



高等学校数学辅导教材之

1

高等数学 辅导讲义 (下册)

编著 北京大学 李正元

国家行政学院出版社

高等学校数学辅导教材之①

高等数学 辅导讲义

(下册)

编著 北京大学 李正元

国家行政学院出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学辅导讲义/李正元编著. —北京: 国家行政学院出版社,
2002.8

ISBN 7-80140-241-3

I. 高… II. 李… III. 高等数学-高等学校-教学参考资料
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 054435 号

高等数学辅导讲义 (下册)

李正元 编著

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区长春桥路 6 号

邮政编码: 100089

发行部电话: 68920615, 68929949

新华书店经销

北京市朝阳印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 开本 36.5 印张 1150 千字

2003 年 3 月第 1 版 2003 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7-80140-241-3/O·19 定价: 36.00 元 (上、下册)

前 言

高等数学课程对于大学生来说，其重要性是不言而喻的，近年来被许多部委和省市列为教学的重点评估课程之一。在全国硕士学位研究生考试中被指定为全国统考科目。然而，一方面近年来由于教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响；另一方面后续课程以及研究生入学考试对高等数学的要求在教学大纲范围内有深化的趋势。如何解决这一新的矛盾，如何把大学期间高等数学的学习与研究生入学考试复习紧密衔接，为此作者根据在北京大学多年的教学实践以及硕士研究生入学考试高等数学辅导的经验，听取了广大学员的意见，参考了北京大学、清华大学、复旦大学、同济大学、华中科技大学、浙江大学、四川大学、西安交通大学等高等院校的现行教材，认真编写了这本《高等数学辅导讲义》。

本书每章设有**基本内容诠释与重要结论归纳、典型题型归纳及解题方法与技巧、练习题及答案与提示**。本书以讲清讲透**基本概念**为主线，希望能帮助同学把握并理解各章的基本概念和重要的定理与公式；并通过选编

的典型例题，或是澄清基本概念与基本运算，或是指出同学解题中常犯的错误，或是介绍高等数学中常用解题思路与技巧，并且许多题目给出了多种解法，通过这些希望能开阔思路，活跃思维，举一反三，触类旁通，提高同学分析解决问题的能力。同学做各章设置的**练习题**可达到巩固、理解、提高的目的。在做练习题时，一定要独立思考，动手做题，实在有困难再看提示和参考答案。

要写好一本教材实非易事，疏漏错误难免，欢迎全国同行批评指正！

2003年2月于北大燕北园

学大京北下卷卷，更康治员学大九工車机，金学大五福，学大鼓桥中学，学大低同，学大旦重，学真凡，林建竹與治封開華高華学大融交安西，学大川四

《义世學開半幾美面》本在丁夏華
里典，胎日份註要置己聯封客內本基市第章華并本
本。示與己案答及國區科，其對己未衣國輸及胎成壁顯
長對訓學同似帶通監許，更主長念聯本基查指制特題并
能直比數書，大公已聖文內要重味金源本基而章各聯題

目 录



第一章 函数	(1)
§ 1 函数概念与几类常见的函数	(1)
§ 2 复合函数, 反函数与初等函数	(7)
第二章 极限	(18)
§ 1 数列的极限概念	(18)
§ 2 函数极限概念	(24)
§ 3 极限的性质	(29)
§ 4 无穷小量, 无穷大量及其联系	(31)
§ 5 极限运算法则	(37)
§ 6 极限存在性准则与两个重要的极限	(48)
§ 7 无穷小的比较	(65)
§ 8 函数极限与数列极限的关系, 极限的不存在问题	(73)
第三章 函数的连续性	(86)
§ 1 函数的连续性概念及其判断	(86)
§ 2 连续函数的性质	(103)
§ 3 函数连续性的应用	(110)
第四章 导数	(120)
§ 1 导数与高阶导数概念	(120)

