

桥梁结构 有限元分析

蔺鹏臻 刘世忠 编著



科学出版社

www.sciencepress.com

U443/19

2008

桥梁结构有限元分析

蔺鹏臻 刘世忠 编著

刘凤奎 欧阳永金 主审

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书在杆系结构有限元基本理论的基础上,分别就桥梁结构分析中的静力、动力和结构稳定问题,建立了有限元求解的程序实现流程,并通过自编的2DSAP程序,详细介绍了有限元分析的实现过程。同时,对桥梁结构分析中的荷载横向分布、内力影响线、预应力效应、混凝土收缩、徐变效应、温度效应等问题的有限元分析方法,进行了详细的讲述。针对桥梁结构的特点,介绍了进行结构有限元分析的建模方法和分析要点。

本书可作为桥梁工程专业硕士研究生的程序设计类课程和土木工程专业(桥梁工程)本科生桥梁电算类课程的教学用书,同时可供从事桥梁结构分析的相关技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

桥梁结构有限元分析/蔺鹏臻,刘世忠编著. —北京:科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-021694-6

I. 桥… II. ①蔺…②刘… III. 桥梁结构-结构分析:有限元分析
IV. U443

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第055268号

责任编辑:陈捷 王志欣/责任校对:刘小梅

责任印制:刘士平/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年6月第一版 开本:B5(720×1000)

2008年6月第一次印刷 印张:14

印数:1—3 000 字数:275 000

定价:38.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

有限元方法是 20 世纪 60~70 年代发展起来的数值分析方法。目前,有限元方法广泛应用于各种大型、复杂的工程结构分析中,使得各种复杂的结构力学问题变得简单。对桥梁结构而言,其修建规模、结构形式的发展与有限元理论在结构分析中的应用密不可分。随着更多大跨度、复杂桥梁结构的修建及桥梁设计理论的发展,桥梁结构分析趋向于精细化和综合性。桥梁结构分析不仅要把握整体,同时要兼顾局部;不仅要进行基于线弹性理论的分析,特殊桥梁还要兼顾非线性分析;不仅要进行静力分析,同时要进行动力、稳定性分析。可以说,在桥梁结构设计、施工及科学研究中,采用有限元方法进行结构分析已成为桥梁结构分析的重要手段。

随着有限元技术的发展,大量的通用有限元程序及专业有限元程序被研发,并应用于桥梁工程实践中。作为一名从事桥梁相关工作的技术人员,在使用现有软件进行结构分析时,如果能够对结构有限元方法的基本理论、编程原理有所了解,并能掌握不同桥梁结构体系的建模重点,那么对灵活使用现有软件、甚至从事软件研发都有很大的帮助。这也正是本书编写的初衷。

本书共分 7 章,第 1 章介绍了基于位移法的杆系结构有限元静力分析的基本原理;第 2 章介绍了杆系结构有限元静力分析程序设计的主要流程,并以自编的二维杆系结构程序系统——2DSAP 为例,详细说明了杆系结构有限元静力分析程序的实现过程;第 3 章介绍了桥梁结构分析中的几个特殊问题的有限元分析原理,主要包括荷载横向分析计算、内力影响线计算、预应力效应计算、混凝土收缩、徐变效应计算及温度内力计算;第 4 章介绍了有限元方法在桥梁结构稳定分析中的应用,并结合 2DSAP 程序系统对其实现过程进行说明;第 5 章介绍了有限元方法在桥梁结构动力分析中的应用,包括自振特性分析、反应谱分析及时程分析的基本原理,并通过 2DSAP 程序系统介绍了自振特性分析的有限元实现过程;第 6 章介绍了桥梁结构分析的主要特点和各类型桥梁结构分析中的重点;第 7 章介绍了自编的包含结构静力、稳定及自振特性分析的二维杆系有限元程序系统——2DSAP 的程序流程、函数说明和输入数据格式。

本书第 1 章和第 3 章由兰州交通大学蔺鹏臻编写;第 2 章和第 7 章由兰州交通大学刘世忠编写;第 4 章由长安大学李加武、卢斌编写;第 5 章由西南交通大学李小珍编写;第 6 章由厦门市市政建设指挥部李少波编写。全书由蔺鹏臻、刘世忠统稿,由兰州交通大学刘凤奎教授、厦门市市政建设指挥部欧阳永金教授级高

