

高等学校教材

Advanced  
Electromagnetic Theory

# 高等电磁理论

杨儒贵 主编



Higher Education Press  
高等教育出版社

0441/54

高等

2008

才

Advanced  
Electromagnetic Theory

# 高等电磁理论

杨儒贵 主编



Higher Education Press  
高等教育出版社

## 内容简介

本书主要介绍电磁波辐射、散射和传输的理论及其分析方法。全书共分12章,包括:基本电磁理论,平面波,辅助函数,电磁定理和原理,电磁辐射,电磁散射,导波理论,谐振腔,近似解析方法,矩量法,时域有限差分法和有限元法。书中附有大量习题和文献,以便读者提高分析和解决电磁问题的能力,进一步开阔视野。

本书的特色是:①专章论述电磁理论中常用的辅助函数;②全面介绍电磁理论中常用的定理、原理及其应用;③不仅论述经典解析方法,同时还介绍当前流行的重要数值方法;④本书的作者不仅是国内长期从事电磁理论教学和科研的教授,同时还邀请了海外学者加盟。

本书可以作为电子信息类和电子科学与技术类专业高年级本科生及研究生教材,也可供有关科技人员阅读。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等电磁理论/杨儒贵主编. —北京:高等教育出版社,  
2008.2

ISBN 978 - 7 - 04 - 023009 - 3

I. 高… II. 杨… III. 电磁学 - 高等学校 - 教材  
IV. O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 177463 号

策划编辑 杜 炜 责任编辑 曲文利 封面设计 于文燕  
责任绘图 尹 莉 版式设计 王艳红 责任校对 杨凤玲  
责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100011  
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 北京铭成印刷有限公司

开 本 787×960 1/16  
印 张 33  
字 数 620 000

购书热线 010-58581118  
免费咨询 800-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2008年2月第1版  
印 次 2008年2月第1次印刷  
定 价 41.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23009-00

# 前 言

为了满足当前电子信息类和电子科学与技术类专业研究生教学的需求，本书作者根据多年的教学经验和科研阅历，撰写了这本《高等电磁理论》教材。本书内容分为4个部分：①基本电磁理论，平面波，辅助函数，以及重要的电磁定理和原理；②电磁波的辐射和散射特性及其求解方法；③导波和谐振腔的特性及其分析方法；④求解电磁场的近似解析方法和数值方法。本教材所述内容限于宏观电磁学，涉及的介质是线性和静止的。

全书包括12章。第1章介绍基本电磁理论。第2章分析平面波的传播特性。第3章介绍电磁理论中涉及的各种辅助函数及其应用。第4章论述重要的电磁定理和原理及其应用。第5章讨论电磁辐射特性及其求解方法。第6章讨论电磁散射特性及求解方法。第7章论述导波系统的特性及其分析方法。第8章介绍谐振系统的特性及其分析方法。第9章介绍几种近似的解析方法。第10章介绍矩量法(MoM)。第11章介绍时域有限差分法(FDTD)。第12章介绍有限元法(FEM)。第1章至第6章以及第9章由西南交通大学杨儒贵教授撰写，第7章和第8章由西南交通大学张世昌教授撰写，第10章由美国肯塔基大学卢才成教授撰写，第11章由美国宾夕法尼亚州立大学余文华教授撰写，第12章由美国伊利诺大学金建铭教授撰写。为了培养和提高研究生分析和解决问题的能力，附有一定数量的习题。为了扩大研究生的视野，每章末提供了大量有关的参考文献。

自从全面阐述电磁理论的美国 Massachusetts Institute of Technology (MIT) 教授 J. A. Stratton 的经典著作《Electromagnetic Theory》1941 年问世以来，国内外陆续出版了很多有关电磁理论的著作。由于出版时间不同，这些著作具有明显的时代特色。早期著作只有解析方法，20 世纪 50 年代以前更未涉及  $\delta$  函数和 Green 函数。近代著作大量使用  $\delta$  函数、Green 函数、并矢 Green 函数以及泛函等现代数学工具，同时还兼顾数值方法。随着计算机硬件和软件的发展，专门论述数值方法的“计算电磁学”应运而生。为了适应当前电磁理论和信息技术的发展，本书的撰写理念是：在阐述电磁场特性的同时，着重讨论电磁场的求解方法；大量使用位函数、Green 函数以及并矢 Green 函数等辅助函数以简化电磁场的求解；解析方法和数值方法同时兼顾；虽然主要讨论线性的静止介质，也涉及近来出现的手征介质和左手介质。