§ 2	导数表与求导法则	(132)
§ 3	分段函数的求导法	(156)
§ 4	n 阶导数的求法	(166)
§ 5	导数的简单应用	(173)
第五章	微分	(191)
§ 1	微分概念	(191)
§ 2	微分法则与一阶微分形式的不变性	(195)
§ 3	微分在近似计算中的应用	(199)
第六章	微分学中的中值定理及其应用	(208)
§ 1	微分学中的中值定理	(208)
§ 2	函数为常数的条件与函数恒等式的证明	(213)
§ 3	函数单调性与极值点的判别法	(216)
§ 4	函数的最大值与最小值问题	(228)
§ 5	函数凹凸性与拐点的判别法	(241)
§ 6	利用导数作函数图形	(248)
§ 7	柯西中值定理的应用——洛必达法则	(258)
§ 8	洛必达法则的应用——无穷小阶的比较 与确定	(271)
§ 9	微分学理论的应用——证明不等式	(276)
§ 10	微分学理论的应用——证明导函数或 函数存在零点	(287)
第七章	泰勒公式及其应用	(306)
§ 1	带皮亚诺余项与拉格朗日余项的泰勒公式	(306)
§ 2	泰勒公式的应用	(313)
第八章	不定积分	(326)
§ 1	原函数与不定积分概念	(326)
§ 2	基本积分表与不定积分的简单运算法则	(333)
§ 3	不定积分的换元积分法	(340)
§ 4	不定积分的分部积分法	(357)

§ 5	分段函数的积分	(366)
§ 6	几类初等函数的积分法	(370)
第九章 定积分		(397)
§ 1	定积分的概念	(397)
§ 2	定积分的性质	(404)
§ 3	积分与微分的关系	(409)
	——牛顿-莱布尼兹公式	(409)
§ 4	定积分的计算	(416)
§ 5	变限积分及其性质	(438)
§ 6	定积分的近似计算	(453)
§ 7	定积分的微元分析法	(458)
§ 8	定积分的几何应用	(461)
§ 9	定积分的物理应用	(477)
§ 10	广义积分	(484)
第十章 向量代数与空间解析几何		(518)
§ 1	向量概念及向量的加法与数乘向量	(518)
§ 2	向量的数量积, 向量积与混合乘积	(527)
§ 3	向量运算的几何应用	(532)
§ 4	平面方程与直线方程	(540)
§ 5	平面、直线间的相互关系与距离公式	(548)
§ 6	曲面与曲线及二次曲面	(555)
§ 7	空间曲线在平面上的投影曲线	(566)

下 册

第十一章 多元函数微分学	(577)
---------------------	-------

§ 1	多元函数的概念, 极限与连续性	(577)
§ 2	偏导数	(589)
§ 3	全微分与可微性	(605)
§ 4	方向导数与梯度	(616)
§ 5	复合函数的求导法则	(628)
§ 6	复合函数求导法则的应用	
	——隐函数求导法	(639)
§ 7	复合函数求导法则的其他应用	(653)
§ 8	多元函数微分学的几何应用	(664)
§ 9	多元函数微分学在极值问题上的应用	(673)
§ 10	二元函数的泰勒公式	(692)
第十二章 重积分		(706)
§ 1	二重积分的概念与性质	(706)
§ 2	二重积分的计算——在直角坐标系下化	
	二重积分为累次积分	(715)
§ 3	二重积分的计算——极坐标变换, 平移	
	变换与一般的变量替换	(729)
§ 4	三重积分的概念与三重积分的计算	
	——在直角坐标系中化三重积分为累次积分	(748)
§ 5	三重积分的计算	
	——平移变换, 柱坐标变, 球坐标变换与	
	一般的变量替换	(756)
§ 6	重积分的应用	(769)
第十三章 曲线积分与格林公式		(787)
§ 1	曲线积分的概念与性质	(787)
§ 2	第一型与第二型曲线积分的计算	(795)
§ 3	格林公式及其应用	(809)
§ 4	曲线积分与路径无关问题与全微分式的	
	原函数问题	(822)

§ 5 曲线积分的若干应用	(835)
第十四章 曲面积分, 高斯公式与斯托克斯公式	(843)
§ 1 第一型曲面积分	(843)
§ 2 第二型曲面积分	(855)
§ 3 曲面积分的应用	(870)
§ 4 高斯公式及其应用	(874)
§ 5 斯托克斯公式及其应用	(886)
§ 6 向量场的通量与散度, 环量与旋度	(893)
§ 7 保守场, 空间曲线积分与路径无关问题 及微分式的原函数问题	(899)
第十五章 级数	(911)
§ 1 级数的基本概念与性质	(911)
§ 2 正项级数的收敛性判别法	(918)
§ 3 任意项级数的收敛性判别法, 条件收敛 与绝对收敛	(932)
§ 4 幂级数的收敛域与性质	(946)
§ 5 函数的幂级数展开	(957)
§ 6 幂级数的若干应用	(970)
§ 7 函数的傅里叶系数与傅里叶级数	(974)
§ 8 傅里叶级数的收敛性与函数的傅里叶级 数展开	(980)
§ 9 傅里叶级数的复数形式与频谱分析	(985)
§ 10 函数项级数	(990)
* 第十六章 含参变量的积分与傅里叶变换	(1008)
§ 1 含参变量的定积分所确定的函数及其性质	(1008)
§ 2 含参变量的广义积分的一致收敛性	(1015)
§ 3 含参变量的广义积分的性质	(1019)
§ 4 用参变积分定义的特殊函数 —— Γ 函数与 B 函数	(1028)

