

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

工程振动理论与测试技术

*Engineering Vibration Theory
and Testing Techniques*

刘习军 贾启芬 编著



高等教育出版社

内容提要

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

工程振动理论与测试技术

Engineering Vibration Theory and Testing Techniques

刘习军 贾启芬 编著

高等教育出版社

内容提要

本书为教育部研究生工作办公室推荐的研究生教学用书。本书共分两篇 16 章。第一篇系统地介绍了结构振动和机械振动的基本原理及其在工程中的应用。内容主要包括:单自由度系统、多自由度系统和弹性体的自由振动、受迫振动的理论和方法,振动控制理论、非线性振动理论以及在工程中行之有效的数值计算方法、有限元法等。第二篇论述了有关工程振动测试技术的基本理论及现代工程测试技术在工程中的实际应用。内容主要包括:振动传感器、测试系统、激振设备和激光测振仪的工作原理及应用和校准,基本振动参数的测量、模拟平稳信号分析、数字信号分析、实验模态分析简介、参数识别及工程应用实例。

本书内容丰富,通俗易懂,由浅入深,以务实为根本,既可作为高等工科院校研究生或力学专业本科生的工程振动理论与测试技术课程的教材或教学参考书,也适合于从事机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑和水利等的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程振动理论与测试技术/刘习军,贾启芬编著.
北京:高等教育出版社,2004.11
ISBN 7-04-013841-7

I.工... II.①刘...②贾... III.①工程力学-振动理论-研究生-教材②工程力学-振动测量-测试技术-研究生-教材 IV.TB123

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 091691 号

策划编辑	赵湘慧	责任编辑	胡 纯	封面设计	李卫青
责任绘图	朱 静	版式设计	史新薇	责任校对	王效珍
责任印制	韩 刚				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2004 年 11 月第 1 版
印 张	33.5	印 次	2004 年 11 月第 1 次印刷
字 数	560 000	定 价	52.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号: 13841-00

前 言

工程振动问题是近代物理学和科学技术众多领域中的重要课题。随着生产技术的发展,动力结构有向大型化、高速化、复杂化和轻量化发展的趋势,由此而带来的工程振动问题更为突出。工程振动在当今不仅作为基础科学的一个重要分支,而且正走向工程科学发展的道路,它在机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑和水利等工业技术部门中占有愈来愈重要的地位。因此,掌握工程振动理论与测试技术的基本概念、原理和分析方法,从而解决现代科学技术和工程实际问题中的振动问题是十分重要的。

解决工程振动问题有两种方法。一种是解析的方法,即计算方法。它主要是通过建立理论模型的运动微分方程组,通过理论求解得到动力系统的响应,从而达到解决振动问题的目的。此内容在本书第一篇加以介绍。另一种方法是工程测试的方法,即实验方法。它是采用某种激励的方法使系统产生一定的振动响应,或通过现场实测,利用有关仪器、设备直接得到系统的响应,从而达到解决振动问题的目的;或者利用所得到的响应结果,进行参数识别,从而验证第一种方法的正确性,推动理论分析的发展。此内容在本书第二篇加以介绍。

上述两种方法具有相辅相成的作用。两种方法的结合运用是解决工程振动问题的有效方法。鉴于此,本书在编写过程中,将两种方法既融会贯通,又独立成篇,以利于读者参考、查阅及自学。本书在编写过程中本着由浅入深、通俗易懂的原则,以务实为根本,着重介绍了有关的基本概念和原理,从而避免了繁琐的数学推导。它为工程技术人员的初学和应

用创造了有利条件。本书在编写方法上,一是确定了基本要求和学习重点,加强了基本概念、基本理论和基本分析方法的应用;二是适度加强了基本功训练,引导学习者首先掌握分析问题的方法和思路,进而增强逻辑思维能力和解决问题的能力,为其自学、深造和拓宽知识打下坚实的基础;三是大胆地推陈出新,注意引进新概念、新理论、新方法、新技术和新科技成果,根据工程振动理论与测试技术的特点精选经典内容,提高起点,结合工程实际,反映现代分析方法、数值计算分析和工程测试技术的发展等等。以上三点构成了本书的特色。

