工商管理通用教材

徐选华 主编

李一智 主审

运筹学

YUNCHOUXUE

- 掌握解决问题的数学模型
- 应用各种参数的经济价值

第2版

湖南人民出版社

工商管理通用教材

运筹学

第2版

徐选华 主编
李一智 主审
何晓洁
简惠云 副主编
刘智勇

湖南人民出版社

图书在版编目(C I P)数据

运筹学／徐选华主编.一长沙:湖南人民出版社,
2007.3

新经济时代经管教程

ISBN 978-7-5438-2517-8

Ⅰ.运... Ⅱ.徐... Ⅲ.运筹学-教材
Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 08677 号

责任编辑:陈 敬
夏光弘

装帧设计:陈 新

运 筹 学

徐选华 主编

*

湖南人民出版社出版、发行

网址:http://www.hnppp.com

(长沙市营盘东路 3 号 邮编:410005)

湖南省新华书店经销 湖南望城湘江印务有限公司印刷

2002 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 3 版第 1 次印刷

开本:720×960 1/16 印张:20.25

字数:363 000 印数:13 001-17 500

ISBN 978-7-5438-2517-8

定价:33.00 元

前　言

《运筹学》是一门定量优化的决策科学，起源于20世纪30年代英国的军事系统模拟实验，当时科学家称之为 Operations Research。它研究的内容是综合协调、统筹规划先进的军事技术和装备等资源，以期发挥最大的效益。在第二次世界大战期间和战后的经济、生产恢复时期，一些由多学科专家组成的运筹团体在军事决策、资源合理利用和提高生产效率等领域都作出了很大的贡献，他们的工作也促使运筹学逐步形成为一门新兴的边缘学科，并迅速得到普及和发展。

20世纪50年代，我国运筹学界在翻译“Operations Research”这一述语时，从《史记·高祖本纪》中“夫运筹策帷幄之中，决胜千里之外，吾不如子房”一语，摘取“运筹”二字作为这门学科的名称，之后为学术界普遍接受。

运筹学利用了现代数学、系统科学、计算机科学以及其他科学的最新成果，来研究人类从事各种活动中处理事务的数量化规律，使得有限的人、财、物、时、空、信息等资源得到充分和合理的利用，以期获得尽可能满意的经济和社会效果。其内容相当丰富，包括很多分支科学。就其理论和应用意义来归纳，运筹学具有以下性质和特征：

1. 运筹学是一门以数学为工具，寻求各种问题最优方案的学科，所以是一门优化科学，也是一门内容相当广泛且实践性很强的应用数学。正因为如此，在我国早期引进和从事这门学科的先驱者多为数学家，如我国著名数学家华罗庚教授在普及和推广统筹法、优选法方面的贡献，受到国家和人民的推崇和敬意。

2. 运筹学研究问题从系统的观点出发，研究全局性的规划问题和综合优化的规律。它是一门新兴科学—系统工程学的主要基础理论，促使运筹学与系统工程在我国的普及和应用，最早的宣传和组织工作是由著名科学家钱学森教授倡导和主持的。

3. 运筹学知识的应用范围不仅可以解决具体工程技术问题，更为主要的是：“它的目的是为经济和管理人员在作决策时提供科学的依据，因此它是实现管理现代化的有力工具。”（中国运筹学会许国志等研究员语）运筹学从它诞生之日起，就以组织管理科学化作为己任，它的理论和实践已表明其现代管理科学的重要组成部分的定位。许多高等院校的经济、管理、信息科学等专业中都开设了运筹学课程。

学习运筹学应该着重培育以下三个方面的能力：善于运用所学知识，为各种实际问题建立数学模型；掌握各种模型的优化方法和解题技巧；正确理解和应用各种参数的经济意义。

本书参照教育部管理学科运筹学课程教学大纲要求，结合国内重点高校流行版本的内容体系和作者多年的教学成果和经验编写而成。内容分为九章，包括线性规划基础、线性规划专题、整教规划、动态规划、图与网络分析、存储论、排队论、决策论和对策论，另外提供两个附录：一是WINSQB软件在运筹学中的应用，二是习题答案或解题思路，其中部分内容为作者长期教学和科研工作的结晶。着重介绍了运筹学主要分支的基本原理和应用方法。本书注重原理及其实际应用，所列例题与习题既具有代表性又紧密结合经济管理实际，同时兼顾相关专业需要，具有一定的深广度。每章末有小结。每章后配各一定数量的习题（附答案），便于自学。