级工程师主审。

本书的撰写得到了兰州交通大学“青蓝”人才工程基金和兰州交通大学“十一五”规划教材基金的资助，同时得到了兰州交通大学土木工程学院各位老师的大力支持；研究生卢鼎鑫、宋仿存、马雅林等同学进行了部分程序调试和文字整理工作，在此一并表示感谢。

由于作者编写水平有限，书中难免存在不当之处，敬请读者批评指正，以便再版时修正。

目 录

前言

第 1 章 杆系结构有限元分析基本原理	1
1.1 引言	1
1.2 局部坐标系下的单元刚度矩阵及坐标变换	4
1.2.1 铰接杆单元刚度矩阵	4
1.2.2 梁单元刚度矩阵	7
1.2.3 单元刚度矩阵的性质及力学意义	10
1.2.4 坐标变换	12
1.3 结点静力平衡方程组和结构刚度矩阵	15
1.4 等效结点荷载	24
1.4.1 移置原理	24
1.4.2 几种典型荷载的等效结点荷载	26
1.4.3 结点荷载总矢量	28
1.5 支承约束及强迫位移的处理方法	29
1.5.1 支承约束条件的处理方法	29
1.5.2 强迫位移的处理方法	30
1.6 杆系结构有限元法小结	31
第 2 章 杆系结构有限元静力分析程序系统	33
2.1 概述	33
2.2 结构刚度矩阵的方阵存储法	34
2.3 结点约束信息表和单元定位数组	40
2.3.1 结点约束信息表	40
2.3.2 单元定位数组和受约束结构刚度矩阵的组集	43
2.4 杆系结构计算程序	46
2.5 算例及其程序验证	48
第 3 章 桥梁结构荷载效应	55
3.1 荷载横向分布影响线计算	55
3.1.1 铰接板和铰接梁法	55
3.1.2 刚接梁法	59
3.2 桥梁结构纵向影响线计算	63

3.3	预应力效应分析	69
3.4	混凝土徐变、收缩效应分析	74
3.4.1	徐变、收缩的数学表达式	75
3.4.2	徐变、收缩的应力应变方程	77
3.4.3	徐变、收缩的有限元求解	79
3.5	温度效应分析	83
3.5.1	概述	83
3.5.2	温度自应力的计算	85
3.5.3	超静定结构的温度次内力及次应力	89
第4章	桥梁结构屈曲稳定分析	94
4.1	杆系结构稳定分析基本理论	94
4.1.1	稳定理论的发展	94
4.1.2	两类稳定问题	94
4.1.3	稳定问题求解方法	95
4.2	第一类稳定问题的有限元分析	96
4.2.1	杆单元的刚度分析	96
4.2.2	单元刚度矩阵及静力计算	99
4.3	屈曲临界荷载求解程序及其算例	102
4.3.1	结构稳定计算流程	102
4.3.2	算例及程序验证	103
4.4	桥梁结构中的屈曲稳定问题	105
4.4.1	桥梁结构中的失稳现象	105
4.4.2	桥梁结构失稳验算的阶段	106
第5章	桥梁结构的动力分析	107
5.1	桥梁结构的固有振动	107
5.1.1	桥梁固有振动分析的有限元法	107
5.1.2	固有振动计算的程序流程及算例	109
5.1.3	桥梁结构自振频率的近似计算	113
5.2	桥梁抗震计算的反应谱法	114
5.2.1	单质点弹性体系的地震反应谱法	115
5.2.2	多质点体系的反应谱分析	117
5.2.3	设计加速度反应谱	118
5.3	桥梁抗震计算的时程分析法	120
5.4	桥梁结构动力分析建模	122
5.4.1	建模的原则	122

5.4.2 各类桥型的动力分析模型	124
第6章 桥梁结构数值分析方法	129
6.1 桥梁结构分析的内容和特点	129
6.1.1 桥梁结构分析的内容	129
6.1.2 桥梁结构分析的特点	129
6.2 桥梁结构分析的建模方法	134
6.2.1 结构离散化的基本原则	134
6.2.2 局部构造的模拟方法	135
6.3 不同类型桥的结构分析	137
6.3.1 梁式桥的结构分析	137
6.3.2 拱桥的结构分析	147
6.3.3 斜拉桥的结构分析	153
6.3.4 悬索桥的结构分析	158
第7章 桥梁结构有限元程序系统	162
7.1 2DSAP 程序流程及输入数据	162
7.2 2DSAP 源程序	168
参考文献	215

