



当代  
杰出青年  
科学文库

# 辐射传递方程数值模拟的 有限元和谱元法

刘林华 赵军明 谈和平 著



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

当代杰出青年科学文库

# 辐射传递方程数值模拟的 有限元和谱元法

刘林华 赵军明 谈和平 著

国家自然科学基金重点项目(50336010)

国家杰出青年科学基金项目(50425619)

国家自然科学基金委员会工程与材料

学部主任基金资助项目(50646003)

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书系统地归纳、整理和总结了作者近年来在热辐射传递问题数值模拟方法方面的研究工作,详细介绍了辐射传递方程的类型和特性、有限元法和谱元法求解微分方程的基础知识,以及稳态和瞬态辐射传递方程数值模拟的有限元和谱元求解方法,如伽辽金有限元/谱元法、最小二乘有限元/谱元法、间断有限元/谱元法等。

本书可供工程热物理、红外技术物理等相关领域从事热辐射模拟与应用的科研人员、工程技术人员,以及高等院校相关专业的研究生和高年级本科生参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

辐射传递方程数值模拟的有限元和谱元法 / 刘林华,赵军明,谈和平著. --北京:科学出版社,2008

(当代杰出青年科学文库)

ISBN 978-7-03-021205-4

I. 辐… II. ①刘…②赵…③谈… III. 辐射热传递-数值模拟-研究 IV. TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 035231 号

责任编辑:耿建业 杨 然 / 责任校对:朱光光

责任印制:刘士平 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2008年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2008年4月第 一 次印刷 印张:17

印数:1--2 500 字数:325 000

定价:55.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

# 前 言

在半透明介质内热辐射传递的理论研究和工程应用中,描述辐射能传输过程的基本方程为辐射传递方程。辐射传递方程为积分-微分方程。辐射传递方程描述了辐射强度在时间、位置空间和角度空间上的变化。由于辐射强度是波长、时间、空间位置坐标和角度方向的函数,在三维半透明介质中,辐射强度是7维变量的函数。对于这样一个高维变量的积分-微分方程,一般难以获得理论解,多数情况下只能通过数值计算的途径进行近似求解。随着高速计算机的发展和普及,数值模拟方法越来越受到重视,目前已成为半透明介质内热辐射传递理论研究和工程应用的重要手段。

目前已发展起来的辐射传递方程数值求解方法主要可以分为以下两类:①基于射线跟踪的方法,该类方法一般需要通过跟踪光束传播轨迹来进行求解,如区域法、蒙特卡罗法和离散传递法;②基于微分形式辐射传递方程全局离散的方法,该类方法的求解过程类似于一般偏微分方程的离散和求解,如离散坐标法、有限体积法、有限元法、谱元法、无网格法等。前一类方法由于需要进行繁重的光束传播轨迹计算,计算速度极慢,不适合用来与热流体问题中的其他过程(如对流和导热过程)进行耦合计算。后一类方法计算速度较快,适合与对流和导热过程耦合计算,是目前计算热辐射学研究的重点。

离散坐标法和有限体积法是目前热辐射传输领域应用最为广泛的两种数值模拟方法,它们同属于有限差分法。有限元法的数学原理和离散方式均不同于有限差分法。与有限差分法相比,有限元法在适应复杂几何区域和易于构造高阶离散格式方面有明显的优势。在力学学科,有限元法的应用已有几十年的历史,但在热辐射领域中,真正意义上应用有限元法才四五年的时间。

近几年来作者所在课题组在国家自然科学基金资助下,对辐射传递问题的有限元/谱元模拟方法进行了较为系统的研究,取得了一些新的研究进展。课题组指导的部分博士研究生参加这一研究工作,他们是赵军明、刘立君、张琳、安巍、齐宏等。在瞬态辐射传递问题数值模拟方面,我们与美国佛罗里达理工学院(Florida Institute of Technology)许培锋教授(Prof. Hsu Pei-feng)进行了非常有效的合作研究。本书是通过归纳、整理和总结我们已发表和即将发表的研究论文的基础上完成的一本学术专著。希望本书的出版能对热辐