本书可作为高等院校管理科学与工程类各专业和其他相关专业的本科生教材或参考书，也可作为 MBA 教材或参考书，亦可供广大工程技术人员、管理人员自学参考。

本书第 1、2、9 章由中南大学商学院徐选华编写，第 3、5 章由中南大学商学院何晓洁编写，第 4、6 章由中南大学商学院简惠云编写，第 7、8 章由中南大学商学院刘智勇编写，本书由徐选华担任主编。何晓洁、简惠云、刘智勇担任副主编，中南大学商学院博士生导师李一智教授担任主审。

中南大学商学院对本书的编写给以了资助，商学院的领导和同事对编写工作给以了多种支持和鼓励，在此一并表示谢意。

由于编者水平所限且时间仓促，错误缺点在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2007 年 2 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

第1章　线性规划基础　001

1.1　线性规划及其数学模型　002
1.2　线性规划问题建模　005
1.3　线性规划图解法及其几何意义　014
1.4　线性规划单纯形法　018
1.5　单纯形的经济信息　028
1.6　单纯形理论分析　031
1.7　单纯形法进一步讨论　034
本章小结　041
习题一　041

第2章　线性规划专题　048

2.1　对偶规划　048
2.2　对偶单纯形法　056
2.3　灵敏度分析　059
2.4　运输问题与表上作业法　070
2.5　目标规划　077
本章小结　085
习题二　086

第 3 章　整数规划　092
3.1　整数规划的特点　092
3.2　分枝定界法　094
3.3　割平面法　097
3.4　0－1 规划与隐枚举法　101
3.5　分派问题与匈牙利法　104
本章小结　108
习题三　109

第 4 章　动态规划　111
4.1　多阶段决策问题　111
4.2　动态规划基本概念　113
4.3　最优化原理　115
4.4　最短路线问题　116
4.5　资源分配问题　119
4.6　背包问题　125
4.7　仓库存贮问题　128
4.8　生产与存贮问题　129
本章小结　135
习题四　135

第 5 章　图与网络分析　141
5.1　图的基本概念　141
5.2　树　146
5.3　最短路径问题　151
5.4　网络最大流问题　155
5.5　最小费用最大流问题　163
5.6　网络计划技术　167
本章小结　174
习题五　174

第 6 章　存贮论　179
6.1　库存控制系统　179
6.2　确定性存贮模型　183
6.3　确定性存贮模型的讨论　198
6.4　随机性存贮模型　202
本章小结　210
习题六　210

第 7 章　排队论　212
7.1　排队系统基本概念　212
7.2　M/M/1/∞/∞/FCFS 单服务台排队模型　218
7.3　M/M/1/N/∞/FCFS 单服务台排队模型　221
7.4　M/M/1/∞/m/FCFS 单服务台排队模型　224
7.5　M/M/c/∞/∞/FCFS 多服务台排队模型　226
本章小结　229
习题七　229

第 8 章　决策论　231
8.1　决策论基本概念　231
8.2　不确定型决策　234
8.3　风险型决策　239
8.4　效用理论在决策中的应用　244
8.5　序列决策与决策树　249
8.6　应用举例　254
本章小结　259
习题八　260

第 9 章　对策论　263
9.1　对策论基本概念　263
9.2　有鞍点二人有限零和对策　267
9.3　无鞍点二人有限零和对策　271
本章小结　284
习题九　284