第 1 章 杆系结构有限元分析基本原理

1.1 引言

1. 杆系结构有限元概述

当计算机问世后,为了利用这一有利的计算工具,在杆系结构分析中引入矩阵方法,形成了杆系结构有限元法。杆系结构矩阵分析方法所依据的力学原理仍然是结构力学的基本力学原理,解决任何超静定结构问题(除应力-应变关系外)都必须同时兼顾静力平衡和变形协调这两个方面。因此杆系结构有限元法根据基本未知量可分为两种方法:第一种为以杆件内力作为基本未知量的求解方法,称为“矩阵力法”;第二种为以杆件位移作为基本未知量的求解方法,称为“矩阵位移法”。由于矩阵力法的矩阵运算比矩阵位移法复杂,因此在实际工作中采用矩阵力法不多,而广泛采用矩阵位移法。

就基本概念而言,矩阵位移法与一般结构力学中的位移法并无不同。但引入矩阵工具后,可简洁地阐明分析原理和运算过程,并使全部计算求解过程变得十分规则,便于编制成通用性较强的计算机运算程序。

如图 1.1 所示的桁架,在荷载 P 作用下,各杆件的轴力是多少呢? 这是一个超静定问题。可以把三根杆件 14、24、34 看成组成桁架的三个“单元”,而整个桁架则是这三个单元的“组合体”。每个单元的轴力 N 是待求的未知数。假设各杆的几何性质及物理性质如下。

长度: $l_{14} = l_{34} = l_1, l_{24} = l_2$;

截面积: $A_{14} = A_{34} = A_1, A_{24} = A_2$;

弹性模量: $E_{14} = E_{34} = E_1, E_{24} = E_2$ 。

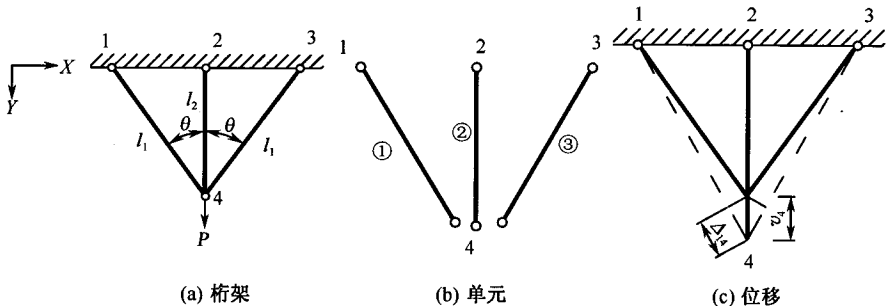


图 1.1 桁架结构图

由于有三个单元交汇于结点 4, 只利用平衡条件是不能求出各单元的轴力的, 因此必须分析变形条件。由材料力学可知, 等截面杆件在轴力 N 的作用下, 杆端位移为

$$\Delta = \frac{Nl}{EA} \quad (1.1)$$

由于对称, 结点 4 的竖向位移为 v_4 , 而结点 1、2、3 被固定, 于是各单元的位移可计算如下:

$$\Delta_{14} = v_4 \cos\theta, \quad \Delta_{24} = v_4, \quad \Delta_{34} = v_4 \cos\theta \quad (1.2)$$

再考虑结点 4 的平衡条件, 取结点 4 作为脱离体(图 1.2), 则 Y 方向的平衡要求为

$$2N_{1y} + N_{2y} = P \quad (1.3)$$

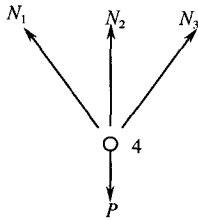


图 1.2 结点 4 的平衡

式中: N_{1y} 是单元①的杆端力在 Y 方向的投影; N_{2y} 是单元②的杆端力在 Y 方向的投影, 且 $N_{1y} = N_{3y}$ 。

由式(1.1)和式(1.2)可知

$$\begin{cases} N_{1y} = N_1 \cos\theta = \frac{E_1 A_1}{l_1} \Delta_{14} \cos\theta = \frac{E_1 A_1 \cos^2\theta}{l_1} v_4 = k_1 v_4 \\ N_{2y} = N_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2} \Delta_{24} = \frac{E_2 A_2}{l_2} v_4 = k_2 v_4 \end{cases}$$