本书共分 16 章:第 1、2 章简要介绍了确定性振动波形分析和频谱分

析方法,讨论了单自由度无阻尼及有阻尼系统的自由振动和计算固有频率的几种常用方法。第3、4章重点讨论了两个自由度系统的振动理论和方法,多自由度系统振动的强迫振动的振型叠加法等经典和现代的计算方法,并且着重论述了实际工程问题的力学模型的简化过程。第5~7章介绍了解决多自由度振动系统中行之有效的数值计算方法及有限元法,并且着重讨论了振动理论在工程中的应用——振动控制理论。第8、9章介绍了杆、梁、环、板等连续弹性体的振动理论,其中包括剪切应变、转动惯量、轴向力对梁的横向振动的影响,梁、环、板等弹性体的复杂振动等内容。第10章介绍了非线性振动理论的近似解析法,结合工程实例讨论了各种方法的应用范围及特点,解释了一些典型的非线性振动现象。第11、12章简要介绍了振动测试中的基本概念、传感器的机械接收原理和机电变换原理以及振动测量系统,其中包括:微分、积分放大器,滤波器,激振设备以及各种传感器的测量系统和振动测试系统的校准。第13章着重论述了基本振动参数的测量方法及仪器设备,模拟平稳振动信号的测量结果分析、波形分析、模拟式频谱分析等内容。第14~16章介绍了动态数字信号分析技术及动态振动信号的频率分析方法和实验模态分析简介。其中激光测振原理及应用是近年来在振动测试领域发展起来的新技术,并得到迅速的广泛普及应用。各章之中还包含部分工程应用实例。本书配有相应的习题、部分习题答案及附录等。

本书的主要内容是对多年研究生课程讲授的经验总结,是在天津大学出版社出版的、由刘习军等编的《工程振动与测试技术》的基础上改编而成的,增加了有限元法、振动控制、非线性振动、数字滤波器、激光测振仪等内容,并对其他章节进行了大幅度修改。本书经过有关专家详细审阅,他们提出了非常宝贵的意见;在编写过程中还得到了教研室老师的大力支持,在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书第1~10章由贾启芬执笔,第11~15章由刘习军执笔,第16章由王世斌执笔,最后由刘习军、贾启芬统稿。刘国英、张素霞、王立刚、黄元英、钟顺、王德利、李向东等同志参加了习题解答及制图和审校等工作。

本书可作为高等工科院校研究生或力学专业本科生的工程振动理论与测试技术课程的教材或教学参考书,也可供从事机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑和水利等工程技术人员参考。

限于水平,错误与不妥之处在所难免,恳请广大同行及读者指正。

编 者

2003年7月于天津大学

目 录

第一篇 工程振动理论

引言	1
第 1 章 振动的基本理论	4
1.1 振动激励函数	4
1.2 简谐振动	7
1.3 周期振动的谐波分析	11
1.4 非周期函数的连续频谱	14
1.5 拉普拉斯变换	16
习题	18
第 2 章 单自由度系统的振动	20
2.1 无阻尼系统的自由振动	20
2.2 计算固有频率的能量法	26
2.3 瑞利法	28
2.4 有阻尼系统的衰减振动	31
2.5 简谐激励作用下的受迫振动	39
2.6 周期激励作用下的受迫振动	50
2.7 任意激励作用下的受迫振动	51
2.8 响应谱	59
习题	61
第 3 章 两自由度系统的振动	68
3.1 两自由度系统的自由振动	68
3.2 拍振	75
3.3 坐标的耦联	77
3.4 两自由度系统的受迫振动	81
习题	83
第 4 章 多自由度系统的振动	87
4.1 变分原理与拉格朗日运动方程	87
4.2 多自由度系统自由振动的运动微分方程	96
4.3 固有频率—主振型	103
4.4 主坐标和正则坐标	110
4.5 固有频率相等的情形	116

4.6	无阻尼振动系统对初始条件的响应	124
4.7	质量、刚度的变化对固有频率的影响	129
4.8	无阻尼振动系统对激励的响应	130
4.9	有阻尼振动系统对激励的响应	135
	习题	140
第5章	多自由度振动系统的数值方法	146
5.1	瑞利能量法	146
5.2	里兹法	149
5.3	邓克利法	153
5.4	矩阵迭代法	154
5.5	子空间迭代法	159
5.6	传递矩阵法	163
	习题	173
第6章	振动控制	174
6.1	振动的被动控制技术	174
6.2	隔振	176
6.3	阻振	178
6.4	动力减振器	179
6.5	振动的主动控制技术	189
	习题	191
第7章	振动问题的有限元法	193
7.1	单元体的运动方程式	193
7.2	单元体的特性分析	196
7.3	质量矩阵	201
7.4	坐标转换	202
7.5	固有频率及主振型	210
7.6	系统的响应	212
	习题	214
第8章	弹性体的一维振动	216
8.1	杆的纵向振动	216
8.2	杆的纵向受迫振动	224
8.3	梁的横向自由振动	231
8.4	梁的横向受迫振动	236
8.5	转动惯量、剪切应变对梁振动的影响	242
8.6	轴向力作用对梁的横向振动的影响	244
8.7	梁横向振动的近似解法	246
	习题	253
第9章	弹性体的复杂振动	259