射传递的理论研究和工程应用起到积极的促进作用。

本书共分 12 章。第 1 章简要给出了辐射传递方程的推导,介绍了辐射传递方程的类型和数值特性;第 2 章叙述了有限元法和谱元法的基本原理;第 3 章介绍了传统的基于辐射传递方程积分形式解的辐射换热有限元模拟方法;第 4 章和第 5 章分别讨论了辐射传递方程数值模拟的伽辽金有限元法和最小二乘有限元法;第 6 章对空间离散和角度离散采用不同的处理,引入了辐射传递方程数值模拟的有限元/有限体积杂交算法;第 7 章和第 8 章分别给出了辐射传递方程数值模拟的最小二乘谱元法以及假散射和射线效应的抑制方法;第 9 章讨论了辐射传递方程数值模拟的间断有限元法和间断谱元法;为了克服传统的一阶辐射传递方程强对流特性导致的数值不稳定性,第 10 章介绍了一个以辐射强度为原始变量的二阶辐射传递方程,并分析了该方程的数值特性;第 11 章讨论了瞬态辐射传递方程数值模拟的间断有限元法和间断谱元法,并介绍了一个缩短瞬态辐射模拟计算时间的有效工具——时间平移和叠加原理;基于二阶辐射传递方程,第 12 章介绍了辐射与导热耦合换热问题数值模拟的谱元法。附录部分给出了两个辐射传递模拟的有限元/谱元法计算程序,供初学者参考。

我们在辐射传递方程数值模拟方面的研究工作先后得到国家自然科学基金重点项目(50336010)、国家杰出青年科学基金项目(50425619)的资助。本书的出版得到国家自然科学基金委员会工程与材料学部主任基金(50646003)的资助,在此表示衷心的感谢。

书中主要介绍新近发展起来的辐射传递方程数值模拟的有限元法和谱元法。这些方法近几年才引入到辐射换热领域用来求解辐射传递方程,因此书中难免有不足和不妥之处。作者热切希望读者和同行专家提出宝贵的批评意见与建议,以便有机会再版时扩充和修订。来信请发至电子信箱:lhliu@hit.edu.cn。

刘林华

2008 年 2 月于哈尔滨工业大学

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 辐射传递方程</b> .....	1
1.1 费马原理与光线方程 .....	1
1.2 均匀折射率介质内的辐射传递方程 .....	2
1.2.1 直角坐标系 .....	3
1.2.2 圆柱坐标系 .....	4
1.2.3 球坐标系 .....	6
1.3 梯度折射率介质内的辐射传递方程 .....	8
1.3.1 直角坐标系 .....	8
1.3.2 圆柱坐标系 .....	10
1.3.3 球坐标系 .....	12
1.4 一阶辐射传递方程的方程类型 .....	14
1.4.1 二维稳态辐射传递方程 .....	14
1.4.2 一维非稳态辐射传递方程 .....	15
1.5 二阶辐射传递方程 .....	16
1.5.1 二阶偶宇称辐射传递方程 .....	16
1.5.2 基于原始变量的二阶辐射传递方程 .....	20
1.6 辐射传递方程的离散坐标形式 .....	22
1.6.1 均匀折射率介质内辐射传递方程的离散坐标形式 .....	22
1.6.2 梯度折射率介质内辐射传递方程的离散坐标形式 .....	23
参考文献 .....	25
<b>第 2 章 有限元法和谱元法的基本原理</b> .....	27
2.1 加权余量法 .....	27
2.1.1 点配置法 .....	28
2.1.2 区域配置法 .....	29
2.1.3 伽辽金加权余量法 .....	29
2.1.4 最小二乘加权余量法 .....	29
2.2 强解积分表达式和弱解积分表达式 .....	30

