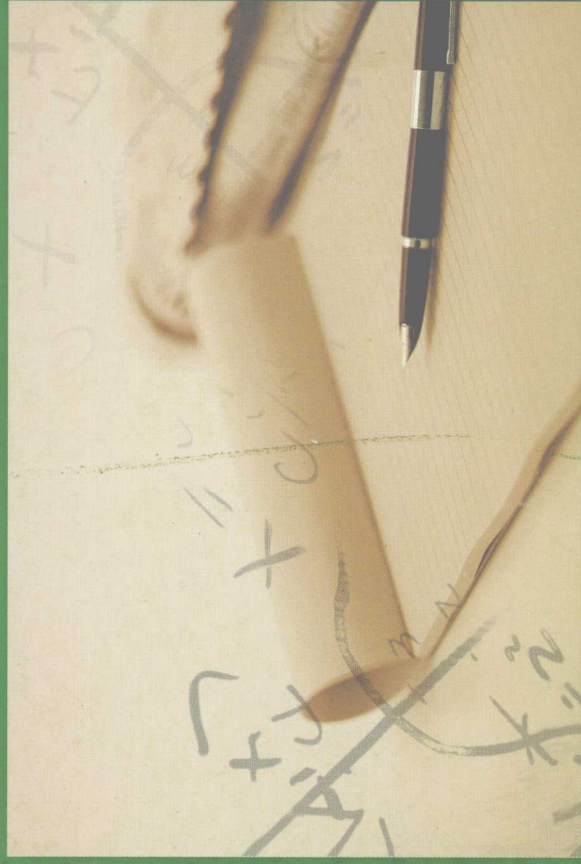


高等数学学校教学用书

高等数学同步训练

本书编写组 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教学用书

高等数学同步训练

本书编写组 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是为配合普通高校一学年高等数学课程的教学而编写的,与一般教学进度同步.本书将高等数学的全部教学内容分为八个模块(篇),全部为训练题,训练题分为基本训练和综合提高两部分.基本训练题以基本概念、基本计算、基本方法、基本应用题为主;综合训练题则是安排在每个模块(篇)结束后或期中、期末考试前,进一步巩固和提升学生的综合应用能力.

本书中每一套训练题的前面,作者都精心编写了简明的训练目的和解题指导,以便于学生明确方向,尽快聚焦解题思路,少走一点弯路.书后的附录罗列了一些初等数学中常用的公式,以方便同学查阅.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步训练/张学山主编.——北京:高等教育出版社,2007.8

ISBN 978-7-04-022955-4

I. 高… II. 张… III. 高等数学-高等学校-习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 135014 号

策 划 编 辑 徐 东 责 任 编 辑 徐 东 封 面 设 计 吴 昊 责 任 印 制 蔡 敏 燕

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100011

总 机 010-58581000

传 真 021-56965341

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司

排 版 南京理工出版信息技术有限公司

印 刷 常熟市华通印刷有限公司

开 本 889×1194 1/16

印 张 10

字 数 255 000

购书热线 010-58581118

021-56964871

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

<http://www.hepsh.com>

网上订购 <http://www.landrac.com>

<http://www.landrac.com.cn>

畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2007 年 9 月第 1 版

印 次 2007 年 9 月第 1 次

定 价 12.00 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版 权 所 有 侵 权 必 究

物 料 号 22955-00

前 言

高等数学是高等学校工科、经济管理 etc 等专业学生的一门必修的重要基础课,该课程的目标是培养学生具有比较熟练的数学运算能力和综合的数学运用能力,为后继课程的学习打下扎实的基础.该课程的学习质量会直接或间接地影响到每一位学生的发展.在教与学过程中,除了教师的教学,学生的练也是非常重要的.

随着高校大众化教育的推进,大学数学课程面临诸多挑战.为确保新形势下下高等数学课程的教学质量,进一步深化教学改革,结合上海市教委重点课程建设的展开,我们针对普通本科一学年的高等数学课程制作了作业系统.该作业系统由网上电子作业、网下手工作业组成.电子作业以选择题和判断正误题为主,重点训练学生对基本概念、基本理论的理解与运用能力,由学生在网上答题,网络系统自动评分、记录成绩.网上电子作业从 2006 年 9 月开始已在我校全面使用.网下作业主要是计算、应用、综合训练题,学生书面解答,任课教师批改.这本《高等数学同步训练》是网下作业,已在我校试用两年,其间几经修改,效果良好.