9.1 梁的双向振动	259
9.2 梁的弯曲和扭转的联合振动	261
9.3 圆环的振动	265
9.4 薄板的横向振动	269
9.5 矩形薄板的自由振动	278
9.6 圆形薄板的横向振动	285
第 10 章 非线性振动	292
10.1 基本摄动法	292
10.2 久期项	295
10.3 平均法	297
10.4 渐进法	300
10.5 多重尺度法	307
习题	313

第二篇 测试技术

引言	315
第 11 章 振动传感器的工作原理	318
11.1 工程振动测试方法	318
11.2 传感器的机械接收原理	319
11.3 传感器的机电变换原理	329
习题	350
第 12 章 振动测量系统	351
12.1 微积分放大器	351
12.2 滤波器	359
12.3 压电加速度传感器测量系统	365
12.4 电涡流式传感器的测量系统	372
12.5 激振设备	374
12.6 振动测试仪器的校准	382
习题	389
第 13 章 基本振动参数的测量及模拟平稳信号分析	390
13.1 简谐振动频率的测量	390
13.2 机械系统固有频率的测量	396
13.3 简谐振动幅值的测量	399
13.4 同频简谐振动相位差的测量	402
13.5 衰减系数的测量	406
13.6 模拟平稳信号分析	409
习题	420
第 14 章 数字信号分析	421

14.1	数据处理基本知识	421
14.2	傅里叶变换	428
14.3	有限离散傅里叶变换	430
14.4	快速傅里叶变换	433
14.5	混淆与采样定理	437
14.6	泄漏与窗函数	443
14.7	数字滤波器	448
14.8	噪声与平均技术	453
14.9	数字信号分析仪的工作原理及简介	456
	习题	460
第 15 章	实验模态分析简介	462
15.1	基本概念	462
15.2	多自由度系统的传递函数矩阵和频响函数矩阵	468
15.3	传递函数的物理意义	469
15.4	多自由度系统的模态参数识别	472
15.5	模态分析中的几种激振方法	477
15.6	模态分析的实验过程	479
15.7	中华文物龙洗的实验研究	481
	习题	485
第 16 章	激光测振原理及应用	486
16.1	概述	486
16.2	激光干涉基础	487
16.3	时间平均全息方法	488
16.4	激光多普勒效应	491
16.5	激光多普勒光学信息处理	494
16.6	激光多普勒测振仪的工程应用	496
	习题	501
附录		502
附录一	简单弹性元件的弹性常数	502
附录二	卷积积分表	504
附录三	卷积表	505
附录四	常用周期信号的傅里叶系数表	506
附录五	傅里叶变换表	508
附录六	拉普拉斯逆变换表	511
习题答案		513
参考文献		524

第一篇 工程振动理论

引言

机械振动是指物体在其稳定的平衡位置附近所作的往复运动。这是物体的一种特殊形式的运动。运动物体的位移、速度和加速度等物理量都是随时间往复变化的。

机械振动是一种常见的物理现象,如桥梁、机床的振动,钟摆的摆动,飞机机翼的颤动,汽车运行时发动机和车体的振动等等。振动的存在会影响机器的正常运转,使机床的加工精度、精密仪器的灵敏度下降,严重的还会引发机器或建筑结构的毁坏;此外,还会引发噪声、污染环境,这是不利的一面。另一方面,人们利用机械振动,设计制造了众多的机械设备和仪器仪表,如振动筛选机、振动研磨机、振动输送机、振动打桩机、混凝土振捣器以及测量传感器、钟表计时仪器、振子示波器等等。随着机器设备向着大型、高速、高效和自动化诸方面发展,需要分析处理的振动问题愈来愈重要。因此,掌握机械振动的基本理论,正确地运用它,对于设计制造安全可靠和性能优良的机器、仪器仪表、建筑结构以及各种交通运输工具,并有效地抑制、防止振动带来的危害是十分必要的。