(1.4)

其中, k_1 、 k_2 分别为单元①和单元②的刚度系数, 它们的物理含义是: 当单元的结点发生单位位移时, 单元的杆端力决定单元的几何性质和物理性质。

将式(1.4)代入式(1.3), 可得

$$(2k_1 + k_2)v_4 = P$$

由此可得结点 4 在 Y 方向的位移

$$v_4 = \frac{P}{2k_1 + k_2} \quad (1.5)$$

式中: $2k_1 + k_2$ 可称为结构的整体刚度系数。

利用已求得的位移及每一个单元的结点位移与杆端力的关系式(1.4)可求得各单元的轴力为

$$\begin{cases} N_{14} = N_{34} = N_1 = \frac{N_{1y}}{\cos\theta} = \frac{k_1 v_4}{\cos\theta} = \frac{k_1 P}{(2k_1 + k_2) \cos\theta} \\ N_{24} = N_2 = k_2 v_4 = \frac{k_2 P}{2k_1 + k_2} \end{cases} \quad (1.6)$$

综上所述, 利用位移为基本未知量, 通过建立结点静力平衡方程求解结点位移, 进而由各单元的结点位移与单元杆端力的关系式可求得单元的杆端力, 即单元内力。由此可以看出, 杆系结构矩阵位移法的分析求解过程主要包含以下三个方面。

1) 结构离散化

结构离散化是把给定的杆系结构按适当的方式划分成若干个杆件,每个杆件称为一个单元,用杆的轴线代表。各杆轴线之间的交点称为结点。按照自然数的顺序,对所有结点和单元进行编号。全部未知结点位移是整个问题中的基本未知量。

2) 单元分析

在矩阵位移法中,单元分析的中心是建立单元刚度矩阵。每个杆件单元都可看做在其两端结点处切开并从结构中取出的一个分离体。作用在杆单元两端截面上的结构内力称为单元结点力。单元结点力和单元结点位移都是未知的。单元分析的主要目的是建立用未知的结点位移来确定单元结点力的表达式。联系单元结点力与单元结点位移之间关系的变换矩阵称为单元刚度矩阵。

3) 系统分析

系统分析的任务是按照静力平衡与变形协调条件把作为分离体的各个单元重新组集成一个完整的结构进行求解。

对杆系结构分析的位移法而言,各杆之间仅在结点处相互连接。相交于某一结点的各个杆件,它们的杆端位移可用上述同一结点的位移表示,因而位移连续条件自动得到满足。

可见,在位移法中,把单元组集成完整结构的充分必要条件为结点静力平衡条件:汇交于某个结点的各个杆件对该结点的作用力与作用在该结点上的外荷载组成平衡力系(图 1.1 中的结点 4)。某一杆件对结点的作用力与结点对该杆件的作用力(单元结点力)大小相等,方向相反,因而可通过未知的结点位移予以表示。因此,结点静力平衡条件就体现为未知结点位移必须满足的条件。从而,结点平衡方程组就提供了确定全部未知结点位移的一组代数方程。对于线性弹性结构,这是一组对未知结点位移而言的线性代数方程组,即结构力学位移法中的正则方程组。方程组中的系数矩阵为结构刚度矩阵,各系数为刚度影响系数。

系统分析的主要任务如下:

- (1) 由单元刚度矩阵组集结构刚度矩阵;
- (2) 求解结点平衡方程组,解出全部未知结点位移;
- (3) 求得全部结点位移后,利用单元刚度矩阵计算各单元的内力。

在杆系结构的线弹性分析中,通常基于以下的几点假定。

(1) 假定位移和变形都是很小的,即假定在荷载作用下,结构内各点位移都远小于结构原来的尺寸,在建立平衡方程时,可不考虑结构的几何改变,按照未发生位移前的结构几何形态建立力的平衡关系;同时,假定结构内各点的应变和转角也是很小的,在研究结构变形时,可以略去应变和转角的一次幂及乘积项,这被称为小变形假定。

(2) 假定应力-应变关系服从虎克定律,即假定在外界因素作用下,结构内各点的应力和应变保持线性关系。

(3) 对线性弹性结构而言,叠加原理成立,即若干组荷载同时作用产生的效果等于各组荷载分别作用所产生的效果之和。

2. 杆系结构坐标系统

单元分析的核心是建立杆端力与杆端位移之间的关系式,即建立单元刚度矩阵。对单元分析而言,采用适合于该单元具体方位的坐标系会更方便。这种附属与某个单元的坐标系,称为单元坐标系或局部坐标系。

