地位,重力惯性波维持,地转调整过程不起作用,副热带行星尺度波就属于此种类型;$Bu=O(1)$,表示层结效应和旋转效应同等重要,例如斜压不稳定情况;$Bu=0$ 对应于没有旋转的层结流体,此时若 $Fr_i=1$,则流体是近于水平无辐散的,垂直速度很小;$Bu=\infty$,表示只有旋转没有层结,一般只能在中性层结下发生,在实际大气中较为少见。另外,由 Rossby 变形半径 $\Lambda=NH/f$,则 Burger 数又可以写为:$Bu=(L/\Lambda)^2$。由此可以确定层结效应和旋转效应对不同尺度系统的作用大小。

Richardson 数通常分为整体 Richardson 数 $Ri=\dfrac{N^2H^2}{U^2}$ 及梯度 Richardson 数 $Ri(z)=\dfrac{N^2(z)}{(\partial U/\partial z)^2}$($Ri(z)$ 的物理意义见 1.3 节)。因为 $Ri=\dfrac{N^2H^2}{U^2}=\dfrac{1}{Fr_i^2}$,所以整体 Richardson 数同 Froude 数平方的倒数 $1/Fr_i^2$ 具有动力相似性。故 Ri 也是大气层结效应的一种表示。

不同的中尺度系统，涡度和散度具有不同的量级,因此,其旋转或层结的重要性程度也就不一样。对典型的中尺度运动系统,涡度和散度具有同一量级,即都可以用U/L的大小来表征。不妨这里改变传统的大尺度研究中常以涡度为主要保留对象,而忽略散度效应的做法(因为大尺度运动中散度的大小通常比涡度的大小至少要小一个量级,所以涡度为主要保留对象是合理的),对中尺度系统,可以用散度为主要参考对象来考证以上无量纲参数的作用 (Benoit, 1994)。

因为 $\Delta\rho=\left|\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}\right|\Delta z$ 而 $\Delta z=WT=\dfrac{WL}{U}$,$\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\rho_0N^2}{g}$ 故静力平衡下的气压扰动特征尺度为 $\Delta P=gH\Delta\rho=\dfrac{\rho_0N^2HLW}{U}$,或写为$\dfrac{\Delta P}{\rho_0}=\dfrac{N^2HLW}{U}$。

又因为在典型的中尺度运动系统中气压梯度力、科氏力和平流惯性力三力平衡,有 $\Delta P/L\sim\rho_0U^2/L$,则可得到 U^2 的特征大小为

$$U^2=\frac{\Delta P}{\rho_0}=\frac{N^2HLW}{U} \tag{1.1.9}$$

对中尺度运动系统特征垂直辐合和水平辐散的比为

$$\frac{W/H}{U/L}=\frac{U^2}{N^2H^2}=Fr_i^2 \tag{1.1.10}$$

可见在水平散度同涡度具有同量级的典型中尺度运动系统中,特征垂直伸长同水平辐散的比完全由内 Froud 数 Fr_i 所表征,这说明在典型的中尺度运动系统中层结起着比旋转更为关键的作用。

若对散度仍比涡度小一个量级的中尺度系统，则有水平散度的特征大小为 $D = Ro\,\dfrac{U}{L}$。而垂直伸长$\dfrac{\partial w}{\partial z}$是由水平辐合来实现的即 $Ro\,\dfrac{U}{L} \sim \dfrac{W}{H}$。因此有

