



Б.П. 吉米多维奇数学分析

# 习题精选精析

2

4462题精选2340

题型涵盖全面

解题思路点津

方法经典独到

主 编 北京大学数学科学学院 张新国

编 写 双博士数学课题组

主 持 双博士网校 [www.bbdd.cc](http://www.bbdd.cc)

策划 胡东华

最新版

科学技术文献出版社

Б. П. 吉米多维奇

## 数学分析习题精选精析(2)

主 编 北京大学数学科学学院 张新国  
编 写 双博士数学课题组  
支 持 双博士网校 **www.bbdd.cc**  
总策划 胡东华

科学技术文献出版社  
Scientific and Technical Documents Publishing House  
· 北京 ·

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标(见右图);该图标已由国家商标局注册登记。未经本策划人同意,禁止其他单位或个人使用。



出 版 者:科学技术文献出版社  
邮 购 部 电 话:(010)82608021  
门 市 部 电 话:(010)62534447/62543201  
发 行 部 电 话:(010)82608013/82608022  
发 行 部 传 真:(010)82608039

E-mail:sbs@bbdd.cc

策 划 编 辑:胡东华  
责 任 编 辑:何卫峰  
责 任 校 对:徐盼欣 何卫峰  
封 面 设 计:胡东华

发 行 者:北京双博士图书公司  
全国各地新华书店经销

印 刷 者:北京高岭印刷有限公司  
版 ( 印 ) 次:2005 年 8 月第 1 版第 1 次印刷  
开 本:850×1168 32 开  
字 数:386 千字  
印 张:10  
定 价:13.00 元

©版权所有 违法必究

盗版举报电话:(010)82608035(著作权者)

也可发短信至 10601089101858

<http://www.bbdd.cc> (双博士网校)

如有字迹不清、缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换。

# 前 言

自上世纪五十年代初,Б. П. 吉米多维奇所著《数学分析习题集》中译本问世以来,该书对我国从事数学分析教学的广大师生产生了深刻的影响,很多人以解其中习题作为掌握、提高数学分析能力的手段、捷径。事实上,这本习题集也确实起到了这个作用。

同时,我们在教学实践中发现,原习题集收录了四千四百余道习题,数量过多;内容及解题方法重复率高;习题的解法过于拘泥于内容的编排;有些习题对于国内读者来说过于简单,而有些习题的解法又过于繁琐。有鉴于此,我们从中精选了二千三百余道难度适中有一定代表性的习题,由多年从事《数学分析》教学的作者作出力求较为简洁的解法,以适应广大国内数学分析学习者的需要。虽然我们以作出习题的最佳解法为目标,但因作者的水平有限及数学学科自身的特点,本习题集所给出的解答未必是最好的。因此本书仅供广大读者参考使用。本习题集精选出原 Б. П. 吉米多维奇习题集的 4462 道中的 2340 道进行精解精析,编排遵循 Б. П. 吉米多维奇《数学分析习题集》的顺序,即函数与极限、单变量函数的微分学、不定积分、定积分、级数、多变量函数的微分学、带参变量的积分、重积分、曲线积分及曲面积分等,把它们分成三册,这也与国内同类大部分教材内容的顺序相仿。

当然,数学分析的学习,做题仅仅是一个方面,关键是培养综合分析能力,数学逻辑思维,目的是掌握数学分析的精髓。希

望该习题集能起到抛砖引玉的效果。

限于作者水平,加之时间仓促,该习题集定有不妥之处,恳请热心读者批评指正,以便再版时做得更为完善。

### 双博士奉献:

1. 购书可获幸运奖:具体方法为:刮开本书数码防伪标识,如果您所购本书的ID数字最末4位幸运数字为6688,可将该防伪标识及购书小票一并邮至:北京市海淀区苏州街18号长远天地大厦B1座十二层双博士图书邮购部(1206)(邮编100080),可获200元现金回赠。来信请注明您的太平洋卡或农行卡号及姓名。本幸运奖自实施以来,已产生200元大奖数名。详情请登录[www.bbdd.cc](http://www.bbdd.cc)。