2.3	自然边界条件和本质边界条件	31
2.4	有限元法的基本思想和计算步骤	31
2.4.1	形函数及其构造	32
2.4.2	数值积分	34
2.4.3	单元分析和总体合成	34
2.5	谱元法的基本思想和计算步骤	36
2.5.1	谱元近似	36
2.5.2	刚度矩阵计算及其组装	41
2.5.3	谱元计算网格生成	42
	参考文献	43
<b>第3章</b>	<b>基于传递方程积分形式解的辐射换热有限元模拟</b>	<b>44</b>
3.1	辐射传递方程的积分形式解	44
3.1.1	平均入射辐射强度	45
3.1.2	辐射热流密度矢量	46
3.1.3	表示形式解的积分方程组	47
3.2	积分形式解的有限元离散	48
3.3	算例分析和验证	50
	参考文献	52
<b>第4章</b>	<b>辐射传递方程求解的伽辽金有限元法及其迎风修正</b>	<b>54</b>
4.1	均匀折射率介质内辐射传递方程的伽辽金有限元法	55
4.1.1	二维矩形吸收散射性介质内辐射传递问题	56
4.1.2	非线性形函数的影响	57
4.2	梯度折射率介质内辐射传递方程的伽辽金有限元法	58
4.2.1	一维梯度折射率半透明平板内辐射传递问题	59
4.2.2	多维梯度折射率介质内辐射传递问题	61
4.3	求解半透明介质内辐射换热的迎风有限元法	64
4.3.1	迎风有限元法离散	65
4.3.2	迎风因子的选取	67
4.3.3	算例分析	68
	参考文献	70
<b>第5章</b>	<b>辐射传递方程数值模拟的最小二乘有限元法</b>	<b>73</b>
5.1	均匀折射率介质内辐射传递方程的最小二乘有限元解法	73
5.1.1	辐射传递方程的最小二乘有限元离散	73

5.1.2 数值验证及分析 .....	74
5.2 梯度折射率介质内辐射传递方程的最小二乘有限元解法 .....	75
5.2.1 离散坐标方程的最小二乘法离散 .....	75
5.2.2 算例分析和验证 .....	77
参考文献 .....	80
<b>第 6 章 有限元与有限体积法的杂交算法 .....</b>	<b>82</b>
6.1 辐射传递方程的角度空间有限元离散 .....	82
6.2 辐射传递方程的位置空间有限体积离散 .....	83
6.3 离散方程的求解步骤 .....	85
6.4 算例分析和验证 .....	85
6.4.1 无散射黑壁面方形域内的辐射平衡问题 .....	85
6.4.2 黑壁面方形域内的各向同性散射 .....	85
参考文献 .....	87
<b>第 7 章 辐射传递方程数值模拟的最小二乘谱元法 .....</b>	<b>88</b>
7.1 求解均匀折射率介质内辐射传递的最小二乘谱元法 .....	88
7.1.1 最小二乘谱元离散 .....	89
7.1.2 求解步骤 .....	91
7.1.3 算法验证及特性分析 .....	92
7.2 求解梯度折射率介质内辐射传递的最小二乘谱元法 .....	101
7.2.1 最小二乘谱元离散 .....	101
7.2.2 算法验证及特性分析 .....	103
参考文献 .....	108
<b>第 8 章 谱元法及有限元法假散射和射线效应的抑制 .....</b>	<b>109</b>
8.1 谱元法的人工扩散格式 .....	110
8.1.1 流向迎风策略 .....	111
8.1.2 各向同性人工扩散 .....	112
8.2 人工扩散系数的自适应选取 .....	112
8.3 算例分析与讨论 .....	114
参考文献 .....	122
<b>第 9 章 辐射传递方程数值模拟的间断有限元法及间断谱元法 .....</b>	<b>124</b>
9.1 辐射传递方程间断伽辽金离散的一般公式 .....	124
9.2 梯度折射率介质内辐射传递方程数值模拟的间断有限元法 .....	126
9.2.1 间断有限元离散 .....	126