$$Ro = \frac{\dfrac{W}{H}}{\dfrac{U}{L}} = \frac{WL}{UH} \tag{1.1.11}$$

这说明在这种中尺度运动系统中旋转比层结相对重要。

当旋转很强时 $Ro\to 0$，则由(1.1.11)式既可导出 $W\to 0$，垂直运动就基本消失了。通常 Taylor(泰勒) 柱就是发生在迅速旋转的流体中，因为这时由于 $D \sim Ro\,\dfrac{U}{L}$。当 $Ro\to 0$ 时，$D\to 0$ 则流动为水平无辐散的，故由不可压流体的连续性方程而知$\dfrac{\partial W}{\partial z} = 0$。若 W 在某一高处为零，如在地表，则在所有高度处有 $W = 0$，则运动完全变成二维的，即使在有地形的情况下也是如此。空气质点既不能沿地形上爬，同时地形坡度上的质点也不能沿地形下滑。于是遇到地形的质点必须偏转绕着地形走。在这种情况下，对正压流体，质点流动必须保持垂直方向上的刚性，结果使得在所有层次上的流体质点也必须同样的绕流，而在地形以上的质点就不能离开地形，被保留在那里而形成 Taylor 柱。

Taylor 柱是发生在强旋转的流体中，但对层结很强而旋转相对很弱的流体($Fr_i \ll 1$)，由于层结强，空气质点的垂直位移被大大的限制了，这就意味着当强层结空气遇到障碍物时，也必须水平的偏转，而在障碍物以上的空气流照旧可以流过障碍物而不受下层的影响，如果障碍物挡住了整个流域，那么空气就没法绕流，这时空气流就被阻塞在障碍物的上游，在层结流中这种水平的阻塞实质上就类似于旋转流中的 Taylor 柱。

以上是对旋转及层结的一些无量纲参数的表示及其物理意义的描述，那么它们有何重要性呢？我们知道，在实际物理实验(如转盘或转槽实验)以及数值实验中，依据无量纲积设置变数是非常有用的，例如一个球形雨滴在一个具有黏性的湿空气内运动，则其受到的拖曳力可写成函数关系：

$$D = f(d, u, \rho_1, \mu) \tag{1.1.12}$$

其中 d 是球形雨滴的直径，u 是雨滴的运动速度，密度为 ρ_1，黏性为 μ，如果不进行无量纲化，构成无量纲群，我们必须要做一系列的实验来决定 D，如固定 ρ_1，u 和 μ 来做 D 与 d 的关系，然后又固定 d，ρ_1，μ 来做 D 与 u 的关系等，这显然是一个愚笨的做法。如果进行无量纲化，进行无量纲分析，则拖曳函数可写为

$$C_D = \frac{D}{\rho_1 u^2 d^2} = f\left(\frac{\rho_1 ud}{\mu}\right) = f(Re) \tag{1.1.13}$$

这里 Re 是 Reynolds(雷诺) 数。这样方程变数由(1.1.12) 式中的 5 个变成了(1.1.13) 式中的 2 个，即拖曳数 C_D 与雷诺数 Re，因此就可以通过函数关系画出一条 C_D 同 Re 的关系曲线。这样，任给一个 Re，便可从曲线上找到一个对应的拖曳系数 C_D。完全不必关心雨滴密度、黏性等，我们就可以得到所有的有关 C_D 的信息。

若 Reynolds 数 Re 很小时，显然惯性力是不重要的，即在关系式(1.1.12) 中可去掉 ρ_1，则变为 $D=f(d, u, \mu)$，则这时只有一个无量纲积 $\dfrac{D}{\mu ud}$，因这个无量纲参数没有其他参数依赖，所以 $D\propto \mu ud$，这就等价于 $C_D\sim\dfrac{1}{Re}$。这时拖曳力线性地比例于速度 u，即为 Stokes(斯托克斯) 阻力定律。

动力相似性的概念同无量纲积的思想紧密相联系，显然如上面的雨滴在湿空气中运动的问题，只要构成的无量纲数 $Re=\rho_1\dfrac{ud}{\mu}$ 是一样的，那么流动就是动力相似的。

同样的在中尺度冷空气遇山受阻的研究中可以无量纲化，得出冷空气遇山受阻的无量纲长度 L 同 Froude 数的关系 $L=f(Fr_i)$，并通过这种函数关系画出关于 L 对 Fr_i 的依赖关系曲线。利用这种曲线还可以预报冷空气遇山受阻时 Fr_i 对受阻长度 L 的影响(Xu 和 Gao，1995)。