2. 本书均贴有数码防伪标识(由10位ID和6位PW组成),凭此ID和PW可登录双博士网校([www.bbdd.cc](http://www.bbdd.cc)),免费获得30积分,享受相对应的黄金会员权限。在使用本书过程中遇到问题可登录双博士网校[www.bbdd.cc/bbs/](http://www.bbdd.cc/bbs/)我爱双博士下面留言提问,有问必答,也可发手机短信至10601089101858。另外双博士网校在全国举办考研专业课辅导(西医、经济类)远程教育网络班及面授班。欲知详情请登录[www.bbdd.cc](http://www.bbdd.cc)。

3. 全国有三分之一的大学生正在使用双博士图书,以上举措为双博士对全国大学生的真情奉献!



### 来自北京大学研究生会的感谢信

双博士: 您好!

首先感谢您对北京大学“十佳教师”评选活动的热情支持和无私帮助!师恩难忘,北京大学“十佳教师”评选活动是北京大学研究生会的品牌活动之一,是北京大学所有在校研究生和本科生对恩师情谊的最朴素表达。双博士作为大学教学辅导及考研领域全国最大的图书品牌之一,不忘北大莘莘学子和传道授业的老师,其行为将永久的被北大师生感怀和铭记。

作为考研漫漫征途上的过来人,双博士曾陪伴我们度过无数个考研岁月的日日夜夜,曾带给我们无数个明示和启发,当然也带给我们今天的成功。

特致此信,向双博士表达我们内心长久以来的感激之情,并祝愿双博士事业蒸蒸日上。

北京大学研究生会

二零零二年十二月

# 目 录

## 第三章 不定积分

|                      |      |
|----------------------|------|
| §1 最简单的不定积分 .....    | (1)  |
| §2 有理函数的积分法 .....    | (33) |
| §3 无理函数的积分法 .....    | (43) |
| §4 三角函数的积分法 .....    | (45) |
| §5 各种超越函数的积分法 .....  | (56) |
| §6 函数的积分法的各种例子 ..... | (61) |

## 第四章 定积分

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| §1 定积分作为和的极限 .....      | (66)  |
| §2 利用不定积分计算定积分的方法 ..... | (71)  |
| §3 中值定理 .....           | (77)  |
| §4 广义积分 .....           | (102) |
| §5 面积的计算法 .....         | (111) |
| §6 弧长的计算法 .....         | (119) |
| §7 体积的计算法 .....         | (124) |
| §8 旋转曲面表面积的算法 .....     | (134) |
| §9 矩的计算法, 重心的坐标 .....   | (137) |
| §10 力学和物理学中的问题 .....    | (140) |

|                      |       |
|----------------------|-------|
| § 11. 定积分的近似算法 ..... | (144) |
|----------------------|-------|

## 第五章 级数

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| § 1 数项级数、同号级数收敛性的判别法 ..... | (156) |
| § 2 变号级数收敛性的判别法 .....      | (180) |
| § 3 级数的运算 .....            | (192) |
| § 4 函数项级数 .....            | (195) |
| § 5 幂级数 .....              | (228) |
| § 6 傅立叶级数 .....            | (268) |
| § 7 级数求和法 .....            | (282) |
| § 8 利用级数求定积分之值 .....       | (292) |
| § 9 无穷乘积 .....             | (297) |
| § 10 斯特林格公式 .....          | (306) |
| § 11 用多项式逼近连续函数 .....      | (309) |

## 第三章 不定积分

### § 1 最简单的不定积分

利用最简积分表, 求出下列积分:

【1628】  $\int (3 - x^2)^3 dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 
$$\begin{aligned}\int (3 - x^2)^3 dx &= \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6) dx \\ &= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C.\end{aligned}$$

【1629】  $\int x^2(5 - x)^4 dx$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 
$$\begin{aligned}\int x^2(5 - x)^4 dx &= \int x^2(625 - 500x + 150x^2 - 20x^3 + x^4) dx \\ &= \int (625x^2 - 500x^3 + 150x^4 - 20x^5 + x^6) dx \\ &= \frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + C.\end{aligned}$$