9.2.2	算法验证及特性分析 .....	128
9.3	均匀折射率介质内辐射传递方程数值模拟的间断谱元法 .....	132
9.3.1	间断谱元离散 .....	132
9.3.2	算法验证及特性分析 .....	134
	参考文献 .....	143
<b>第 10 章</b>	<b>二阶辐射传递方程数值模拟的有限元及谱元法 .....</b>	<b>145</b>
10.1	二阶辐射传递方程的特性分析 .....	145
10.1.1	一致性 .....	146
10.1.2	扰动误差传播 .....	147
10.2	均匀折射率介质内二阶辐射传递方程的谱元法 .....	149
10.2.1	离散坐标形式的二阶辐射传递方程 .....	149
10.2.2	二阶辐射传递方程的伽辽金谱元离散 .....	150
10.2.3	实现及求解步骤 .....	151
10.2.4	数值验证及特性分析 .....	152
10.3	梯度折射率介质内二阶辐射传递方程的有限元法 .....	156
10.3.1	二阶离散坐标方程 .....	156
10.3.2	有限元离散 .....	157
10.3.3	数值验证及分析 .....	159
	参考文献 .....	162
<b>第 11 章</b>	<b>瞬态辐射传递问题数值模拟的间断有限元法和间断谱元法 .....</b>	<b>165</b>
11.1	均匀折射率介质内瞬态辐射传递的间断有限元模拟 .....	166
11.1.1	均匀折射率介质内瞬态辐射传递方程 .....	166
11.1.2	瞬态辐射传递方程的间断有限元离散 .....	167
11.1.3	数值验证及分析 .....	168
11.2	梯度折射率介质内瞬态辐射传递的间断有限元模拟 .....	173
11.2.1	梯度折射率介质内瞬态辐射传方程的离散坐标形式 .....	173
11.2.2	瞬态时域辐射传递方程的间断有限元离散 .....	175
11.2.3	瞬态频域辐射传递方程及其间断有限元离散 .....	176
11.2.4	算例分析和验证 .....	177
11.3	瞬态辐射传递数值模拟的间断谱元法 .....	186
11.3.1	辐射边界条件的处理 .....	186
11.3.2	瞬态辐射传递方程的间断谱元离散 .....	190
11.3.3	方法的验证及数值特性分析 .....	192

11.4 时间平移和叠加原理及其应用	201
11.4.1 时间平移和叠加原理	201
11.4.2 算例分析和验证	203
11.4.3 超短激光脉冲链作用分析	207
参考文献	208
<b>第 12 章 辐射与导热耦合换热问题数值模拟的谱元法</b>	<b>213</b>
12.1 辐射与导热耦合换热控制方程及谱元法离散	213
12.1.1 辐射与导热耦合换热控制方程	213
12.1.2 控制方程的线性化及离散	214
12.1.3 求解步骤	215
12.2 方法验证及数值特性分析	215
12.2.1 一维无散射灰体平板介质	215
12.2.2 一维各向异性散射灰体平板介质	217
12.2.3 黑壁面方形域内吸收发射介质	218
12.2.4 灰壁面圆环内的各向同性散射介质	220
参考文献	221
<b>附录 A 均匀折射率介质内稳态辐射传递模拟的谱元法 Matlab 计算程序</b>	<b>223</b>
<b>附录 B 梯度折射率介质内瞬态辐射传递模拟的间断有限元法 Fortran 计算程序</b>	<b>237</b>

# 第 1 章 辐射传递方程

辐射传递方程是辐射传输计算的基础。辐射传递方程描述了沿光线轨迹由于吸收、发射和散射等过程引起的辐射强度的变化,它是沿光线轨迹方向上的辐射能守恒方程。描述光线轨迹的方程称为光线方程。

在均匀折射率介质内,光线在两个相继的反射或散射地点之间沿直线传播。介质的组分、密度、温度的非均匀性常导致介质折射率的连续、非均匀分布,并产生折射率梯度。当介质折射率连续变化时,介质内光线将发生弯曲而改变传播方向。均匀折射率介质内辐射传递方程与梯度折射率介质内辐射传递方程之间有很大的差别,后者远比前者复杂。本章首先从描述光子气体运输的玻尔兹曼方程出发推导均匀折射率介质内的辐射传递方程,并给出三种常用的坐标系中辐射传递方程的具体形式,然后给出了梯度折射率介质内的辐射传递方程,最后介绍了两种二阶形式的辐射传递方程。

## 1.1 费马原理与光线方程

费马原理通常也称为最短光程原理<sup>[1]</sup>。这一原理认为:一条实际光线在任何两点之间的光程

$$L = \int_{s_0}^s n(x, y, z) ds \quad (1-1)$$

比连接这两点的任何其他曲线的光程都要短。式中,折射率  $n(x, y, z)$  为空间坐标的函数; $s$  是光线轨迹的弧长。

在直角坐标系中,令

$$F(s, x, y, z, x', y', z') = n(x, y, z) \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1-2)$$