附录一　WinQSB 软件在运筹学中的应用　288
附录二　习题答案或解题思路　296

第 1 章

线性规划基础

线性规划（Linear ProgramMing）是运筹学的基础部分，是运筹学中兴起较早的一个分支，也是运筹学中应用最广泛的一个部分，其理论和计算方法也较成熟。

20 世纪 30 年代末，前苏联数学家康特罗维奇研究交通运输和机械加工等部门的生产管理，于 1939 年写了“生产组织与计划中的数学方法”一书初稿，为线性规划建立数学模型及解法奠定了基础；与此同时，美国的库普曼研究了选择最优化运输方案的方法，建立了“线性规划数学模型”，并取得了重大进展。他们二人由于科学的创举，后来成为诺贝尔经济学奖的获得者。到了 40 年代，线性规划得到进一步应用和发展，在工业、农业生产管理，交通运输的指挥调度，资源开发，商业和银行等领域得到广泛应用，对提高企业的经济效益有显著成效。随着生产规模的扩大和经济事务的繁杂，对线性规划提出了更多的理论要求，又促使这门学科迅速发展和完善。自 1947 年美国数学家丹捷格（G.B.Dantzig）提出了一般线性规划问题求解方法——单纯形法之后，线性规划在理论上趋向成熟，在实用中日益广泛与深入，特别是在电子计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后，线性规划的适用领域更为广泛了，从解决技术问题的最优化设计，到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等领域都可以发挥作用，它已是现代管理科学的重要基础理论。

1.1 线性规划及其数学模型

在生产管理和经营活动中经常提出一类问题，即如何合理有效地利用有限的人、财、物等资源，以便得到最好的经济效果。线性规划（L.P.）是目前应用最广泛的一种系统优化方法，广泛应用于工农业生产和经济管理等领域，其核心思想是以最少的资源消耗取得最大的经济效果，线性规划是以数学为工具，研究在一定的人、财、物等资源条件下，用最少的资源耗费，取得最大的经济效果。

下面我们来讨论一个线性规划问题引例，由此引出一个线性规划问题。

1.1.1 线性规划问题引例

[**例 1－1**] 某公司生产甲、乙两种产品，均需在 A、B、C 三种不同的设备上加工，产品加工所需工时单耗、产品销售后能获得的利润及设备可用工时数如下表 1－1 所示。问：如何安排生产计划，才能使该公司获得的总利润最大？

表 1－1 产品生产基础数据表

设备 / 单耗 / 产品	A	B	C	利润（元/公斤）
甲	3	5	9	70
乙	9	5	3	30
限制工时	540	450	720	

解：这是一个典型的线性规划问题，下面建立该问题的线性规划数学模型。

①设甲、乙产品产量分别为 x_1、x_2 公斤——决策变量，简称变量

②设总利润为 Z，则

$\text{Max } Z = 70x_1 + 30x_2$ ——目标函数

③设备可用工时数限制 ——约束条件

$3x_1 + 9x_2 \leqslant 540$ A 设备可用工时约束

$5x_1 + 5x_2 \leqslant 450$ B 设备可用工时约束

$9x_1 + 3x_2 \leqslant 720$ C 设备可用工时约束

$x_1, x_2 \geqslant 0$ 非负约束

因此原问题的数学模型为（其中 s.t. 是 subject to 的简写，意为约束条件）：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 70x_1 + 30x_2 && ① \\
&\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leqslant 540 & ② \\ 5x_1 + 5x_2 \leqslant 450 & ③ \\ 9x_1 + 3x_2 \leqslant 720 & ④ \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 & ⑤ \end{cases}
\end{aligned} \tag{1-1}$$

这就是线性规划问题引例的数学模型。因此数学模型就是对一个实际问题以适当的数学公式来表达它的内在关系。

1.1.2 数学模型的事理含义

当我们把一个实际问题表达成 L.P. 数学模型时，一定要注意数学模型中的事理含义及物理量的计量单位。

（1）数学模型的三要素。

①有一组待确定的决策变量。如例 1－1 中（x_1，x_2）为一个具体行动方案。

一般来说，构成线性规划的问题都有很多具体方案可供选择，但是最优的方案往往只有一个，这是规划问题的一大特点。研究规划的目的和价值就是从很多的可行方案中去求得这个最优方案，使得资源得到充分利用，避免因任意选取其他方案而造成资源的浪费，这样就能够达到最优的经济效果。