【1630】  $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) dx$



【思路】 利用最简积分表求积分

$$\begin{aligned}\text{【解析】} \quad & \int (1-x)(1-2x)(1-3x)dx \\ &= \int (1-6x+11x^2-6x^3)dx \\ &= x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.\end{aligned}$$

$$\text{【1631】} \quad \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\begin{aligned}\text{【解析】} \quad & \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) dx \\ &= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1632】} \quad \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\text{【解析】} \quad \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$$

$$\text{【1633】} \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\text{【解析】} \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

$$\text{【1634】} \quad \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt{x}} dx$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\begin{aligned}\text{【解析】} \quad & \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}\right) dx \\ &= \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1635】} \quad \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 
$$\begin{aligned}\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1-3x^2+3x-x^3}{x^3\sqrt[3]{x}} dx \\&= \int (x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}) dx \\&= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) + C.\end{aligned}$$

【1636】  $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 
$$\begin{aligned}\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x} \sqrt{x} dx &= \int (1 - \frac{1}{x^2}) x^{\frac{3}{2}} dx \\&= \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{5}{2}}) dx, \\&= \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{4(x^2 + 7)}{7\sqrt{x}} + C.\end{aligned}$$

【1637】  $\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 
$$\begin{aligned}\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx &= \int \frac{(2x + \sqrt[3]{9x^2} - 2\sqrt{2x} \cdot \sqrt[3]{3x})}{x} dx \\&= \int (2 - 2\sqrt[6]{72}x^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}) dx \\&= 2x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2} + C.\end{aligned}$$

【1638】  $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx &= \int \frac{\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2}}{x^3} dx \\&= \int \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx \\&= \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}) dx \\&= \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1639】} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

【思路】 利用用最简积分表求积分

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int \frac{(1+x^2-1)}{1+x^2} dx \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctan x + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1640】} \int \frac{x^2}{1-x^2} dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \int \frac{x^2}{1-x^2} dx &= - \int \frac{(1-x^2-1)}{1-x^2} dx \\ &= \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right) dx \\ &= -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1641】} \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx &= \int \frac{(x^2-1+4)}{x^2-1} dx \\ &= \int \left(1 + \frac{4}{x^2-1}\right) dx \\ &= x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1643】} \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx &= \int \left( \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| - \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1644】} \int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

【思路】 利用用最简积分表求积分

$$\begin{aligned}\text{【解析】} \quad \int (2^3 + 3^x)^2 dx &= \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1646】} \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\begin{aligned}\text{【解析】} \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx \\ &= \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1647】} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\text{【解析】} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

$$\text{【1648】} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$$

【思路】 利用函数的积分公式

$$\begin{aligned}\text{【解析】} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= \int \sqrt{1 - 2\sin x \cos x} dx \\ &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx \\ &= \int [\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)](\cos x - \sin x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1649】} \quad \int \cot^2 x dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\text{【解析】} \quad \int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C.$$

$$\text{【1650】} \quad \int \tan^2 x dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\text{【解析】} \quad \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C.$$

$$\text{【1651】} \quad \int (a \sinh x + b \cosh x) dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】  $\int (ashx + bchx)dx = achx + bshx + C.$

【1652】  $\int th^2 x dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】  $\int th^2 x dx = \int (1 - \frac{1}{ch^2 x})dx = x - thx + C.$

【1653】  $\int coth^2 x dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】  $\int coth^2 x dx = \int (1 + \frac{1}{sh^2 x})dx = x - cothx + C.$

求出下列积分:

【1655】  $\int \frac{dx}{x+a}.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】  $\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{1}{x+a} d(x+a) = \ln|x+a| + C.$

【1656】  $\int (2x-3)^{10} dx.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】 
$$\begin{aligned} \int (2x-3)^{10} dx &= \int \frac{1}{2} (2x-3)^{10} d2x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} (2x-3)^{11} + C \\ &= \frac{1}{22} (2x-3)^{11} + C. \end{aligned}$$