由于  $\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 1$ , 方程(1-1)等价于

$$L = \int_{s_0}^s F\left(s, x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds \quad (1-3)$$

将该泛函极值的欧拉方程组展开即可得光线方程

$$\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad (1-4a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d}{ds} \left( n \frac{dy}{ds} \right) = 0 \quad (1-4b)$$

$$\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) = 0 \quad (1-4c)$$

式(1-4c)可写成矢量形式,即

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad}n \quad (1-5)$$

式中,  $\mathbf{r}$  为矢径。

## 1.2 均匀折射率介质内的辐射传递方程

光子的运动速度为当地的光速,即  $c = c_0/n$ , 其中  $c_0$  为真空中的光速。定义光子在几何空间位置、运动方向和时间所构成的相空间上的光子数密度分布函数为  $f_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$ , 则时间间隔  $dt$  内、频率在  $\nu$  和  $\nu + d\nu$  之间、通过面元  $dA$  沿  $\boldsymbol{\Omega}$  方向进入微元立体角  $d\Omega$  的光子数为

$$d^4 N_\nu = f_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) c \cos\theta dA d\nu d\Omega dt \quad (1-6)$$

式中,  $\theta$  为面元  $dA$  的法向矢量与  $\boldsymbol{\Omega}$  的夹角(锐角)。每个光子携带能量  $h\nu$ , 则对应于光子数  $dN_\nu$  的总能量为

$$d^4 E_\nu = ch\nu f_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \cos\theta d\nu d\Omega dA dt \quad (1-7)$$

对应的单色辐射强度为

$$\begin{aligned} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) &= \frac{d^4 E_\nu}{\cos\theta dA d\nu d\Omega dt} \\ &= \frac{ch\nu f_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \cos\theta dA d\nu d\Omega dt}{\cos\theta dA d\nu d\Omega dt} \\ &= ch\nu f_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \end{aligned} \quad (1-8)$$

描述光子气体运输的玻尔兹曼方程为<sup>[2]</sup>

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} f_\nu) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a} f_\nu) = Q_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (1-9)$$

式中,  $\mathbf{v}$  为速度矢量;  $\mathbf{a}$  为加速度矢量;  $\nabla_{\mathbf{r}}$  和  $\nabla_{\mathbf{v}}$  分别为几何空间和速度空间的散度算子;  $Q_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$  为光子源项, 包括吸收、散射、发射效应。介质折射率  $n$  在空间分布均匀时, 若忽略相对论效应, 加速度矢量  $\mathbf{a} = 0$ , 且  $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\Omega}$ 。此时式(1-9)可简化为

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + c \nabla_r \cdot (\mathbf{\Omega} f_\nu) = Q_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) \quad (1-10)$$

方程(1-10)两边同时乘以  $h\nu$ , 得

$$\frac{ch\nu}{c} \frac{\partial f_\nu}{\partial t} + ch\nu \nabla_r \cdot (\mathbf{\Omega} f_\nu) = h\nu Q_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) \quad (1-11)$$

本书只考虑弹性散射, 即散射过程中辐射能将沿立体角重新分配, 但光束的频率不变。此时, 源项  $h\nu Q_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$  可表示为

$$h\nu Q_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = -\beta_\nu I_\nu + n^2 \kappa_{a\nu} I_{b\nu} + \frac{\kappa_{s\nu}}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', t) \Phi(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\Omega' \quad (1-12)$$

式中,  $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = ch\nu f_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$  为单色辐射强度, 它是空间位置  $\mathbf{r}$ 、方向  $\mathbf{\Omega}$  和时间  $t$  的函数;  $I_{b\nu}$  是在介质温度下的黑体单色辐射强度;  $\kappa_a$  和  $\kappa_s$  分别是介质的吸收和散射系数;  $\beta_\nu = \kappa_{a\nu} + \kappa_{s\nu}$  为衰减系数;  $\Phi(\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega})$  是从入射方向  $\mathbf{\Omega}'$  到出射方向  $\mathbf{\Omega}$  的散射相函数。将方程(1-12)代入方程(1-11), 得