为了便于研究振动现象的基本特征,需要将研究对象进行适当地简化和抽象,形成一种分析研究振动现象的理想化模型,在选择力学的模型中,它可能是一个零部件、一台机器或者一个完整的工程结构等,都被称为系统,即振动系统。振动系统可以分为两大类:连续系统与离散系统。具有连续分布的质量与弹性的系统,称为连续弹性体系统,并同时符合理想弹性体的基本假设,即均匀、各向同性并服从胡克定律。由于确定弹性体上无数质点的位置需要无限多个坐标,因此弹性体是具有无限多自由度的系统,它的振动规律要用时间和空间坐标的函数来描述,其运动方程是偏微分方程。

在一般情况下,要对连续系统进行简化,用适当的准则将分布参数“凝缩”成有限个离散的参数,这样便得到离散系统。所建立的振动方程是常微分方程。由于所具有的自由度数目上的区别,离散系统又称为多自由度系统,它的最简单的情况是单自由度系统。所谓系统的自由度数,是指在具有完整约束的系统中,确定其位置的独立坐标的个数。

在实际工程结构中,例如板壳、梁、轴等的物理参数一般是连续分布的,因此,这样的模型系统称为连续系统或分布参数系统。但是,为了能够分析或者便于分析,需要通过适当的准则将分布参数“凝缩”成有限个离散的参数,这样便得到了此结构的离散系统。

离散系统中的一种典型是由有限个惯性元件、弹性元件及阻尼元件等组成的系统,这类系统称为集中参数系统。其中,惯性元件是对系统的惯性的抽象,表现为仅计质量的质点或者仅计转动惯量和质量的刚体;弹性元件是对系统的弹性的抽象,表现为不计质量的弹簧、扭转弹簧或者仅具有某种刚度(如抗弯刚度、抗扭刚度等)但不具有质量的梁段、轴段等;阻尼元件既不具有惯性,也不具有弹性,它是对系统中的阻尼因素或有意识施加的阻尼器件的抽象,通常表示为阻尼缓冲器。阻尼元件是一种耗能元件,主要以热能形式消耗振动过程中的机械能,这与惯性元件能贮存动能、弹性元件能贮存弹性势能在性质上完全不同。

实际振动系统是很复杂的,以系统的自由度数不同,可分为单自由度系统、两个和多个自由度系统以及弹性体系统等等。从运动微分方程中所含参数的性质的不同,可分为线性系统和非线性系统。线性系统是在系统的运动微分方程式中,只包含位移、速度的一次方项。如果还包含位移、速度的二阶或高阶项则是非线性系统。工程实际中有很多振动系统(例如单摆)未必是线性系统,但是,在微幅振动的情况下,略去高阶项,线性化系统就是它的理想化模型。因此,振动系统按运动微分方程的形式分为,线性振动:描述其运动的方程为线性微分方程,相应的系统称为线性系统。线性振动的一个重要特性是线性叠加原理成立。非线性振动:描述其运动的方程为非线性微分方程,相应的系统称为非线性系统。非线性振动的叠加原理不成立。

值得指出的是,有关线性振动系统的结论,不能无条件地引申到非线性系统中去,否则,不仅在分析结果上会导致过大的误差,更重要的是无法预示或解释实际的振动系统中可能出现的非线性现象。

振动系统按激励的性质可分为,固有振动:无激励时系统所有可能的运动的集合。固有振动不是现实的振动,它仅反映系统关于振动的固有属性。自由振动:激励消失后系统所作的振动,是现实的振动。随机振

动: 系统在非确定性的随机激励下所作的振动。另外,物理参数具有随机性质的系统发生的振动也属于随机振动。**自激振动:** 系统受到由其自身运动诱发出来的激励作用而产生和维持的振动,这时系统包含补充能量的能源。演奏提琴所发出的乐声,就是琴弦作自激振动所致。车床切削加工时在某种切削用量下所发生的激励的高频振动,架空电缆在风作用下所发生的与风向垂直的上下振动以及飞机机翼的颤振等,都属于自激振动。**参数振动:** 激励因素以系统本身的参数随时间变化的形式出现的振动。秋千在初始小摆角下被越荡越高就是参数振动的例子。此外,还有衰减振动、受迫振动、周期振动、非周期振动等等。

本篇主要介绍单自由度系统、多自由度系统和连续弹性系统的自由振动和受迫振动的理论和方法,以及解决此类问题的数值计算、有限元等基本原理,并且简要介绍了非线性振动理论的分析方法及其振动控制理论及其在工程中的应用。