如对一个过山无黏气流在 Boussinesq(布西内斯克) 近似下，当具有不变的稳定度 N 及初始入流速度 U 时，运动满足 Bernoulli(伯努利) 方程(Smith，1988)

$$u^2=\frac{2}{\rho_0}\left[-p^*-\frac{1}{2}\rho_0N^2h^2\right]+U^2 \tag{1.1.14}$$

当气流移近山脉时，在近山处会出现流动的驻点，这时 u 为零，则知驻点扰动气压 P^* 为 ρ_0，N，h 和 U 的函数，由无量纲分析可给出局地气压系数为

$$\frac{P^*}{\rho U^2}=f\left(\frac{Nh}{U}\right)=f\left(\frac{1}{Fr_i}\right) \tag{1.1.15}$$

这就要求无量纲局地变数在相应点具有动力相似性。

1.2　维赛拉频率(Brunt-Väisälä frequency)

若只考虑大气的热力性质，而不考虑大气的运动情况，我们可以用布伦特-维赛拉频率(Brunt-Väisälä frequency，或简称维赛拉频率) 来判断大气的层结稳定度。然而，不同的大气干湿度对应的维赛拉频率的表示也是不一样的。

1.2.1　干空气的维赛拉频率

在斜压大气中空气密度 ρ 为 T 和 P 的函数，即

$$\rho = \rho(T, P) \tag{1.2.1}$$

由状态方程

$$P = \rho R_d T \tag{1.2.2}$$

这里 $R_d = c_p - c_v$。

在绝热条件下可写成

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{1.2.3}$$

这里 $\gamma = c_p / c_v$。P_0，ρ_0 是参考气压和密度，对应有参考温度为 T_0，同样应满足 $T_0 = P_0 / R_d \rho_0$。

由此又可得

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}} \tag{1.2.4}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{(\gamma-1)}} \tag{1.2.5}$$

对中尺度仍可用静力平衡近似，即

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g \tag{1.2.6}$$

由于浮力效应主要是在垂直方向上，所以考察浮力不稳定时，只需认为 P，ρ，T 为 $P(z)$，$\rho(z)$，$T(z)$ 就够了（虽然可以写成 $P(x,y,z)$，$\rho(x,y,z)$，$T(x,y,z)$，但不必要）。

若位于 z 处的空气质点向上位移了 δz，则引起气压变化为 $\delta P = -\rho g \delta z$，这也引起密度和温度的改变，依据(1.2.3)、(1.2.4)式可知

$$\delta\rho = \frac{-\rho g \delta z}{\gamma R_d T}, \quad \delta T = -(\gamma - 1)\frac{g\delta z}{\gamma R_d T} \tag{1.2.7}$$

质点在新位置上的密度为

$$\rho_1 = \rho + \delta\rho = \rho - \frac{\rho g \delta z}{\gamma R_d T} \tag{1.2.8}$$

但在这个新位置，环境密度已变为

$$\rho_2(z + \delta z) = \rho(z) + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}\delta z \tag{1.2.9}$$

则向上的浮力为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= g(\rho_2 - \rho_1)\boldsymbol{k} \\ &= g\left[\rho(z) + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}\delta z - \rho + \frac{\rho g \delta z}{\gamma R_d T}\right]\boldsymbol{k} \\ &= g\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} + \frac{\rho g}{\gamma R_d T}\right)\delta z \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

由于在等熵条件下定义声速为

$$C=\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{或写为 } C^2=\gamma R_d T$$

所以

$$\boldsymbol{F}=g\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}+\frac{\rho g}{C^2}\right)\delta z\boldsymbol{k} \tag{1.2.11}$$

则浮力加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{g}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}+\frac{\rho g}{C^2}\right)\delta z\boldsymbol{k} \tag{1.2.12}$$