杨儒贵教授担任本书主编，负责统一协调全书的内容和文稿。杨儒贵教授和张世昌教授长期从事有关电磁理论的教学和科研工作，三位来自美国大学的教授更是擅长电磁场数值计算的专家，本书融会和反映了这些教授们的教学和科研心得，是一项国际学术合作的成果。

由上可见，本书的特色是：①将电磁理论中常用的辅助函数归并一章，以便进行比较它们的功能，理解它们的内在联系；②对于电磁理论中常用的定理和原理，不仅论述其内涵，同时也介绍它们的应用；③经典与现代兼顾，不仅论述经典的解析方法，同时还介绍当前流行的重要数值方法；④国内外学者合作。

本书采用 SI 国际单位制，物理量的名称及符号按照最近公布的国家标准和规范。以白斜体  $A$  表示标量，以黑斜体  $\mathbf{A}$  表示矢量。正弦电磁场的时间因子采用  $e^{j\omega t}$ ，以  $A$  表示有效值，以  $A_m$  表示最大值。以  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  表示与空间及时间有关的瞬时矢量，以  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  表示仅与空间有关的复矢量。

全书完稿后，承蒙西安电子科技大学梁昌洪教授和东南大学章文勋教授仔细审阅了全文，并提出很多宝贵意见，作者在此表示由衷的谢意。此外，还要感谢西南交通大学电磁所廖成教授、王敏锡教授和熊祥正教授对于文稿提出很多良好的建议。这些教授们的热忱帮助进一步提高了本书的素质。

高等教育出版社对于本书的出版给予大力支持，做了大量策划和编审工作，作者表示十分感谢。

此外，本书还荣获西南交通大学研究生特色教材建设专项资金的赞助。

由于水平有限，同时又是多位作者撰写，书中难免存在不妥之处，敬请广大读者给予指正。

编者于 2007 年夏

# 目 录

<b>第一章 基本电磁理论</b> .....	1
1-1 Maxwell 方程 .....	1
1-1-1 时变电磁场 .....	1
1-1-2 正弦电磁场 .....	3
1-2 介质的电磁特性 .....	4
1-3 边界条件 .....	7
1-3-1 切向分量边界条件 .....	8
1-3-2 法向分量边界条件 .....	8
1-3-3 理想导体边界条件 .....	8
1-4 辐射条件 .....	9
1-5 电磁能量与能流 .....	10
1-5-1 能量密度和损耗功率密度 .....	10
1-5-2 能量流动密度矢量 .....	10
1-5-3 复能流密度矢量 .....	12
1-6 磁荷与磁流 .....	14
1-7 电磁微分方程 .....	15
1-8 Sturm - Liouville 理论 .....	18
1-8-1 自伴微分方程 .....	18
1-8-2 本征值及本征函数 .....	19
1-9 Green 定理 .....	22
1-9-1 标量 Green 定理 .....	22
1-9-2 矢量 Green 定理 .....	23
1-10 矢量场惟一性定理 .....	24
1-11 Helmholtz 定理 .....	26
习题 .....	28
参考文献 .....	30
<b>第二章 平面波</b> .....	32
2-1 波动方程 .....	32
2-2 自由空间中的平面波 .....	33