第1章 振动的基本理论

周期运动的最简单形式是简谐振动。这种振动的表示方法及特点是描述其他振动形式的基础。一般的周期振动可以借助傅里叶级数表示成一系列简谐振动的叠加,该过程称为谐波分析。非周期振动则需要通过傅里叶积分作谐波分析。

1.1 振动激励函数

在振动理论中,首先遇到的是振动中的激励函数,由于振动激励函数种类繁多,下面只就常见的几种振动激励函数进行简单介绍。

1.1.1 连续函数与离散函数

在连续时间范围($-\infty < t < \infty$)内有定义的函数称为连续时间函数,简称连续函数。

仅在一些离散的瞬间有定义的函数称为离散时间函数,简称离散函数。这里“离散”是指函数的定义域——时间(或其他量)是离散的,它只取某些固定的值。

1.1.2 周期函数

周期函数是定义在($-\infty, \infty$)区间,每隔一定时间 T (或整数 N),按相同规律重复变化的函数。连续周期函数可表示为

$$f(t) = f(t + mT), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-1)$$

离散周期函数可表示为

$$f(k) = f(k + mT), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-2)$$

k 为离散值。

1.1.3 实函数与复函数

物理可实现的函数常常是时间 t (或 k)的函数(或序列),其在各时刻的函数(或序列)值为实数,称为实函数。

函数(或序列)值为复数的函数称为复函数。最常用的是复指数函数。连续时间的复指数函数可表示为

$$f(t) = e^{\sigma t}, -\infty < t < +\infty \quad (1-3)$$

式中复变量 $s = \sigma + j\omega$, σ 是 s 的实部, 记作 $\operatorname{Re} s$, ω 是 s 的虚部, 记作 $\operatorname{Im} s$ 。根据欧拉公式, 上式可展开为

$$f(t) = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cos \omega t + j e^{\sigma t} \sin \omega t$$

可见, 一个复指数函数可分解为实、虚两部分, 即

$$\operatorname{Re} f(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t$$

$$\operatorname{Im} f(t) = e^{\sigma t} \sin \omega t$$

两者均为实函数。

1.1.4 冲激函数与阶跃函数

1. 冲激函数

冲激函数也称单位脉冲(Unit Impulse)函数, 用 $\delta(t)$ 表示, 它具有以下性质

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ \text{大于任何给定值, 当 } t = 0 \text{ 时; 但有 } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1-4)$$

并且

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^t \delta'(x) dx$$

单位脉冲是一种极限脉冲, 其物理意义可用图 1-1 来解释。该图说明, 若将 $\delta(t)$ 看成是力函数, 则 $\delta(t)$ 是图 a 所示冲量为 1 的矩形脉冲在脉宽 $\epsilon \rightarrow 0$ 时的冲击力的极限情况(图 b)。 $\delta(t)$ 具有力的量纲。

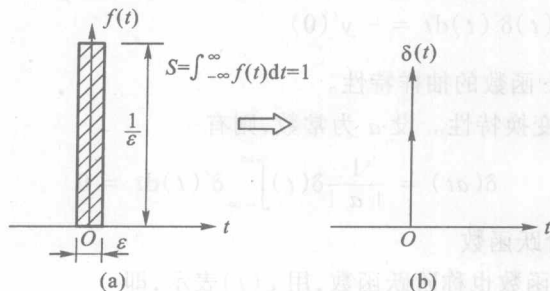


图 1-1 单位脉冲的物理解释

工程应用中还定义了一种延时单位脉冲 $\delta(t - t_1)$, 其定义为

$$\delta(t-t_1) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \neq t_1 \text{ 时} \\ \text{大于任何指定值, 当 } t = t_1 \text{ 时;} & \text{但有 } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_1) dt = 1 \end{cases} \quad (1-5)$$

延时单位脉冲函数如图 1-2 所示。单位脉冲函数又称 Dirac Delta 函数或简称 Dirac 函数。Dirac 函数有以下特性:

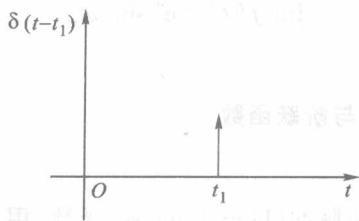


图 1-2 延时单位脉冲函数

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} p \delta(t) dt = p \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = p, p \text{ 为常数时。}$$

$$(2) \text{ 它的傅里叶变换: } F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

这一特性表明,单位脉冲激振力提供白谱。

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \delta(t-t_1) dt = y(t_1), 0 < t_1 < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \delta'(t) dt = -y'(0)$$