②有一个明确的目标要求（Max 或 Min）。如例 1－1 中要求利润 Z 最大。

显然，任取一种计划产量 x_1 和 x_2 值（只要满足全部约束条件）的可行方案，都会提供一定数量的利润，但不一定是最大，因此目标要求与待定的决策变量的取值紧密相关，也就是说目标值是决策变量的函数，顾称为目标函数。另外目标要求依具体问题的性质不同而不同，本例中要求总利润，因此越大越好，用符号 Max 表示；有的情况下可能是计算费用或时间，此时越小越好，用符号 Min 表示。

人们常把线性规划研究的问题归纳为两类：第一类是某项任务确定后，如何统筹安排，尽量以最少的资源去完成这项任务；第二类是现有一定数量的资源，怎样安排和使用他们，使完成的任务最多，创造的财富最大。实际上这两类问题是同一个问题的两个方面或两种提法，本质都是寻求整个问题的某项整体指标的最优解。

③存在一组约束条件。如例 1－1 中 A、B、C 三种设备可用工时的约束。

他们也是用决策变量的线性方程来表示的，约束条件反映规划的客观限制，在产品生产过程中，资源往往是有限的，约束条件确定规划的实现范围，即确定了所求变量的变化域。

（2）数学模型中系数的含义。

①目标函数中决策变量的系数 C_j，称为价值系数。

如例 1－1 中的 70、30 就叫价值系数，表示单位产品提供的利润（元/

公斤）。在具体问题中有明确的经济含义和计量单位。

②约束条件左边决策变量前的系数 a_{ij}，称为约束条件系数。

在具体问题中也有明确的经济含义和计量单位，如例 1－1 中的 3、5、9 和 9、5、3 叫约束条件系数（或单耗），表示单位产品的设备工时消耗量（小时/公斤）。

③约束条件右边常数 b_i，称为限制常数。

如例 1－1 中的 540、450、720 就叫限制常数，表示设备 A、B、C 现有最大的可用工时。在具体问题中有明确的含义和计量单位。

1.1.3 数学模型解的名称

在线性规划数学模型（1－1）中，一般我们能够找到决策变量很多个解，即有很多种方案，将所有约束条件用图形绘出，如图 1－1 所示。以下定义几种解的名称。

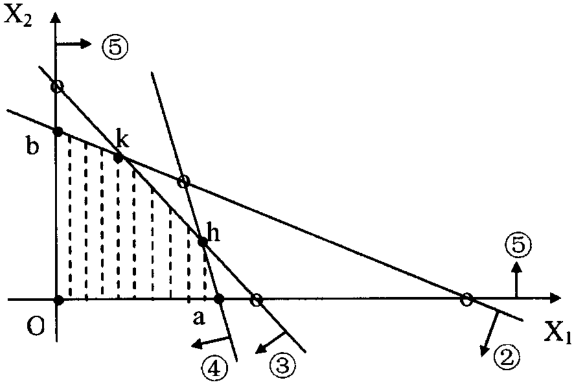

图 1－1 数学模型的可行解域

（1）可行解：凡满足所有约束条件②、③、④、⑤的所有解称为可行解，他们对应可行方案。所有可行解的集合构成可行解域，即上图阴影部分。可行解域中的任何一点称为可行点，对应一个可行方案，这个点的座标 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)^T$ 构成一个列向量，称为可行向量。

（2）最优解：凡使得目标函数 Z 值达到最优（最大或最小）的可行解称为最优解。最优解一般情况下是唯一存在的，但在一些特殊的规划问题中，可能有无穷多个最优解或者不存在最优解。

（3）基本解：所有约束条件直线的交点对应的解称为基本解，如上图 1－1中所有实心点和空心点对应的解。

（4）基本可行解：位于可行解域边界上的约束条件直线的交点对应的解，即上图所有的实心点对应的解。它满足两个条件：其一是基本解，即约束条件直线的交点对应的解；其二是可行解，即满足所有的约束条件，在可行解域内。

1.1.4 数学模型的一般形式

综上所述，线性规划数学模型从结构上看，它包括目标函数、约束条件和变量非负约束三个部分，完整的表达式为：

$$\text{Max (Min) } Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_m \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, \cdots, n \end{cases} \quad (1-2)$$