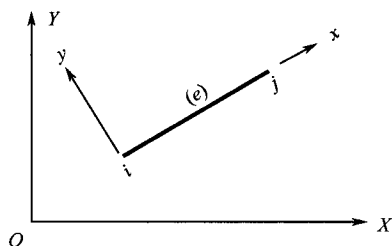


图 1.3 杆系结构坐标系统

如图 1.3 所示的等截面直杆,设其在整个结构中的编号为 e ,它连接着两个结点 i, j 。现以 i 为原点,以 i 向 j 的正方向为 x 轴的正方向,并以 x 轴的正向逆时针转 90° 为 y 轴的正方向,这样的坐标系即为局部坐标系。而反映结构整体坐标位置的坐标系 XOY 称为整体坐标系。

1.2 局部坐标系下的单元刚度矩阵及坐标变换

1.2.1 铰接杆单元刚度矩阵

1. 平面铰接杆

对于桁架结构(图 1.4),取 e 号单元,其端结点为 i, j 。每个结点位移自由度为 2,单元自由度为 4,局部坐标系下单元两端结点位移分量和结点力分量的正方向如图 1.5 所示。

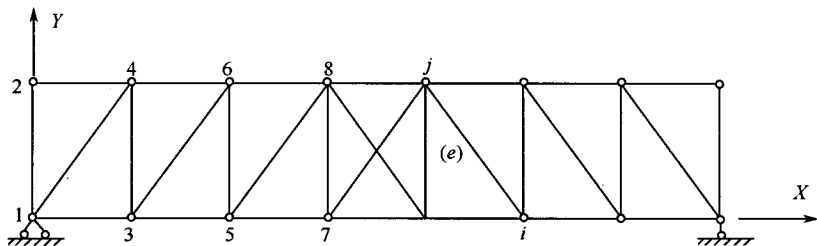
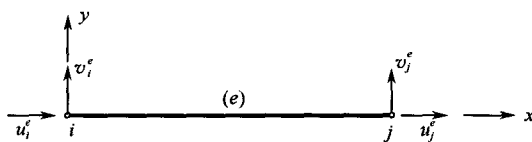
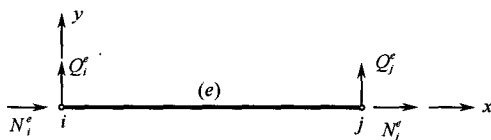


图 1.4 平面桁架

结点 i 和结点 j 对 e 号单元的作用力称为单元结点力。对铰接杆单元,结点



(a) 单元结点位移分量及其正方向



(b) 单元结点力分量及其正方向

图 1.5 单元结点位移、单元结点力的正方向及其编号

力为杆端截面上均匀分布的轴向应力的合成,即轴向力,如图 1.5(b)中的 N_i^e 、 N_j^e ,垂直于杆轴方向的结点力为零。

为方便起见,用列矢量 δ^e 和 F^e 表示 e 号单元的结点位移和结点力,即

$$\delta^e = \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \end{bmatrix}, \quad F^e = \begin{bmatrix} N_i^e \\ Q_i^e \\ N_j^e \\ Q_j^e \end{bmatrix}$$

由材料力学可知,轴向力与轴向变形(伸长与缩短)成正比,即

$$N_i^e = \frac{EA}{l}(u_i^e - u_j^e) \quad (1.7)$$

由 e 号单元的静力平衡条件有

$$N_j^e = -N_i^e = \frac{EA}{l}(-u_i^e + u_j^e) \quad (1.8)$$

因 $Q_i = Q_j = 0$,由式(1.7)和式(1.8)可知单元结点力和单元结点位移之间的关系可变为如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} N_i^e \\ Q_i^e \\ N_j^e \\ Q_j^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \end{bmatrix}$$

或缩写为

$$F^e = K^e \delta^e \quad (1.9)$$

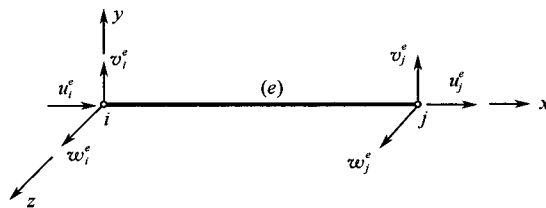
式中： \mathbf{K}^e 为局部坐标系下平面铰接杆的单元刚度矩阵，其具体形式为