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \nabla_r \cdot (\mathbf{\Omega} I_\nu) = -\beta_\nu I_\nu + n^2 \kappa_{a\nu} I_{b\nu} + \frac{\kappa_{s\nu}}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', t) \Phi(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\Omega' \quad (1-13)$$

方程(1-13)左端第二项可表示为

$$\nabla_r \cdot (\mathbf{\Omega} I_\nu) = \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \quad (1-14)$$

将方程(1-14)代入方程(1-13), 即可得均匀折射率介质内辐射传递方程为

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{DI_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)}{Dt} &= \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \\ &= -(\kappa_{a\nu} + \kappa_{s\nu}) I_\nu + n^2 \kappa_{a\nu} I_{b\nu} + \frac{\kappa_{s\nu}}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', t) \Phi(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\Omega' \end{aligned} \quad (1-15)$$

### 1.2.1 直角坐标系

为了分析和书写方便, 下面的内容中将略去表示辐射能频率的下标  $\nu$ 。如图 1-1 所示的直角坐标系中, 局部坐标系  $e_x-e_y-e_z$  由坐标系  $x-y-z$  平移得到。单位方向矢量  $\mathbf{\Omega}$  的方向余弦  $\mu$ 、 $\eta$  及  $\xi$  分别为该方向矢量在局部坐标系  $e_x-e_y-e_z$  三个坐标轴上的投影, 并由下式给出:

$$\mu = \sin\theta \cos\varphi \quad (1-16a)$$

$$\eta = \sin\theta \sin\varphi \quad (1-16b)$$

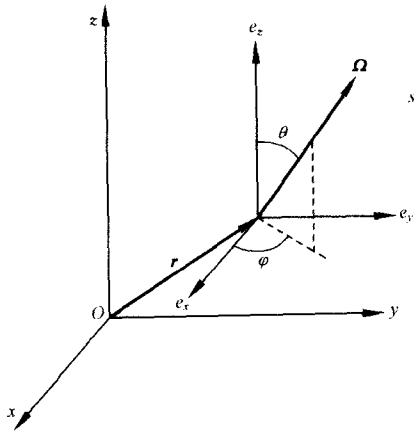


图 1-1 直角坐标系  $x-y-z$  及局部坐标系  $e_x-e_y-e_z$

$$\xi = \cos\theta \tag{1-16c}$$

方程(1-16)两边同时对  $s$  微分,得到

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{d(\sin\theta\cos\varphi)}{ds} = \cos\theta\sin\varphi \frac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} \tag{1-17a}$$

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{d(\sin\theta\sin\varphi)}{ds} = \cos\theta\cos\varphi \frac{d\theta}{ds} + \sin\theta\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} \tag{1-17b}$$

$$\frac{d\xi}{ds} = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds} \tag{1-17c}$$

从而有

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sin\theta} \left( \cos\varphi \frac{d\eta}{ds} - \sin\varphi \frac{d\mu}{ds} \right) \tag{1-18a}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{d\xi}{ds} \tag{1-18b}$$

在直角坐标系下,均匀折射率介质内光线的方向余弦的散度  $\nabla_r \cdot \Omega = 0$ , 则

$$\nabla_r \cdot (\Omega I_r) = \Omega \cdot \nabla_r I_r \tag{1-19}$$

将方程(1-19)代入方程(1-13), 展开后得直角坐标系下均匀折射率介质内的非稳态辐射传递方程为

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial x} + \eta \frac{\partial I}{\partial y} + \xi \frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I + n^2 \kappa_a I_b + \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(r, \Omega', t) \Phi(\Omega, \Omega') d\Omega' \tag{1-20}$$

### 1.2.2 圆柱坐标系

如图 1-2 所示的圆柱坐标系中,辐射强度是变量  $\rho, \Psi, z, \theta$  及  $\varphi$  的函数。

沿着一条给定的光线路径,微分算子  $d/ds$  可以分解为

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial \rho} \times \frac{d\rho}{ds} + \frac{\partial}{\partial \Psi} \times \frac{d\Psi}{ds} + \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{dz}{ds} + \frac{\partial}{\partial \theta} \times \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \times \frac{d\varphi}{ds} \quad (1-21)$$