记

$$N^2=-\frac{g}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}+\frac{\rho g}{C^2}\right) \tag{1.2.13}$$

则 N 为 Brunt-Väisälä 频率。

代(1.2.13)式进入(1.2.12)式有

$$\boldsymbol{a}=-N^2\delta z\boldsymbol{k} \tag{1.2.14}$$

若用温度表示,则浮力可写为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\rho g}{T}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}+\frac{g}{c_p}\right)\delta z\boldsymbol{k} \tag{1.2.15}$$

所以 N^2 可表示为

$$N^2=\frac{g}{T}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}+\frac{g}{c_p}\right) \tag{1.2.16}$$

为了避免每次系统的减去$\frac{g}{c_p}$,所以通常使用位温代替温度。由位温定义

$$\theta=T\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}}=T\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{1.2.17}$$

则 N^2 可被表示为

$$N^2=g\,\frac{\mathrm{d}\ln\theta}{\mathrm{d}z} \tag{1.2.18}$$

(1.2.18)式同(1.2.16)式是等价的。

同位温相应的密度称为势密度(或中位密度)即

$$\rho^*=\rho\left(\frac{P_0}{P}\right)^{(1/\gamma)} \tag{1.2.19}$$

这时 N^2 还可以定义为

$$N^2=-\frac{g}{\rho^*}\,\frac{\mathrm{d}\rho^*}{\mathrm{d}z} \tag{1.2.20}$$

这样就可以把可压流体用不可压流体来表示。

再讨论用 Brunt-Väisälä 频率判断大气层结稳定度的问题。

由(1.2.14)式知 $N^2>0$ 稳定，$N^2<0$ 不稳定。要满足 $N^2>0$，$\frac{\rho g}{C^2}>0$，又由(1.2.13)式，则$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}$不仅小于零，而且为明显的负值，可见对稳定层结仅有$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}<0$是不够的，必须有$\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}+\frac{\rho g}{C^2}\right)<0$才能保持静力稳定性。

1.2.2 饱和湿空气的 Brunt-Väisälä 频率及修正的相当位温

1.2.2.1 饱和湿空气的 Brunt-Väisälä 频率

对饱和湿空气，人们常借鉴干空气 Brunt-Väisälä 频率的数学表达式来表示饱和湿空气的 Brunt-Väisälä 频率：

$$N_m^2=g\frac{\mathrm{d}\ln\theta_e}{\mathrm{d}z} \tag{1.2.21}$$

其中 θ_e 是相当位温：

$$\theta_e=\theta\exp\left(\frac{Lq_s}{c_pT}\right) \tag{1.2.22}$$

这里 L 是单位质量的凝结潜热，q_s 是饱和比湿。表达式(1.2.21)初看起来似乎合理，但实际上隐含着一个问题，因为 θ_e 的定义前提是从饱和湿空气块中凝结出的液态水全部脱落该气块，只剩有潜热对气块的加热作用。但这种情况下对流比较旺盛，有明显降水发生，已不是层结稳定的状态，不适用 Brunt-Väisälä 频率了。所以有时采用如下定义

$$N_m^2=\frac{g}{T}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}+\Gamma_m\right) \tag{1.2.23}$$

这里 Γ_m 是饱和湿绝热递减率。

(1.2.22)式和(1.2.23)式两者的定义是不等价的(Fraser 等，1973)。后来有人(Durran 和 Klemp，1982)认为 N_m^2 如下的表达式(Lalas 和 Einaudi，1974)较为正确，即

$$N_m^2=\frac{g}{T}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}+\Gamma_m\right)\left(1+\frac{Lr_s}{RT}\right)-\left[\frac{g}{1+r_w}\frac{\mathrm{d}r_w}{\mathrm{d}z}\right]_e-\left[\frac{g}{1+r_w}\frac{\mathrm{d}r_w}{\mathrm{d}z}\right]_p \tag{1.2.24}$$