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

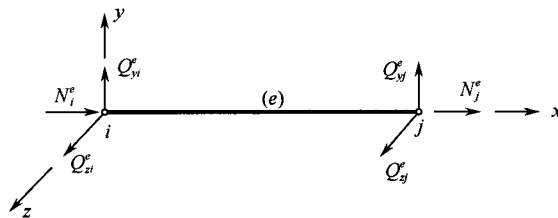
显然，使 e 号杆 i 端发生单位水平位移而保持其余结点位移分量为零状态下，各结点施加于 e 号单元的作用力为 \mathbf{K}^e 的第一列元素。仅由 j 端发生单位水平位移所引起的结点力为 \mathbf{K}^e 的第三列元素。

2. 空间铰接杆

空间铰接杆的每个铰接结点有三个独立线位移，单元结点位移与结点力的正方向及其编号如图 1.6 所示。



(a) 单元结点位移分量及其正方向



(b) 单元结点力分量及其正方向

图 1.6 空间铰接杆单元

式(1.8)和式(1.9)对空间铰接杆单元同样适用，因而得到空间铰接杆单元刚度矩阵：

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

1.2.2 梁单元刚度矩阵

1. 平面梁单元

结构力学中所遇到的杆件,大部分是受弯的,如图 1.7 所示的平面刚架是通过各单元在结点处刚接而组合成的结构,任一单元 e 在两端各有三个单元结点力分量,即 i 端的 N_i 、 Q_i 、 M_{zi} 以及 j 端的 N_j 、 Q_j 、 M_{zj} ;与此相对应有六个结点位移分量,即 i 端的 u_i 、 v_i 、 θ_{zi} 和 j 端的 u_j 、 v_j 、 θ_{zj} 。单元结点力及结点位移分量的正方向与局部坐标系的正方向一致,如图 1.8 所示。

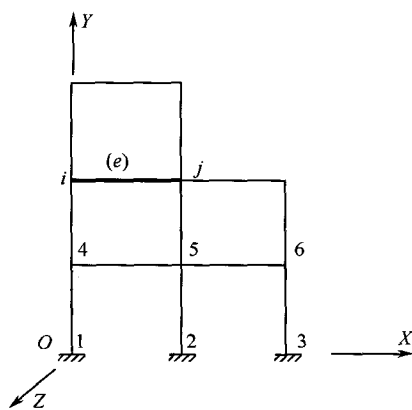


图 1.7 平面刚架

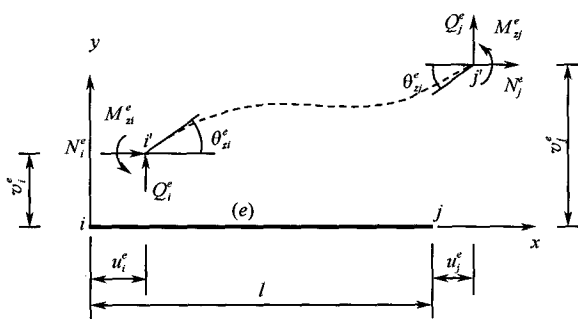


图 1.8 单元结点位移、单元结点力的正方向及其编号

根据结构力学知识,当单元内部无荷载时,可根据单元的静力平衡方程,得到结点位移和结点力之间的关系式为

$$\begin{cases} N_i^e = \frac{EA}{l}(u_i^e - u_j^e) \\ Q_i^e = \frac{12EI_z}{l^3}v_i^e + \frac{6EI_z}{l^2}\theta_{zi}^e - \frac{12EI_z}{l^3}v_j^e + \frac{6EI_z}{l^2}\theta_{zj}^e \\ M_{zi}^e = \frac{6EI_z}{l^2}v_i^e + \frac{4EI_z}{l}\theta_{zi}^e - \frac{6EI_z}{l^2}v_j^e + \frac{2EI_z}{l}\theta_{zj}^e \\ N_j^e = -\frac{EA}{l}(u_i^e - u_j^e) \\ Q_j^e = -\frac{12EI_z}{l^3}v_i^e - \frac{6EI_z}{l^2}\theta_{zi}^e + \frac{12EI_z}{l^3}v_j^e - \frac{6EI_z}{l^2}\theta_{zj}^e \\ M_{zj}^e = \frac{6EI_z}{l^2}v_i^e + \frac{2EI_z}{l}\theta_{zi}^e - \frac{6EI_z}{l^2}v_j^e + \frac{4EI_z}{l}\theta_{zj}^e \end{cases}$$