如果（1－2）式中的方程（包括目标函数和约束条件）均是线性方程，则称为线性规划；如果（1－2）式中的方程出现非线性方程，该称为非线性规划。

1.1.5 线性规划问题求解过程

利用线性规划求解实际问题可归结为以下三个步骤：

第一步：将实际问题转化为数学模型（数学公式），这一步叫建模；

第二步：求解数学模型的最优解，有以下两种方法，

方法（一）：图解法，适合于二个变量的 L.P. 数学模型。

方法（二）：单纯形法，适合于任意个变量的 L.P. 数学模型。

第三步：将数学模型的最优解转化为原问题的最优方案。

1.2 线性规划问题建模

建模是解决线性规划问题极为重要的环节。从实践的角度来讲，一个正确数模的建成，标志着问题的解决已接近完成，答案在计算机上由线性规划程序运行就会很快获得。一个正确数模的建立要求建模者熟悉规划问题的生产和管理内容，明确目标要求和错综复杂的约束条件，要通过大量的调查和统计资料获取原始可靠的数据。这些要求对建立一个较复杂的实际模型是要花费相当大的工作量的。对于初学者来说，怎样从问题的内容出发，分析和认识问题，善于从数学这个角度有条理地表述出来，掌握建模过程是十分重要的技术。

线性规划适用解决的问题面很广，因此不可能有一个统一的建模标准，这就使建模成为一种带技巧性的工作。即使如此，建模过程还是有一定规律的，即通过对实际问题的分析和理解，明确哪些是决策变量，目标要求是什么，有哪些限制条件，也就是抓住数学模型的三个基本要素：决策变量、目标函数和约束条件。列出相应的方程式，即得问题的数学模型。归结为以下三个步骤：

第一步：分析问题的要求，确定决策变量；

第二步：找出问题目标要求，确定目标函数；

第三步：分析决策变量所受的限制，列出约束条件；

本节通过几个例子来说明建模过程，介绍不同类型的问题，使我们对线性规划的应用领域和它的现实意义有进一步的认识。

1.2.1 资源合理利用问题

资源合理利用是企业编制生产计划时经常考虑的实际问题。其任务是企业（也可以是一个地区，甚至整个国家）如何规划和调配它的有限资源以达到生产的目的，并使企业获取最大的利润；或使资源、材料耗费最少，从而使生产成本为最小。现举简例说明。

[例 1-2] 某厂生产 A、B 两种产品，都需用煤、金属材料、电力等资源。制造 A 产品 1 吨需用煤 6 吨，金属材料 80 公斤，电力 50 千瓦；制造 B 产品 1 吨需用煤 8 吨，金属材料 50 公斤，电力 10 千瓦。现该厂仅有煤 540 吨，电力 2000 千瓦，金属材料 4000 公斤，可供利用，其他资源可以充分供应。又知：A、B 产品能得到利润分别为 6 千元/吨和 5 千元/吨。问：在现有这些资源限制条件下，应生产多少吨 A 和 B 产品，使企业获得利润最大，试建立该问题的数学模型？

解：这是一个资源合理利用问题，将问题转化为表 1-2，辅助建模。

表 1-2 产品生产基础数据表

资源 / 单耗 / 产品	煤（吨）	金属材料（公斤）	电力（千瓦）	利润（千元/吨）
A（X_1 吨）	6	80	50	6
B（X_2 吨）	8	50	10	5
资源限制	540	4000	2000	

（1）确定决策变量。要求回答的是 A、B 产品的生产量，设用 X_1 和 X_2（单位是：吨）分别表示 A、B 产品的生产量。

（2）确定目标函数。企业要求利润最大，设 Z 表示企业利润，则有

$\text{Max } Z = 6X_1 + 5X_2$（千元）

（3）确定约束条件。该问题有煤、金属材料和电力三种资源的限制，据此可建立这三种资源的限制约束条件如下：

煤：　$6X_1 + 8X_2 \leqslant 540$（吨）

金属材料：　$80X_1 + 50X_2 \leqslant 4000$（公斤）

电力：　$50X_1 + 10X_2 \leqslant 2000$（千瓦）

可得该问题线性规划数模如下：

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 5X_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}6X_1 + 8X_2 \leqslant 540\\80X_1 + 50X_2 \leqslant 4000\\50X_1 + 10X_2 \leqslant 2000\\X_1,\ X_2 \geqslant 0\end{cases}$$