§ 5	傅里叶变换与傅里叶积分·····	(1033)
§ 6	傅氏变换的性质·····	(1040)
第十七章	常微分方程 ·····	(1054)
§ 1	微分方程的基本概念·····	(1054)
§ 2	微分方程的初等积分法	
	——可分离变量的方程与一阶线性方程·····	(1058)
§ 3	微分方程的初等积分法——初等变换法·····	(1065)
§ 4	全微分方程与积分因子·····	(1072)
§ 5	可降阶的二阶方程·····	(1077)
§ 6	微分方程的建模与应用 (I)·····	(1081)
§ 7	一阶微分方程小结·····	(1094)
§ 8	二阶线性微分方程解的性质与通解的结构·····	(1103)
§ 9	二阶常系数线性微分方程的通解与特解·····	(1109)
§ 10	某些特殊类型的二阶线性变系数方程·····	(1120)
§ 11	微分方程的建模与应用 (II)·····	(1125)
§ 12	可转化为常微分方程的若干情形·····	(1130)

第十一章 多元函数微分学

§ 1 多元函数的概念, 极限与连续性

一、基本内容诠释与重要结论归纳

1. 平面上的点集与区域

为了讨论二元函数的需要, 应了解以下几个概念.

(1) 平面上点 M_0 的 δ 邻域

$$U(M_0, \delta) = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}.$$

点 M_0 的空心邻域 $U_0(M_0, \delta) = U(M_0, \delta) \setminus \{M_0\}$, δ 为邻域的半径. 若不强调邻域的半径 δ , 分别用 $U(M_0)$ 与 $U_0(M_0)$ 表示 M_0 的某个邻域与空心邻域.

(2) 平面点集 E 的内点, 外点与边界点

E 为平面点集, M_0 为平面上一个点.

若 $\exists U(M_0, \delta) \subset E$, 则称 M_0 为 E 的内点; 若 $\exists U(M_0, \delta), U(M_0, \delta) \cap E = \emptyset$, 则称 M_0 为 E 的外点; 若 M_0 的 $\forall$ 邻域中既有 E 中的点又有不是 E 中的点, 则称 M_0 为 E 的边界点. 见图 11.1-1

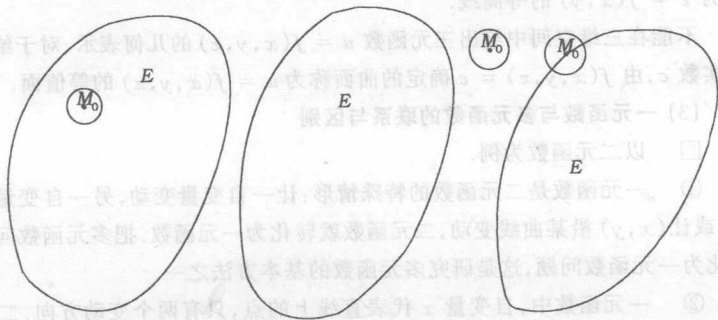


图 11.1-1

(3) 有界集 若 $\exists$ 原点的邻域 U , 使得点集 $E \subset U$, 则称 E 为有界集.

(4) 开区域与闭区域

平面点集 D 称为开区域, 若 D 中的点都是 D 的内点, 且 D 中 $\forall$ 两点均可用属于 D 中的折线连接. D 称为闭区域, 若 D 由开区域连同它的全部边界组成.

开区域简称区域.

2. 多元函数的概念

(1) 多元函数的定义

设有三个变量 x, y, z , 变量 x, y 的变化域为 D . 若对于 D 中每一点 $P(x, y)$, 按照某一对应规律 f , 变量 z 都有唯一的一个值与之对应, 则称变量 z 是变量 x, y 的二元函数, 记作 $z = f(x, y)$ 或 $z = f(P)$. D 称为 $f(x, y)$ 的定义域.

这里 x, y 称为函数的自变量, z 称为因变量, 数集 $\{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为该函数的值域.

三个或三个以上自变量的函数可类似定义.

(2) 多元函数的几何表示

二元函数 $z = f(x, y) ((x, y) \in D)$ 在三维空间 $Oxyz$ 中的图形即点集 $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$

通常为曲面.

曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $z = c$ 的交线在 Oxy 平面上的投影曲线

$$f(x, y) = c$$

称为 $z = f(x, y)$ 的等高线.

不能在三维空间中给出三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的几何表示. 对于给定的实数 c , 由 $f(x, y, z) = c$ 确定的曲面称为 $u = f(x, y, z)$ 的等值面.

(3) 一元函数与多元函数的联系与区别

□ 以二元函数为例.

① 一元函数是二元函数的特殊情形: 让一自变量变动, 另一自变量固定, 或让 (x, y) 沿某曲线变动, 二元函数就转化为一元函数. 把多元函数问题转化为一元函数问题, 这是研究多元函数的基本方法之一.

② 一元函数中, 自变量 x 代表直线上的点, 只有两个变动方向. 二元函数中, 自变量 (x, y) 代表平面上的点, 它有无数个变动方向.

③ 一元函数 $z = f(x) (a < x < b)$, 也可看成二元函数, 其定义域是: $a < x < b, -\infty < y < +\infty$.

3. 多元函数的极限

(1) 多元函数的极限概念

对于二元函数来说, 自变量的动点 $M(x, y)$ 趋于 $M_0(x_0, y_0)$ 的情况比较复杂, M 可沿任意路径趋向 M_0 , 自然用它们之间的距离

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0$$

来刻画 M 趋于 M_0 .

定义 设 $f(x, y)$ 定义于 D , $M_0 \in D$ 或是 D 的边界点, A 为常数. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $(x, y) \in D$ 且 $(x, y) \in U_0(M_0, \delta)$ 时 (图 11.1-2) 就有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

则称点 $M(x, y)$ 趋于 $M_0(x_0, y_0)$ 时函数 $f(x, y)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A,$$

或

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \quad \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A,$$

$$f(x, y) \rightarrow A \quad ((x, y) \rightarrow (x_0, y_0)).$$

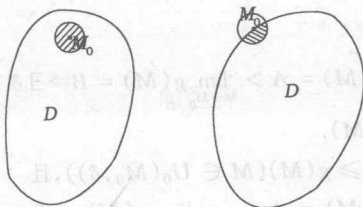


图 11.1-2

(2) 求多元函数的极限

□ 与一元函数有相同的极限运算法则.

① 若 $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A, \lim_{M \rightarrow M_0} g(M) = B$, 则

$$\lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \pm g(M)] = A \pm B; \quad \lim_{M \rightarrow M_0} [f(M)g(M)] = AB;$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0); \quad \lim_{M \rightarrow M_0} f(M)g(M) = A^B \quad (A > 0).$$

② 若 $g(x, y)$ 在 $U_0(M_0, \delta) \cap D$ 有界, 且 $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$, 则

$$\lim_{M \rightarrow M_0} (f(M)g(M)) = 0.$$

③ 设 $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A, \lim_{z \rightarrow A} F(z) = B$ 且当 $(x, y) \in U_0(M_0, \delta)$ 时, $f(x, y) \neq A$, 则

$$\lim_{M \rightarrow M_0} F(f(M)) \stackrel{(z = f(M))}{=} \lim_{z \rightarrow A} F(z) = B.$$

④ 若 $\exists U_0(M_0, \delta)$, 当 $(x, y) \in U_0(M_0, \delta) \cap D$ 时,

$$u(x, y) \leq v(x, y) \leq w(x, y),$$

且 $\lim_{M \rightarrow M_0} u = \lim_{M \rightarrow M_0} w = A$,

$$\Rightarrow \lim_{M \rightarrow M_0} v = A.$$

(3) 求多元函数极限常用的方法

1° 直接用极限运算法则.

2° 通过适当放大缩小法或变量替换法转化为求简单的极限或一元函数的极限.

(4) 多元函数极限的性质

□ 多元函数的极限有与一元函数相同的性质.

① 设 $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \exists$, 则 $\exists M_0$ 的空心邻域 $U_0(M_0, \delta)$, $f(M)$ 在 $U_0(M_0, \delta)$ 有界.

② 设 $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A > \lim_{M \rightarrow M_0} g(M) = B \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $M \in U_0(M_0, \delta)$ 时, $f(M) > g(M)$.

③ 设 $f(M) \geq g(M) (M \in U_0(M_0, \delta))$, 且

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A, \quad \lim_{M \rightarrow M_0} g(M) = B,$$

$$\Rightarrow A \geq B.$$

4. 多元函数的连续性

(1) 连续性概念

定义 设有二元函数 $f(M)$, 定义域为 D ,

1° 若 $M_0 \in D$ 且

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$$

称 $f(M)$ 在 M_0 连续. 若对 $\forall M_0 \in D$, $f(M)$ 在 M_0 连续, 称 $f(M)$ 在 D 连续.