2-3 平面波的极化特性 .....	37
2-3-1 线极化平面波 .....	37
2-3-2 圆极化平面波 .....	38
2-3-3 椭圆极化平面波 .....	39
2-4 平面边界上的反射和折射 .....	41
2-4-1 任意方向传播的平面波 .....	41
2-4-2 Snell 定律 .....	42
2-4-3 反射系数和透射系数 .....	43
2-4-4 无反射和全反射 .....	46
2-4-5 导电介质中的折射波 .....	47
2-5 多层介质中的平面波 .....	50
2-5-1 多层介质的正投射 .....	50
2-5-2 多层介质的总反射 .....	52
2-5-3 多层介质的斜投射 .....	53
2-6 $kDB$ 坐标系 .....	56
2-6-1 $kDB$ 坐标系的定义 .....	56
2-6-2 $kDB$ 坐标系中的场方程 .....	57
2-7 各向异性介质中的平面波 .....	58
2-7-1 等效介电常数 .....	59
2-7-2 双折射现象 .....	60
2-7-3 Faraday 旋转效应 .....	63
2-8 手征介质中的平面波 .....	65
2-9 波速 .....	66
习题 .....	69
参考文献 .....	71
<b>第三章 辅助函数</b> .....	<b>73</b>
3-1 标量位和矢量位 .....	73
3-1-1 矢量磁位和标量电位 .....	73
3-1-2 矢量电位和标量磁位 .....	75
3-1-3 Lorentz 规范 .....	76
3-1-4 Coulomb 规范 .....	77
3-2 Hertz 位 .....	78
3-2-1 电 Hertz 位 .....	78
3-2-2 磁 Hertz 位 .....	79
3-3 Debye 位 .....	80

3-3-1	直角坐标系中齐次矢量 Helmholtz 方程的求解	80
3-3-2	圆柱坐标系中齐次矢量 Helmholtz 方程的求解	80
3-3-3	球坐标系中齐次矢量 Helmholtz 方程的求解	81
3-4	标量波函数	82
3-4-1	直角坐标系中的标量波函数	82
3-4-2	Fourier 级数和 Fourier 变换	84
3-4-3	圆柱坐标系中的标量波函数	86
3-4-4	Fourier - Bessel 级数和 Fourier - Bessel 变换	88
3-4-5	球坐标系中的标量波函数	91
3-4-6	Fourier - Legendre 级数	93
3-4-7	球谐函数	95
3-4-8	Fourier - 球 Bessel 级数和 Fourier - 球 Bessel 变换	99
3-5	矢量波函数	100
3-5-1	矢量波函数的定义	100
3-5-2	直角坐标系中的矢量波函数	103
3-5-3	圆柱坐标系中的矢量波函数	104
3-5-4	球坐标系中的矢量波函数	106
3-5-5	矢量波函数的应用	109
3-6	Dirac - delta 函数	113
3-6-1	Dirac - delta 函数的定义	113
3-6-2	Dirac - delta 函数的本征展开	116
3-6-3	Dirac - delta 函数的积分表示	118
3-7	Green 函数	119
3-7-1	Green 函数的定义、特性及分类	119
3-7-2	三维自由空间 Green 函数	121
3-7-3	二维自由空间 Green 函数	124
3-7-4	一维自由空间 Green 函数	126
3-7-5	半空间 Green 函数	128
3-7-6	Green 函数的本征展开	129
3-7-7	Green 函数的应用	130
3-8	并矢 Green 函数	132
3-8-1	并矢定义及运算	132
3-8-2	并矢 Green 函数的定义、特性及分类	134
3-8-3	自由空间并矢 Green 函数	136
3-8-4	半空间并矢 Green 函数	138



3-8-5 并矢 Green 函数的本征展开 .....	140
3-8-6 电并矢和磁并矢 Green 函数 .....	143
3-8-7 并矢 Green 函数的应用 .....	144
习题 .....	150
参考文献 .....	151
<b>第四章 电磁定理和原理</b> .....	<b>154</b>
4-1 电磁场惟一性定理 .....	154
4-1-1 时变电磁场惟一性定理 .....	154
4-1-2 正弦电磁场惟一性定理 .....	156
4-2 镜像原理 .....	157
4-2-1 无限大的理想导电平面 .....	157
4-2-2 无限大的理想导磁平面 .....	159
4-2-3 无限长的理想导电波导 .....	160
4-2-4 半无限大的理想导电夹板 .....	160
4-3 互易原理 .....	160
4-3-1 微分形式和积分形式 .....	161
4-3-2 Lorentz 互易原理 .....	162
4-3-3 Carson 互易原理 .....	162
4-3-4 互易原理的应用 .....	163
4-4 等效源原理 .....	166
4-4-1 面等效源原理 .....	167
4-4-2 感应原理 .....	170
4-4-3 体等效源原理 .....	171
4-4-4 等效源原理的应用 .....	173
4-5 Huygens 原理 .....	175
4-5-1 标量绕射公式 .....	175
4-5-2 矢量绕射公式 .....	177
4-5-3 并矢绕射公式 .....	177
4-5-4 Huygens 原理的应用 .....	178
4-6 几何光学原理 .....	180
4-6-1 几何光学场 .....	181
4-6-2 零波长的电磁场为几何光学场 .....	181
4-6-3 射线方程 .....	183
4-6-4 强度定律 .....	184
4-6-5 等光程原理 .....	185