【1657】  $\int \sqrt[3]{1-3x} dx.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】 
$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{1-3x} dx &= -\frac{1}{3} \int \sqrt[3]{1-3x} d(1-3x) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C \\ &= -\frac{1}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$[1658] \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$$

【思路】 利用函数积分的基本公式

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} &= -\frac{1}{5} \int \frac{d(2-5x)}{\sqrt{2-5x}} \\ &= -\frac{1}{5} \cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{5} \sqrt{2-5x} + C. \end{aligned}$$

$$[1659] \int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}.$$

【思路】 利用函数积分的基本公式

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} &= \frac{1}{5} \int \frac{d(5x-2)}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) (5x-2)^{-\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}} + C. \end{aligned}$$

$$[1660] \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx.$$

【思路】 利用函数积分的基本公式

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx &= \int \frac{(1-x)^{\frac{2}{5}}}{1-x} dx \\ &= \int (1-x)^{-\frac{3}{5}} dx \\ &= -\frac{5}{2} \sqrt[5]{(1-x)^2} + C. \end{aligned}$$

$$[1661] \int \frac{dx}{2+3x^2}.$$

【思路】 利用函数积分的基本公式

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \int \frac{dx}{2+3x^2} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\sqrt{3}x}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{d(\sqrt{\frac{3}{2}}x)}{1 + (\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C.$$

【1663】  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C.$$

【1665】  $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】  $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx = \int e^{-x} dx + \frac{1}{2} e^{-2x} dx$   
 $= -(e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x}) + C.$

【1666】  $\int (\sin 5x - \sin 5a) dx.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】  $\int (\sin 5x - \sin 5a) dx = \int \frac{1}{5} \sin 5x d5x - \int \sin 5a dx$   
 $= -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5a + C.$

【1667】  $\int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】  $\int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})} = \int \frac{\frac{1}{2} d(2x + \frac{\pi}{4})}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}$   
 $= -\frac{1}{2} \cot(2x + \frac{\pi}{4}) + C.$

**【1669】**  $\int \frac{dx}{1 - \cos x}.$

**【思路】** 利用函数积分的基本公式

**【解析】** 
$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\cot \frac{x}{2} + C.$$

**【1671】**  $\int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)]dx.$

**【思路】** 利用函数积分的基本公式

**【解析】** 
$$\int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)]dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \operatorname{sh}(2x+1)d(2x+1) + \frac{1}{2} \int \operatorname{ch}(2x-1)d(2x-1)$$

$$= \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(2x+1) + \operatorname{sh}(2x-1)] + C.$$

**【1672】**  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}.$

**【思路】** 利用函数积分的基本公式

**【解析】** 
$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = 2\operatorname{th} \frac{x}{2} + C.$$

**【1673】**  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}.$

**【思路】** 利用函数积分的基本公式

**【解析】** 
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d\frac{x}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = -2\operatorname{coth} \frac{x}{2} + C.$$

用适当地变换被积函数的方法来求下列积分:

**【1674】**  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

**【思路】** 利用函数积分的基本公式



【解析】 
$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= - \int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

【1675】  $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】 
$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx &= \frac{1}{3} \int (1+x^3)^{\frac{1}{3}} dx^3 \\ &= \frac{1}{3} \int (1+x^3)^{\frac{1}{3}} d(1+x^3) \\ &= \frac{1}{4} (1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C.\end{aligned}$$

【1676】  $\int \frac{x dx}{3-2x^2}.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】 
$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{3-2x^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{3-2x^2} = -\frac{1}{4} \int \frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} \\ &= -\frac{1}{4} \ln|3-2x^2| + C.\end{aligned}$$

【1677】  $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】 
$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{2(1+x^2)} + C.\end{aligned}$$

【1678】  $\int \frac{x dx}{4+x^4}.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】 
$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{4+x^4} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{2^2 + (x^2)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{d \frac{x^2}{2}}{1 + (\frac{x^2}{2})^2} \\ &= \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2} + C.\end{aligned}$$