资源合理利用问题的一般数模如下：

假设某个企业有 m 种资源，已知每种资源的数量为 b_i（i = 1，2，…，m）。该企业能生产 n 种产品（X_j 为第 j 种产生的产量，j = 1，2，…，n），已知生产每一种产品单位产量所消耗的各种资源数量，我们用 a_{ij}表示第 j 种产品对第 i 种资源单耗。设各种产品的价格为已知，用 C_j 表示第 j 种产品的单价。在现有资源条件下，如何规划生产，使得产值最大。其数模如下：

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_j \leqslant b_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m\\X_j \geqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{cases}$$

1.2.2 合理下料问题

合理下料是许多工业部门中经常遇到的问题。例如，机械加工时，常常在一定的条形金属原材料或板料上切割成若干段或块，加工成所需的毛坯。在一般情况下，材料不可能被完全利用，就有边角余料要处理，造成大材小用，优材劣用，甚至当成废物收集，搬运回炉。这样产品单耗高，成本也高。因此，如何最大限度地减少边角余料，提高原材料利用率，就是提高经济效益的规划问题。现举一例说明。

[例 1－3] 有一批长度为 180 公分的钢管，需截成 70、52 和 35 公分三种管料。它们的需求量应分别不少于 100、150 和 100 个。问：应如何下料才能使钢管的余料为最少，试建立该问题的数学模型？

解：这是一个合理下料问题，下料方案是在满足管料尺寸条件下可能的各种下料方式中进行选择，利用下图列出所有的下料方式，共有八种下料方式，如下表 1－3 所示。

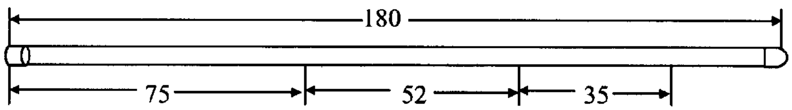

表 1-3　下料方式表

管料尺寸 / 个数 / 下料方式	70（公分）	52（公分）	35（公分）	余料（公分）
一（X_1 根）	2	0	1	5
二（X_2 根）	1	2	0	6
三（X_3 根）	1	1	1	23
四（X_4 根）	1	0	3	5
五（X_5 根）	0	3	0	24
六（X_6 根）	0	2	2	6
七（X_7 根）	0	1	3	23
八（X_8 根）	0	0	5	5
管料需求个数	100	150	100	

（1）确定变量。设 X_j 为第 j 种下料方式所用的钢管根数，$j = 1, 2, \cdots, 8$。

（2）确定目标函数。要求总余料最少，设总余料为 Z，则

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8 \text{（公分）}$$

（3）确定约束条件。必须使各种下料方式提供的管料个数不少于需求量，即：

70 公分管料个数需求约束：$2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geqslant 100$（个）

52 公分管料个数需求约束：$2X_2 + X_3 + 3X_5 + 2X_6 + X_7 \geqslant 150$（个）

35 公分管料个数需求约束：$X_1 + X_3 + 3X_4 + 2X_6 + 3X_7 + 5X_8 \geqslant 100$（个）

$X_j \geqslant 0$ 并且为整数

于是该问题的线性规划数模如下：

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geqslant 100 \\ 2X_2 + X_3 + 3X_5 + 2X_6 + X_7 \geqslant 150 \\ X_1 + X_3 + 3X_4 + 2X_6 + 3X_7 + 5X_8 \geqslant 100 \\ X_j \geqslant 0 \quad \text{且为整数}，j = 1, 2, \cdots, 8 \end{cases}$$

合理下料问题的一般数学模型如下：

假设需要切割 m 种零件毛坯，其数量分别以 b_i 表示（$i = 1, 2, \cdots, m$）；设可能有 n 种下料方式，并分别以 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ 表示第 j 种下料方式每根原料（或每块板料）所切割出来的零件毛坯数量；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com