这里 r_w 是总的水混合比，等于饱和混合比 r_s 和液态水混合比 r_L 的和，下标 e 和 p 分别表示环境变量和气块变量。如果气块按可逆湿绝热过程抬升，液态水不脱离气块，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}r_w}{\mathrm{d}z}\right|_p=0 \tag{1.2.25}$$

因此

$$N_m^2=\frac{g}{T}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}+\Gamma_m\right)\left(1+\frac{Lr_s}{RT}\right)-\frac{g}{1+r_w}\frac{\mathrm{d}r_w}{\mathrm{d}z} \tag{1.2.26}$$

注意，(1.2.26)式成立的前提是：(1)大气总是处于湿饱和状态；(2)液态水的浓度低且

液态水以非常小的液滴形式分布在饱和湿空气中，这种小液滴并不下落，所以对湿空气运动没有拖曳作用。

客观地说，实际湿饱和大气中若有液态水凝结，如一块云团发展成降水云系的过程中，饱和空气块在其上升过程中必有部分液态水从气块中脱落。所以对于带有降水甚至产生暴雨的云系来说，在其发展的初期，应考虑带有弱降水的饱和湿空气块的浮力效应(刘栋、高守亭，2003)。

由(1.2.26)式可知，对可逆湿绝热过程中的气块有

$$\frac{\mathrm{d}r_w}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}(r_s+r_L)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}r_L}{\mathrm{d}z}=0 \tag{1.2.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}r_L}{\mathrm{d}z}=-\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}z} \tag{1.2.28}$$

假设这种情况下由 z_0 到 z 高度气块中液态水混合比变为 $r_L(z)=r_L(z_0)+\Delta r_L$，而当气块在抬升过程中部分凝结的液态水脱离但保持饱和时有

$$r'_L(z)=r_L(z_0)+\alpha\Delta r_L \tag{1.2.29}$$

这时，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r'_w}{\mathrm{d}z}&=\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}r'_L}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}z}+\alpha\frac{\mathrm{d}r_L}{\mathrm{d}z}\\&=\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}r_L}{\mathrm{d}z}-(1-\alpha)\frac{\mathrm{d}r_L}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}r_w}{\mathrm{d}z}+(1-\alpha)\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}z}\end{aligned} \tag{1.2.30}$$

因此，当有部分凝结的液态水脱离气块时，N_m^2 可写为

$$N_m^2=\frac{g}{T}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}+\Gamma_m\right)\left(1+\frac{Lr_s}{R_dT}\right)-\frac{g}{1+r_w}\left[\left.\frac{\mathrm{d}r_w}{\mathrm{d}z}\right|_e+(1-\alpha)\left.\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}z}\right|_p\right] \tag{1.2.31}$$

注意：下标 p 是表示对跟气块有关的物理量的微分，而下标 e 是表示对跟环境有关的物理量的微分，两者都可以计算出来。在理论上(1.2.31)式是较合理的，但实际计算上有相当的困难，主要是 α 究竟是多大不易确定。

1.2.2.2　修正的相当位温 θ_q

干空气的位温是大家都很熟悉的概念，定义为干空气块由原气压处绝热运动到 1000 hPa 时具有的温度。对未饱和湿空气来说位温基本定义没有改变，只是数学表达式稍微复杂了一些(Bolton，1980)

$$\theta_m=T\left(\frac{1000}{p}\right)^{\left[\frac{R_d}{c_p(\overline{p}\overline{T})}\right]\times[1-0.28\times10^{-3}r]} \tag{1.2.32}$$

这里 c_p 为干空气的定压比热，$\overline{p}=\frac{1}{2}(1000+p)$，$\overline{T}=\frac{1}{2}(\theta+T)$，$r$ 是水汽和干空气的混合比，单位为 $\mathrm{g\cdot kg^{-1}}$。

如果忽略 c_p 随温度和气压的变化，θ_m 可近似为