就高等数学课程而言,正确理解基本概念,熟练掌握基本运算,有较弱的综合应用能力,是时代赋予我们的基本要求.“复杂的机器是由简单的零件装配而成的”这个道理适用于数学题的求解.如果对数学概念把握不准,基本的数学公式、基本的计算没有掌握,就没有办法去求解更加一般的、综合性较强或有一定难度的数学题.因此,一方面,教师要注意加强对基本概念,基本运算,基本应用的教学,还要重视对学生数学应用能力的培养;另一方面,学生要加强训练,多做习题,在解题过程中加深对基本概念的理解,强化对基本概念、基本公式的运用能力训练,总结和提炼解题技巧.

基于上述考虑,《高等数学同步训练》的训练题分为基本训练和综合提高两部分.基本训练题以基本概念、基本计算、基本方法、基本应用题为主;综合训练题则是将高等数学的全部教学内容分为八个模块(篇),在每个模块(篇)结束之后,或期中、期末考试前配两到三套综合训练题,以此来培养学生的综合应用能力.

本书中每套训练题的前面,都安排了一个训练目的和一个解题指导,这样做的目的是为了便于学生明确方向,尽快聚焦解题思路,少走一点弯路.为方便同学查阅,书后还增加了一个附录,罗列了一些初等数学中常用的公式.

《高等数学同步训练》由上海工程技术大学数学教学部张学山和张颖策划并组织编写,田原、沈亦一、李娜、洪银萍、谢秋玲、方涛、熊邦松、王天波、王宝存、孟美侠、田明等参与选题、审题、整理加工等工作.上海工程技术大学教务处和基础教学学院的主要领导、数学教学部同仁、高等教育出版社编辑徐东同志给予了极大的支持,在此一并致谢.

本书是我校数学课程教学改革的一种尝试与探索,书中可能会有不当或错误之处,恳请使用者不吝雅正.

有需要参考答案的读者,请通过电子邮件同我们联系, E-mail 地址: math@sues.edu.cn.

编 者

2007 年 8 月

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010)58581897 / 58581896 / 58581879

传 真：(010)82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

目录

第一篇	函数与极限	1
第一章	函数与极限	1
	(基本训练题 1~基本训练题 4 综合训练题)	
第二篇	一元函数微分学	11
第二章	导数与微分	11
	(基本训练题 1~基本训练题 3 综合训练题)	
第三章	微分中值定理与导数的应用	19
	(基本训练题 1~基本训练题 4 综合训练题)	
期中考前测试		29
	(综合训练题 1、综合训练题 2)	
第三篇	一元函数积分学	33
第四章	不定积分	33
	(基本训练题 1~基本训练题 4 综合训练题)	
第五章	定积分	43
	(基本训练题 1~基本训练题 3)	
第六章	定积分的应用	49
	(基本训练题 1、基本训练题 2、综合训练题)	
第四篇	空间解析几何	55
第七章	空间解析几何与向量代数	55
	(基本训练题 1~基本训练题 4 综合训练题)	
期末考前测试		65
	(综合训练题 1、综合训练题 2)	

第五篇	多元函数微分学	69
第八章	多元函数微分学	69
	(基本训练题 1~基本训练题 6 综合训练题)	
第六篇	多元函数积分学	83
第九章	重积分	83
	(基本训练题 1~基本训练题 6)	
期中考前测试		95
	(综合训练题 1、综合训练题 2、基本训练题)	
第十章	曲线积分与曲面积分	101
	(基本训练题 1~基本训练题 7 综合训练题 1、综合训练题 2)	
第七篇	无穷级数	119
第十一章	无穷级数	119
	(基本训练题 1~基本训练题 6 综合训练题)	
第八篇	微分方程	133
第十二章	微分方程	133
	(基本训练题 1~基本训练题 7 综合训练题)	
期末考前测试		149
	(综合训练题 1、综合训练题 2)	
附录	初等数学部分常用公式	153

第一篇 函数与极限

第一章 函数与极限

基本训练题 1

学号 _____ 姓名 _____

训练目的 加深对函数以及相关基本概念的理解.