表示为矩阵的形式则有

$$\begin{bmatrix} N_i^e \\ Q_i^e \\ M_{zi}^e \\ N_j^e \\ Q_j^e \\ M_{zj}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \theta_{zi}^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \theta_{zj}^e \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

式中： I_z 为截面对局部坐标系 z 轴的抗弯惯矩。

式(1.12)为用矩阵表示的平面梁单元在局部坐标系下的单元平衡方程(或称为刚度方程),可简写为

$$F^e = K^e \delta^e \quad (1.13)$$

式中:

$$F^e = \begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^e \\ Q_i^e \\ M_{zi}^e \\ N_j^e \\ Q_j^e \\ M_{zj}^e \end{bmatrix}, \quad \delta^e = \begin{bmatrix} \delta_i^e \\ \delta_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \theta_{zi}^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \theta_{zj}^e \end{bmatrix}$$

F^e 、 δ^e 分别为单元的结点力列向量和结点位移列向量,而

$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

称为单元的刚度矩阵。

单元平衡方程式(1.13)也可写成如式(1.15)所示的分块形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^e \\ \mathbf{F}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e & \mathbf{K}_{ij}^e \\ \mathbf{K}_{ji}^e & \mathbf{K}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_i^e \\ \boldsymbol{\delta}_j^e \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

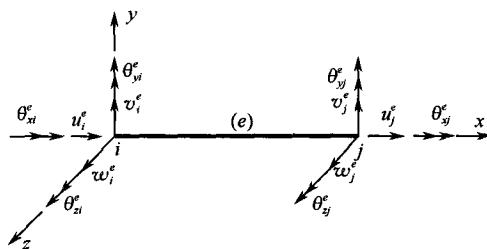
式中的每个子矩阵 $\mathbf{K}_{ii}^e, \dots, \mathbf{K}_{jj}^e$ 都是一个三阶子块。若将 \mathbf{K}_{ii}^e 简称为 e 号杆 i 端的近端刚度, 则 \mathbf{K}_{ij}^e 称为 i 端的远端刚度。同样, 对 e 号杆 j 端而言, \mathbf{K}_{ji}^e 为其近端刚度, \mathbf{K}_{jj}^e 为其远端刚度。

2. 空间梁单元

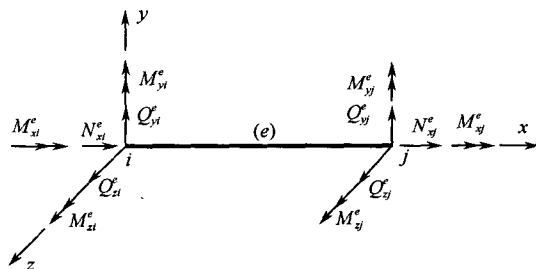
以上全部讨论都可以很容易地推广应用于建立局部坐标系下空间梁单元的单元刚度矩阵。只是对空间梁单元而言, 每个结点具有 6 个位移自由度, 即三个线位移和三个截面转角。单元结点位移分量的正方向和单元结点力分量的正方向完全相同, 如图 1.9 所示。所有截面转角均以绕局部坐标系坐标轴正向转动为正。单元结点位移列阵与结点力列阵分别为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta}_i^e = [u_i^e & v_i^e & w_i^e & \theta_{xi}^e & \theta_{yi}^e & \theta_{zi}^e]^T \\ \boldsymbol{\delta}_j^e = [u_j^e & v_j^e & w_j^e & \theta_{xj}^e & \theta_{yj}^e & \theta_{zj}^e]^T \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i^e = [N_{xi}^e & Q_{yi}^e & Q_{zi}^e & M_{xi}^e & M_{yi}^e & M_{zi}^e]^T \\ \mathbf{F}_j^e = [N_{xj}^e & Q_{yj}^e & Q_{zj}^e & M_{xj}^e & M_{yj}^e & M_{zj}^e]^T \end{cases} \quad (1.17)$$



(a) 单元结点位移分量及其正方向



(b) 单元结点力分量及其正方向

图 1.9 空间梁单元