该式表明 Dirac 函数的抽样特性。

(4) 尺度变换特性。设 a 为常数,则有

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0$$

2. 单位阶跃函数

单位阶跃函数也称阶跃函数,用 $\epsilon(t)$ 表示,即

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1-6)$$

单位阶跃函数有以下特性

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t)y(t)dt = \int_0^{\infty} y(t)dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon'(t)y(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t)y'(t)dt = -\int_0^{\infty} y'(t)dt = y(0) \\ \int_{-\infty}^t \epsilon(x)dx = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1-7)$$

3. 冲激函数与阶跃函数的关系

冲激函数与阶跃函数的关系为

$$\delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt}, \epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x)dx \quad (1-8)$$

1.2 简谐振动

1.2.1 简谐振动的表示法

1. 用正弦函数表示简谐振动

用时间 t 的正弦(或余弦)函数表示简谐振动,其一般表达式为

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (1-9)$$

式中 A 、 α 、 ω 分别称为振幅、初相位和圆频率,它们是表征简谐振动的三要素。

一次振动循环所需的时间 T 称为周期;单位时间内振动循环的次数 f 称为频率。它们与圆频率的关系为

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}, f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1-10)$$

其中,周期 T 的单位为 s(秒),频率 f 的单位为 Hz(赫),圆频率 ω 的单位为 rad/s(弧度/秒)。图 1-3 描述了式(1-9)所示的运动,它可看成是该图中左边半径为 A 的圆上一点沿圆周作等角速度 ω 的运动时在 x 轴上的投影。

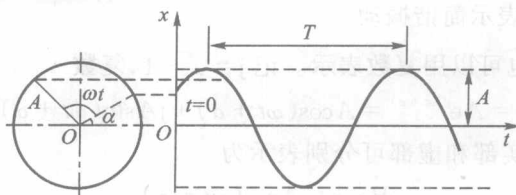


图 1-3 简谐振动的时间历程曲线

如果视 x 为位移, 则简谐振动的速度和加速度就是位移表达式(1-9)关于时间 t 的一阶和二阶导数, 即

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \alpha) = A\omega \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-11)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha + \pi) \quad (1-12)$$

可见, 若位移为简谐函数, 其速度和加速度也是简谐函数, 却具有相同的频率。只不过在相位上, 速度和加速度分别超前位移 $\frac{\pi}{2}$ 和 π 。比较式(1-12)与式(1-9), 可得到加速度与位移有如下关系

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1-13)$$

即简谐振动的加速度大小与位移成正比, 但方向总是与位移相反, 始终指向平衡位置。这是简谐振动的重要特征。

2. 用旋转矢量表示简谐振动

在振动分析中, 简谐振动可以用平面上的旋转矢量表示。旋转矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的模为振幅 A , 角速度为圆频率 ω , 任一瞬时 $\overrightarrow{OM}$ 在纵轴上的投影 ON 即为式(1-11)中的简谐振动表达式, 如图 1-4a 所示。通常将这个旋转矢量画成如图 1-4b 所示。利用旋转矢量能直观形象地表示出上述位移、速度和加速度之间的关系, 如图 1-4c 所示。

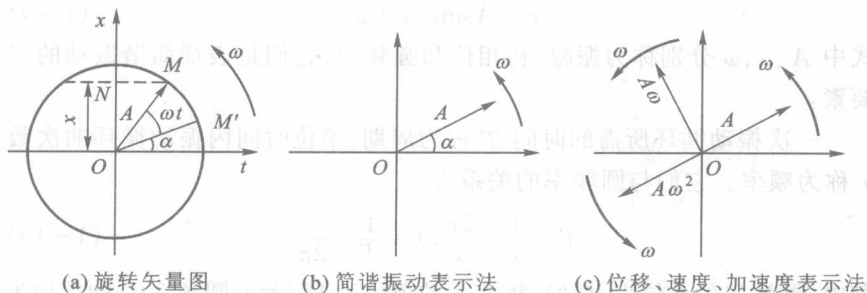


图 1-4 用旋转矢量表示简谐振动

3. 用复数表示简谐振动

简谐振动也可以用复数表示。记 $j = \sqrt{-1}$, 复数

$$z = Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A\cos(\omega t + \alpha) + jA\sin(\omega t + \alpha) \quad (1-14)$$

复数 z 的实部和虚部可分别表示为

$$\operatorname{Re} z = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\operatorname{Im} z = A\sin(\omega t + \alpha)$$

因此, 简谐振动的位移 x 与它的复数表示 z 的关系可写为