解题指导 注意运用以下知识点: 确定函数的两要素; 确定函数定义域的原则; 分段函数的概念; 函数复合运算的方法. 最后两题是初等的数学建模, 理解题意是解题的关键.

1. 判别下列各组函数是否相同, 说明理由.

$$(1) f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt{\ln^2 x};$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln x}.$$

3. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2x}{x^2 - 2x - 3};$$

$$2. \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}; \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases} \text{ 求}$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-\pi),$$

并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

4. 找出下列复合函数的复合关系:

$$(1) y = e^{-(\cos x)^2};$$

$$(2) y = \sqrt{1 + \ln^2 x};$$

$$(3) y = (\arcsin e^x)^3.$$

$$(2) y = \sqrt{1 - 2x} + \arctan \frac{1}{x}.$$

5. 设函数 $f(x)$ 的定义域是闭区间 $[0, 1]$, 问下列函数的定义域各是什么?

(1) $f(x^2 - 1)$;

7. 一球的半径为 r , 作外切球的圆锥, 试将其体积表示为高的函数, 并说明定义域.

- (2) 将厂方所获的利润 L 表示为订购量 x 的函数;

(2) $f(x+a) + f(x-a) \quad (a > 0)$.

6. 设函数
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 0, & |x| = 1; \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} g(x) = e^x,$$

求复合函数 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$, 并分别作出这两个复合函数的图形.

- (3) 某商店订购 1 000 台, 厂方可获利润多少?

8. 电风扇每台零售价为 110 元, 成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 300 台以上的, 每多订购 1 台, 售价就降低 0.10 元, 但最低价为每台 75 元.

- (1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

基本训练题 2

学号

姓名

训练目的 通过解体会极限的精确定义;理解无穷小的定义;掌握极限的四则运算法则.

解题指导 利用极限的精确定义证明极限较难掌握,解题的出发点是根据给定的 $\varepsilon > 0$ 找 N 或 δ ,叙述时要把握好逻辑关系;理解极限和左右极限的关系、极限与无穷小的关系,熟练运用极限的四则运算法则以及利用无穷小的性质是求解第 3~6 题的前提.

1. 观察如下数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 的变化趋势,写出它们的极限:

$$(1) x_n = (-1)^n \frac{1}{n^2};$$

$$(2) x_n = \frac{2n-1}{2n}.$$

2. 根据函数极限的定义证明:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{3x^2}.$$

5. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-7}{4-x};$$

3. 利用极限和左右极限的关系,证明当 $x \rightarrow 1$ 时,函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x \geq 1; \\ x-2, & x < 1 \end{cases}$ 的极限不存在.

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{x^3+1};$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

4. 利用极限与无穷小的关系,计算下列极限并说明理由.(提示:参照《高等数学辅导与测试》第 19 页例 2)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^3}{1+x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 12x + 35};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+10)^{10}(x+9)^{50}}{x^{60} + 8x^{50}};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right).$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x} + 1};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{1 - x - 5x^2}; \quad (\text{提示: 参照《高等数学$$

辅导与测试》第 21 页例 5)

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}.$$

6. 计算下列极限. (提示: 参照《高等数学辅导与测试》第 22 页例 8)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x};$$

基本训练题 3

学号

姓名

训练目的 掌握利用两个重要极限和极限存在准则求极限的方法;体会等价无穷小的含义;掌握利用等价无穷小求极限的方法;体会函数连续和间断的意义.

解题指导 第 1~4 题的求解要利用两个重要极限或极限存在准则;第 5 题要运用无穷小阶的概念;第 6、7 两题利用等价无穷小来计算;第 8~10 题的求解取决于对函数连续、间断概念的掌握.

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{3}{2} \tan \frac{x}{2}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin(-7x)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}.$$

2. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}};$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow 0} (1+3t)^{-\frac{1}{t}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx} \quad (k \in \mathbf{N}^*).$$

3. 利用极限存在准则证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1.$$

4. 证明: 数列

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$$

极限存在并求其极限.

5. 当 $x \rightarrow -1$ 时, 无穷小 $1+x$ 与下列无穷小是否同阶? 是否等价? 说明理由.

(1) $1+x^3$;

(2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x^2}$.