4-6-6 Fermat 原理 .....	185
4-6-7 几何光学原理的应用 .....	185
4-7 Babinet 原理 .....	186
4-7-1 光学 Babinet 原理 .....	186
4-7-2 电磁场 Babinet 原理 .....	187
4-7-3 Babinet 原理的应用 .....	188
习题 .....	189
参考文献 .....	190
<b>第五章 电磁辐射</b> .....	<b>192</b>
5-1 电磁场的求解 .....	192
5-2 辐射场 .....	195
5-3 辐射矢量 .....	198
5-4 点源场的平面波展开 .....	200
5-5 线源场的平面波展开 .....	205
5-6 电磁场的多极展开 .....	207
5-7 电磁场的球面波展开 .....	210
5-8 口径场的辐射 .....	214
5-9 平面口径场的辐射计算 .....	218
习题 .....	219
参考文献 .....	220
<b>第六章 电磁散射</b> .....	<b>223</b>
6-1 散射矩阵和散射截面 .....	223
6-2 平面波的柱面波函数的展开 .....	225
6-3 平面波的球面波函数的展开 .....	227
6-4 柱面波的球面波函数的展开 .....	229
6-5 Bessel 函数的叠加定理 .....	230
6-6 球 Bessel 函数的叠加定理 .....	232
6-7 理想导电圆柱对平面波的散射 .....	233
6-7-1 波函数法 .....	234
6-7-2 Green 函数法 .....	235
6-7-3 位函数法 .....	236
6-8 理想导电圆柱对柱面波的散射 .....	237
6-9 理想导电球对平面波的散射 .....	239
6-10 理想导电球对球面波的散射 .....	243
6-11 介质球对平面波的散射 .....	245

6-12 无限大平面对平面波的散射 .....	247
习题 .....	251
参考文献 .....	252
<b>第七章 导波理论</b> .....	<b>254</b>
7-1 波动方程 .....	254
7-2 导波场的行波解 .....	256
7-3 导波场的横向与纵向分量 .....	259
7-4 矩形波导中的电磁波 .....	261
7-4-1 Helmholtz 方程的通解 .....	261
7-4-2 横磁波 .....	263
7-4-3 横电波 .....	264
7-4-4 模式特性 .....	266
7-4-5 内壁的表面电流和电荷 .....	267
7-5 圆柱波导中的电磁波 .....	267
7-5-1 Helmholtz 方程的通解 .....	268
7-5-2 横磁波 .....	269
7-5-3 横电波 .....	271
7-6 同轴波导中的电磁波 .....	272
7-6-1 Helmholtz 方程的通解 .....	272
7-6-2 横磁波 .....	273
7-6-3 横电波 .....	274
7-6-4 同轴与圆柱波导的比较 .....	274
7-7 同轴电缆中的横电磁波 .....	276
7-8 波导模式的一般特性 .....	280
7-8-1 波导波阻抗 .....	280
7-8-2 简并模式 .....	282
7-8-3 模式叠加性 .....	283
7-9 波导场的正交性 .....	286
7-9-1 单模横向电磁场的正交性 .....	286
7-9-2 二维 Green 定理及散度定理 .....	288
7-9-3 模式正交性 .....	290
7-9-4 模式正交性的物理意义 .....	293
7-10 波导的激励 .....	294
7-10-1 场叠加模型 .....	294
7-10-2 被激励模式的振幅 .....	296