因为  $d\rho = \mu ds$ 、 $\rho d\Psi = \eta ds$  及  $dz = \xi ds$ ,

式(1-21)可改写成

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} = & \mu \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \Psi} \\ & + \xi \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \times \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \times \frac{d\varphi}{ds} \end{aligned} \quad (1-22)$$

式中,  $\mu$ 、 $\eta$  及  $\xi$  是圆柱坐标系中光线轨迹切矢量在局部坐标系  $e_\rho$ - $e_\Psi$ - $e_z$  上的方向余弦。

在均匀折射率介质中,光线沿直线传播。如图 1-2 所示,沿光线传播方向,圆周角  $\varphi$  随着坐标  $\rho$  改变,而天顶角  $\theta$  不随着坐标  $\rho$  改变。

式(1-22)可简化为

$$\frac{d}{ds} = \mu \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \Psi} + \xi \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \times \frac{d\varphi}{ds} \quad (1-23)$$

由圆柱坐标系下的光线方程,可以将方向余弦的导数表示为

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{\eta^2}{\rho} \quad (1-24a)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = -\frac{\mu\eta}{\rho} \quad (1-24b)$$

$$\frac{d\xi}{ds} = 0 \quad (1-24c)$$

把方程(1-24)代入方程(1-18a),可得  $d\varphi/ds$  的表达式,即

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\eta}{\rho} \quad (1-25)$$

因此,如图 1-2 所示,圆柱坐标系中微分算子  $d/ds$  可以写为

$$\frac{d}{ds} = \mu \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \Psi} + \xi \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1-26)$$

联合方程(1-15)和方程(1-26),可以得到圆柱坐标系下均匀折射率介质内辐射传递方程的非守恒形式,即

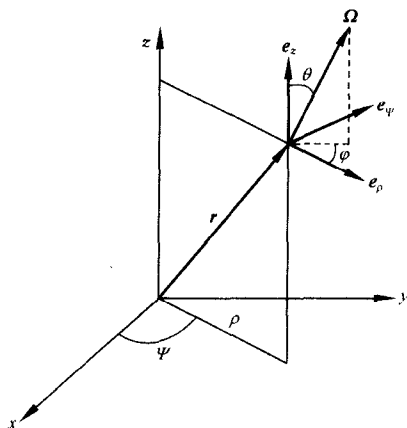


图 1-2 圆柱坐标系  $\rho$ - $\Psi$ - $z$  及局部坐标系  $e_\rho$ - $e_\Psi$ - $e_z$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial t} + \mu \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial \rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial \Psi} + \xi \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial z} - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial \varphi} = -(\kappa_a + \kappa_s) I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + n^2 \kappa_a I_b(r) + \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') \Phi(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}' \quad (1-27)$$

由方程(1-27),使用如下恒等式:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \rho} [I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})] = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})] - \frac{\mu}{\rho} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (1-28a)$$

$$\frac{\eta}{\rho} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{\rho} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (1-28b)$$

可得圆柱坐标系下均匀折射率介质内辐射传递方程的守恒形式,即

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial t} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial [\rho I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})]}{\partial \rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial \Psi} + \xi \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial [\eta I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})]}{\partial \varphi} = -(\kappa_a + \kappa_s) I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + n^2 \kappa_a I_b(r) + \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') \Phi(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}' \quad (1-29)$$

与直角坐标系中的辐射传递方程(1-20)相比,方程(1-29)中多出一项与角度  $\varphi$  有关的偏导数项,即角向再分配项。

### 1.2.3 球坐标系

在如图 1-3 所示的球坐标系中,辐射强度是变量  $r, \Theta, \Psi, \theta$  及  $\varphi$  的函数。沿着一条给定的光线路径,微分算子  $d/ds$  可以分解为

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial \Theta} \times \frac{d\Theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial \Psi} \times \frac{d\Psi}{ds} + \frac{\partial}{\partial r} \times \frac{dr}{ds} + \frac{\partial}{\partial \theta} \times \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \times \frac{d\varphi}{ds} \quad (1-30)$$