2° 若 $M_0 \in D$ 或 M_0 是 D 的边界点且 M_0 不是 $f(M)$ 的连续点, 则称

M_0 是 $f(M)$ 的间断点.

(2) 连续性的判断

1° 若一元函数 $f(x)$ 在 $x \in I$ 连续, 则作为二元函数它在 $x \in I, -\infty < y < +\infty$ 连续.

2° 连续函数经过有限次四则运算(相除时分母不为零)或复合运算所得函数仍为连续函数.

3° 二元初等函数在其定义区域上连续.(分别以 x, y 为自变量的基本初等函数, 经过有限次四则运算及复合运算而得的函数称为以 x, y 为自变量的二元初等函数.)

(3) 连续函数的性质

□ 局部性质:

设 $f(x, y)$ 定义在 D 上, $f(M)$ 在 $M_0 \in D$ 连续, $f(M_0) > 0, \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $M \in U(M_0, \delta) \cap D$ 时 $f(M) > 0$.

□ 区域上的性质:

1° 设 D 是有界闭区域, $f(x, y)$ 在 D 连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上有界并达到最大值和最小值.

2° 设 D 是开区域或闭区域, $f(x, y)$ 在 D 连续, 对 $\forall M_1, M_2 \in D$, 若 $f(M_1) < f(M_2)$, 则对 $\forall$ 实数 $\mu, f(M_1) < \mu < f(M_2), \exists M_0 \in D$, 使得 $f(M_0) = \mu$.

* 3° 设 D 是有界闭区域, 若 $f(x, y)$ 在 D 连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 一致连续: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $\forall M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \in D$, 只要 $\rho(M_1, M_2) < \delta$ 就有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

二、典型题型归纳及解题方法与技巧

1. 关于多元函数的定义域

【例 11.1.1】 确定下列函数的定义域 D , 并作 D 的图形(只对平面情形), 指出它是开区域或闭区域? 是否有界区域.

$$(1) z = \ln(-x - y); \quad (2) z = \arccos \frac{x}{x+y};$$

$$(3) u = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}}.$$

【解】 (1) 因为 $z = \ln t$ 的定义域是 $t > 0$, 所以 $z = \ln(-x - y)$ 的定义域是 $-x - y > 0$, 即 $D: x + y < 0$.

先画出边界线 $x + y = 0, (x + y) \Big|_{(-1,0)} = -1 < 0$, 即 $(-1, 0) \in D$, 所以定义域为直线 $x + y = 0$ 的下方区域, 不包括直线 $x + y = 0$, 它是开区域且是无界区域. 见图 11.1-3.

(2) 由于一元函数 $z = \arccos t$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 所以该函数的定义域是

$$D: x + y \neq 0, -1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1.$$

(11.1-1)

当 $x + y > 0$ 时, (11.1-1) 式化为

$$\begin{cases} y \geq -2x, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (11.1-2)$$

当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, (11.1-2) 蕴含不等式 $x + y > 0$.

当 $x + y < 0$ 时, (11.1-1) 式化为

$$\begin{cases} y \leq -2x, \\ y \leq 0. \end{cases} \quad (11.1-3)$$

当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, (11.1-3) 蕴含不等式 $x + y < 0$.

因此定义域

$$D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0), y \geq -2x, y \geq 0\}$$

$$\cap \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0), y \leq -2x, y \leq 0\}.$$

其图形是由直线 $y = -2x, y = 0$ 所围的阴影部分, 它包含除原点外的边界, 见图 11.1-4.

D 包含了它的边界, 所以不是开区域, 边不包含边界点——原点, 所以它也不是闭区域. D 是无界区域.

(3) 因为 $z = \sqrt{25 - t} + \frac{1}{1 + \sqrt{t - 4}}$ 的定义域是 $4 \leq t \leq 25$, 所以该函数定义域是

$$2^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2,$$

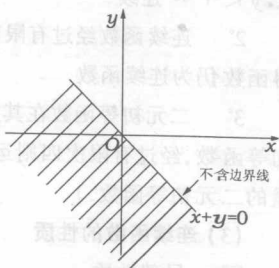


图 11.1-3

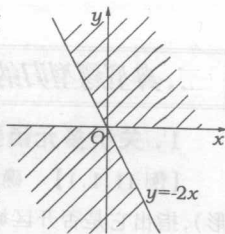


图 11.1-4