7-10-3 激励禁戒律 .....	297
7-11 介质波导中的电磁波 .....	297
7-11-1 横磁波 .....	299
7-11-2 横电波 .....	301
7-11-3 应用举例 .....	302
习题 .....	303
参考文献 .....	304
<b>第八章 谐振腔</b> .....	<b>306</b>
8-1 谐振腔的主要参数 .....	306
8-1-1 LC 谐振回路的特性 .....	306
8-1-2 谐振腔 .....	307
8-1-3 谐振腔的品质因数 .....	308
8-2 矩形谐振腔 .....	309
8-2-1 场解法 .....	310
8-2-2 相位法 .....	312
8-3 圆柱和同轴谐振腔 .....	313
8-3-1 圆柱谐振腔 .....	313
8-3-2 同轴谐振腔 .....	315
8-4 腔体形变对谐振频率的影响 .....	316
8-5 偏心同轴谐振腔 .....	321
8-5-1 本征方程 .....	321
8-5-2 本征方程的数值计算 .....	324
8-5-3 应用举例 .....	325
习题 .....	326
参考文献 .....	326
<b>第九章 近似解析方法</b> .....	<b>328</b>
9-1 稳定相位法 .....	328
9-2 鞍点法 .....	330
9-3 微扰法 .....	333
9-4 变分法 .....	335
9-4-1 泛函和变分 .....	335
9-4-2 本征值的稳定公式 .....	336
9-4-3 应用举例 .....	338
9-5 几何绕射理论 .....	340
9-5-1 振幅扩散系数 .....	341

9-5-2 并矢反射系数 .....	343
9-5-3 并矢绕射系数 .....	344
参考文献 .....	345
<b>第十章 矩量法 .....</b>	<b>347</b>
10-1 一般步骤 .....	347
10-2 线散射 .....	352
10-3 二维散射 .....	356
10-3-1 二维 TM 波散射 .....	357
10-3-2 二维 TE 波散射 .....	362
10-3-3 二维体散射问题 .....	367
10-4 三维散射 .....	373
10-4-1 三维面散射 .....	374
10-4-2 三维体散射 .....	385
10-4-3 导电和介质混合散射体 .....	389
10-5 快速多极子方法 .....	394
10-5-1 基本方程 .....	395
10-5-2 物理意义 .....	397
10-5-3 算法流程 .....	397
参考文献 .....	401
<b>第十一章 时域有限差分法 .....</b>	<b>405</b>
11-1 差分的基本概念 .....	405
11-2 FDTD 概述 .....	406
11-3 网格数值色散 .....	411
11-4 稳定性分析 .....	412
11-5 截断时域有限差分网格的边界条件 .....	413
11-5-1 PEC 和 PMC 边界条件 .....	414
11-5-2 Mur 吸收边界条件 .....	415
11-5-3 不分裂场 PML 吸收边界条件 .....	417
11-5-4 伸展坐标 PML 吸收边界条件 .....	420
11-5-5 时域卷积 PML 吸收边界条件 .....	421
11-6 平面波源 .....	432
11-7 时域近场-远场变换技术 .....	442
11-8 时域有限差分的改进和扩展技术 .....	444
11-8-1 弯曲表面共形技术 .....	444
11-8-2 子网格加密技术 .....	445

11-8-3	周期边界条件	446
11-8-4	色散介质	446
11-8-5	交换方向隐式技术	449
11-8-6	并行计算技术	452
11-9	数值模拟实例	453
11-9-1	半波天线	453
11-9-2	微带天线	454
11-9-3	微带低通滤波器	456
11-9-4	X波段 WR90 矩形波导	457
	参考文献	458
<b>第十二章</b>	<b>有限元法</b>	<b>463</b>
12-1	标量场的有限元分析	463
12-1-1	边值问题	463
12-1-2	有限元构建	464
12-1-3	应用举例	468
12-2	矢量场的有限元分析	471
12-2-1	边值问题	471
12-2-2	有限元构建	472
12-2-3	应用举例	475
12-3	时域有限元分析	480
12-3-1	边值问题	480
12-3-2	有限元构建	481
12-3-3	应用举例	484
12-4	数值技术和专题讨论	486
12-4-1	网格剖分	486
12-4-2	矩阵求解方法	487
12-4-3	高阶有限元	487
12-4-4	曲边有限元	488
12-4-5	自适应有限元分析	488
12-4-6	有限元计算区域的截断技术	489
12-4-7	快速扫频技术	490
12-5	小结	491
	参考文献	491
<b>附录</b>		<b>494</b>
一、	矢量恒等式	494