因为  $dr = \xi ds, r d\Theta = \mu ds$  及  $r \sin\Theta d\Psi = \eta ds$ ,可以得到

$$\frac{d}{ds} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{\eta}{r \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial \Psi} + \xi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \times \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \times \frac{d\varphi}{ds} \quad (1-31)$$

与柱坐标系中的推导相似,为了确定方程(1-31)中的参数  $d\theta/ds$  与  $d\varphi/ds$ ,需要用到方向余弦的导数  $d\mu/ds, d\eta/ds$  及  $d\xi/ds$ 。利用球坐标系下的光线方程可求得球坐标系中方向余弦的导数,即

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{r} [\eta^2 \cot\Theta - \xi\mu] \quad (1-32a)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = -\cot\Theta \frac{\mu\eta}{r} - \frac{\xi\eta}{r} \quad (1-32b)$$

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\sin^2\theta}{r} \quad (1-32c)$$

将方程(1-32)代入方程(1-18),得到球坐标系下  $d\theta/ds$  与  $d\varphi/ds$  的表达式,即



$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\eta \cot\Theta}{r} \quad (1-33a)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\sin\theta}{r} \quad (1-33b)$$

因此,在如图 1-3 所示的球坐标系中,方程(1-31)中的微分算子  $d/ds$  可以写为

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} &= \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial\Theta} + \frac{\eta}{r \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial\Psi} \\ &+ \xi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\eta \cot\Theta}{r} \frac{\partial}{\partial\varphi} \end{aligned} \quad (1-34)$$

联合方程(1-15)和方程(1-34),可以得到球坐标系下均匀折射率介质内辐射传递方程的非守恒形式,即

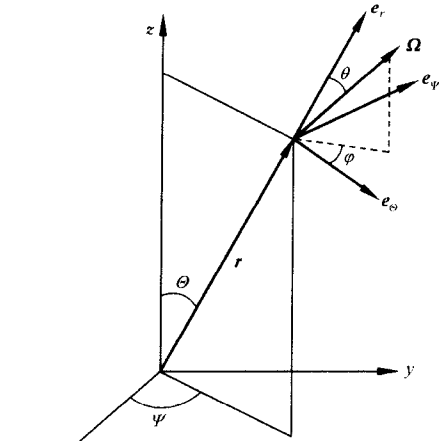


图 1-3 球坐标系  $r-\Theta-\Psi$  及局部坐标系  $e_r-e_\theta-e_\varphi$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial t} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial\Theta} + \frac{\eta}{r \sin\Theta} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial\Psi} + \xi \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial r} \\ &- \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial\theta} - \frac{\eta \cot\Theta}{r} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial\varphi} \\ &= -(\kappa_a + \kappa_s) I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + n^2 \kappa_b I_b(\mathbf{r}) + \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') \Phi(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}) d\Omega' \end{aligned} \quad (1-35)$$

进一步使用如下恒等式:

$$\frac{\mu}{r \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial\Theta} (\sin\Theta I) = \frac{\mu}{r} \frac{\partial I}{\partial\Theta} + \frac{\mu I \cot\Theta}{r} \quad (1-36a)$$

$$\frac{\xi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 I) = \xi \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{2\xi I}{r} \quad (1-36b)$$

$$\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin^2\theta I) = \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial I}{\partial\theta} + \frac{2\cos\theta I}{r} \quad (1-36c)$$

$$\frac{\cot\Theta}{r} \frac{\partial}{\partial\varphi} (\eta I) = \frac{\eta \cot\Theta}{r} \frac{\partial I}{\partial\varphi} + \frac{I \sin\theta \cos\varphi \cot\Theta}{r} \quad (1-36d)$$

可得球坐标系下均匀折射率介质内辐射传递方程的守恒形式,即

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{r \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial\Theta} [\sin\Theta I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})] + \frac{\eta}{r \sin\Theta} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial\Psi} + \frac{\xi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})] \\ &- \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} [\sin^2\theta I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})] - \frac{\cot\Theta}{r} \frac{\partial}{\partial\varphi} [\eta I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})] \end{aligned}$$