8. 下面的函数在给定点处间断, 说明这些间断点属于哪一类, 如果是可去间断点, 则补充或改变函数的定义使得函数在该点连续.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}, x = -1, x = 3.$$

7. 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1; \\ 3-x, & x > 1. \end{cases}$$

的连续性, 并作出函数的图形.

6. 利用等价无穷小, 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^n}{(\sin x)^m} \quad (m, n \in \mathbf{N}^+);$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\sin^3 2x};$

9. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} x$ 的连续性, 若

有间断点, 判別其类型.

基本训练题 4

学号 _____ 姓名 _____

训练目的 掌握利用函数的连续性求极限的方法;通过解題把握閉区间上连续函数的性质.

解題指导 初等函数的连续区间就是定义区间;在某点连续的函数,极限值等于函数值;分段函数在分段点处的连续性应通过“左、右极限与函数值相等”来确定;第 6~8 题要利用零点定理来求解,而第 9 题则要运用介值定理.

1. 求函数 $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - x - 6}$ 的连续区间,并求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 以及 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{8 + 2x - x^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \ln(2 \sin 2x);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5x - 8}}{x - 2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} - \sqrt{x^2 + x - 2}).$$

3. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\ln(1 + 2x)}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x\sqrt{1 + \sin^2 x} - x}.$$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + e^x, & x < 0; \\ a - x, & x \geq 0. \end{cases}$ 应当怎样选

择数 a , 能使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的函数? 并作出 $f(x)$ 的图形.

5. 当 a 为何值时, 函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x), & x \neq 0; \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续.

7. 证明: 方程 $x = a \sin x + b$ ($a > 0, b > 0$) 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

9. 证明: 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b,$$

则在 $[x_1, x_n]$ 上必有 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

6. 证明: 方程 $x^4 - 3x^2 = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

8. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无零点. 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号.

综合训练题

学号 _____ 姓名 _____

训练目的 本篇(章)基本概念、基本方法和基本计算的综合测试.

解题指导 求极限的方法很多,每种方法都有其局限性.许多习题可以用不同方法求解.解题时,要通过观察试题的类型确定解题的方法.要善于总结、积累.

一、求下列极限

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - 3x}{1 + 3x} \right)^{\frac{1}{x}}.$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}.$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+3)^5(x+5)^6}{x^{11} + 5x^{12}}.$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right).$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+\tan x}}{x^2(e^{2x}-1)}.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - \sqrt{x^2 + 1}).$

二、综合计算题

1. 设极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且

$$f(x) = 3x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x),$$

求 $f(x)$.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0; \\ a - x, & x \geq 0. \end{cases}$ 应当怎样

选择数 a , 能使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的函数?

2. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

三、证明题

2. 求函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & -1 \leq x < 0; \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ 的连续区间, 并判别间断点的类型.

1. 证明: 方程 $\tan x = \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 至少有一个小于

$\frac{\pi}{4}$ 的正根.

第二篇 一元函数微分学

第二章 导数与微分

基本训练题 1

学号

姓名

训练目的 理解导数的定义,利用导数公式和四则运算求导法则求一些简单函数的导数.

解题指导 注意以下知识点:导数的定义;导数的几何意义和物理意义;可导与连续的关系;分段函数在分段点处可导性的判别;和差积商的求导法则.

1. 设 $y = 5x^2$, 利用定义计算: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$.

2. 假定 $f'(x_0)$ 存在,按照导数的定义观察下列极限,指出 Δ 表示什么:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A.$$

3. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$ 是什么函数在哪一点的导数.

4. 求下列函数的导数:(提示:利用幂函数的导数公式)

(1) $y = \frac{1}{x^3}$;

(2) $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$;

(3) $y = \frac{x^3 \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

5. 运用导数解下列各题:

(1) 已知物体的运动规律 $s = t^3$ (m), 求这物体在 $t = 2$ s 时的速度;

(2) 求曲线 $y = \ln x$ 在 $x = e$ 处的切线方程和法线方程;

(3) 抛物线 $y = x^2$ 上哪一点的切线与直线 $y = 4x - 1$ 平行,写出该切线方程.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0; \\ x^2 + ax + b, & x > 0, \end{cases}$ 问 a, b 取何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.