---

二、正交曲面坐标系 .....	495
三、 $\delta$ 函数 .....	497
四、Bessel 函数 .....	497
五、Legendre 函数 .....	501
<b>索引</b> .....	504

# 第一章

## 基本电磁理论

本章将介绍本教材涉及的基本电磁理论,包括奠定电磁理论基础的 Maxwell 方程,描述介质电磁特性的参数,表征电磁场在边界上变化规律的边界条件,自由空间电磁场满足的辐射条件,电磁能量和能量流动密度,假想的磁荷与磁流概念,电磁微分方程,有关常微分方程特性的 Sturm - Liouville 理论,描述标量场和矢量场积分特性的 Green 定理,以及有关矢量场重要特性的惟一性定理和 Helmholtz 定理等。

### 1-1 Maxwell 方程

宏观电磁现象的规律都遵从 Maxwell 方程,该方程理论正确,并被实验证实。Maxwell 当初建立的方程,其数学描述非常繁杂和冗长。矢量分析及场论数学创建后,Maxwell 方程的表示非常简洁,具有积分和微分两种形式。本节首先介绍描述时变电磁场的 Maxwell 方程,然后给出正弦电磁场的 Maxwell 方程。

#### 1-1-1 时变电磁场

英国物理学家 James Clerk Maxwell(1831—1879)在已发现的电磁感应现象基础上,提出位移电流的假设,总结为下列 4 个方程式

$$\oint_l \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-1-1)$$

$$\oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-1-2)$$

$$\oint_s \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-1-3)$$

$$\oint_s \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (1-1-4)$$



式中  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  为磁场强度 (A/m);  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  为电场强度 (V/m);  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  为磁通密度 (T);  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  为电通密度 (C/m<sup>2</sup>);  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  为电流密度 (A/m<sup>2</sup>);  $\rho(\mathbf{r}, t)$  为电荷密度 (C/m<sup>3</sup>)。这些物理量通常都是时间及空间函数。式(1-1-1)称为全电流定律, 式(1-1-2)称为电磁感应定律, 式(1-1-3)称为磁通连续性原理, 式(1-1-4)称为 Gauss 定律, 该 4 式总称为 Maxwell 方程式的积分形式。利用矢量分析中的散度定理  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  及旋度定理  $\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ , 由上述 Maxwell 方程的积分形式可以分别导出其微分形式如下:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1-1-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1-1-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1-1-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1-1-8)$$

值得指出, 上述方程式中的电流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  通常应包括 3 种电流, 即  $\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v$ , 这里  $\mathbf{J}'$  为产生电磁场的源,  $\mathbf{J}_c$  为传导电流,  $\mathbf{J}_v$  为运流电流或称为运动电流。

Maxwell 方程的积分形式为实验结果的总结和归纳, 它们在场量不连续区域仍然成立, 但是微分形式只能适用于场量连续的区域。

实验结果还表明, 时变电流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  与时变电荷密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  之间满足电荷守恒定律, 其积分形式为

$$\oint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (1-1-9)$$

利用散度定理, 可由上式导出电荷守恒定律的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1-1-10)$$

值得指出的是, 对于时变电磁场, 由式(1-1-5)~式(1-1-8)及式(1-1-10)组成的 5 个方程不是完全独立的。若对式(1-1-5)两边取散度, 利用式(1-1-10)可求得式(1-1-8); 由式(1-1-6)亦可导出式(1-1-7)。为此, 对式(1-1-6)两边取散度, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = 0$$

此式表明, 磁通密度  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  的散度与时间无关, 即  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{常数}$ , 且此常数一定为零, 否则, 意味着有磁荷存在。然而自然界中至今尚未发现真实的磁荷存在。这样, 导出式(1-1-7)。由此可见, 这 5 个方程中只有 3 个是独立的。可以选择式(1-1-5)、式(1-1-6)及式(1-1-10)作为基本方程, 亦可取