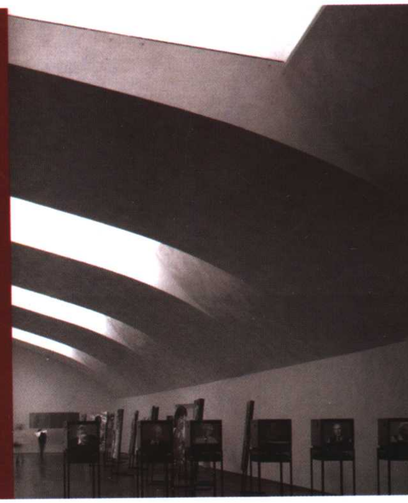
普通高等教育“十一五”国家级规划教材



Education

数学物理方法

■ 柯导明 陈军宁 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学物理方法

柯导明　陈军宁　编著

机械工业出版社

本教材主要内容包含了复变函数引论、傅里叶变换、拉普拉斯变换、用分离变量法求解偏微分方程、二阶线性常微分方程的级数解法和傅里叶级数、柱面坐标中的偏微分方程解法、球面坐标中的偏微分方程解法、无界区域的定解问题、格林函数法求解数理方程。

本教材以电子、信息类学生为主要编写对象，适合作为电子科学类、电子工程、通信工程专业及应用物理偏电类专业的学生的数学物理方法教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法/柯导明，陈军宁编著. —北京：机械工业出版社，2008.3
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-111-23457-9

Ⅰ.数… Ⅱ.①柯…②陈… Ⅲ.数学物理方法—高等学校—教材
Ⅳ. O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 017967 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　韩效杰
责任校对：申春香　封面设计：张　静　责任印制：洪汉军
北京瑞德印刷有限公司印刷（三河市明辉装订厂装订）
2008 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 10.375 印张 · 399 千字
标准书号：ISBN　978-7-111-23457-9
定价：28.00 元

前　　言

在现代科学技术飞速发展的今天，不但要求学生的知识面宽，而且对知识的深度也提出了更高的要求。例如，电子科学技术中有大量的小尺寸器件，要了解它们的特性，需要解二维甚至三维的偏微分方程；电子工程的射频电路和高速电路设计中有各种形状的传输线、微带线和微波器件，对这些电路的定量分析至少要解二维偏微分方程。因此，电类学生掌握数学物理方法有利于学习和工作。

另一方面，传统的数学物理方法内容是以介绍力学为主，对于电学问题的处理基本上局限于电动力学的基本方程处理，与器件和电路结合较少。同时，教材选用的内容范围过宽，这样做的优点是学生了解了所有的相关内容，缺点是内容深度不够。这些情况导致数理方法教材与电类学生所学的专业内容不匹配，学生无法在专业知识中运用数学物理方法。

作者是专业课教师，兼任数学物理方法课程的教学，到目前为止，作者的主要工作仍然是专业课的教学。也正因为如此，作者深感数学物理方法课程改革的必要性，并希望把这种想法贯彻到教材中去，为此，编写了这本适合工科学生使用的教材。本教材有以下特点：

1. 主要内容包含了复变函数引论、傅里叶变换、拉普拉斯变换；数学物理方程的分离变量法、积分变换法、特征线法、格林函数法；引用了数学物理当中的渐进方法。考虑到有的专业已不再选用复变函数，从第 2 章起的内容删除了与复变函数结合得过于紧密的内容，课时少的专业只要删除少量例题可直接从傅里叶变换开始教学，对数学物理方法的内容的掌握没有任何影响。

2. 电子科学、电子工程和通讯工程专业的学生在后续课程学习中要接触到大量的特殊函数与电磁波理论，所以本教材以 60％以上的篇幅讲述了贝塞尔函数与勒让德函数的性质及其应用，波动方程的解法以及广义傅里叶级数，并以单独的一章列出了二阶线性常微分方程的级数解法，让读者熟悉与其他特殊函数相关的微分方程的解法。教材的内容都是电类学生在后续课程学习和实际工作中遇到的数学难点和重点。

3. 由于学时数的减少，教师在课堂上不能大量的讲解推导过程和例题，本教材非常详细地推导了相关核心定理，每个定理都给出了足够的例题以深化学生对定理的认识，便于学生在课后自学。同时，尽量解释了偏微分程应用的物理背景。由于此特点，本教材尤为适用于普通本科院校学生以及教学课时较少的重点院校的学生。

4. 教材还给出了作者在科研和实际工作中所遇到的一些数学物理方程，以及他们的处理方法。通过这些内容的学习，读者可尽快掌握在实际工作中如何运用数学物理方法。

5. 为了配合教材使用，制作了课件。

由于以上尝试和创新，本教材被评为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书承盛昭瀚教授和倪明放教授审稿。出版过程中责任编辑郑玫、韩效杰做了大量的工作。手稿的初期录入由研究生梅振飞、刘梅、徐太龙、张本营、吴昊、蒋先伟、王诗兵、方森、张明、赵宇浩、鲁世斌、张兴建、周杰、刘萍、黄智、张婷、胡媛完成，尤其是梅振飞在录入书稿中做了大量的工作。孙玉发教授、朱军教授、李国祥副教授曾阅读了教材部分初稿，并就电子工程和通信工程中所遇到的数理方法问题处理提出了宝贵建议。孟坚副教授也参加了本书的编写工作。在此，对以上所有的人表示衷心的感谢。

由于水平和经验的限制，书中难免有欠妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第1章　复变函数引论

高等数学讨论的都是实变函数. 但是，随着人们对数学认识的深入，引入了纯虚数的概念，对于函数的研究也随之扩展到了复变数领域，产生了相应的分支，即复变函数. 这一章对复变函数作了概论式的介绍. 首先在1.1节中对高中所学过的复数作了简单的回顾和拓展，介绍了复变函数的概念、复幂级数、复变函数的极限和连续性；接着在1.2节讨论了初等复变函数、反函数；1.3节和1.4节中引入复变函数的分析运算，即导数和积分运算，重点放在解析函数的求导方法与积分求解；从1.5节开始讨论复变函数的级数，包括如何将复变函数展开成幂级数、罗朗级数，并且引入了留数的概念. 本章内容是针对如何将复变函数应用到工程和物理问题中而写的，省略了复变函数中的很多精彩内容，为了叙述的简洁和连续，对部分定理和结论的证明过程作了简化. 对这方面有兴趣的读者，可以进一步阅读复变函数的专著.

1.1　复数与复变函数

这一节对学过的复数知识扼要地复习并加以少量的补充，介绍复变函数和复幂级数的基本概念，及其极限的求解和复变函数连续性的判断. 最后，给出了复幂级数收敛性的判断准则.

1.1.1　复数表示法

定义 $z=x+\mathrm{j}y$ 为复数，其中 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 是虚数单位，x 和 y 都是实数. x 是复数 z 的实部，记为 $x=\mathrm{Re}z$；y 是复数 z 的虚部，记为 $y=\mathrm{Im}z$. 当 $x=0$ 时，$z=\mathrm{j}y$ 称为纯虚数；而当 $y=0$ 时，$z=x$ 是一个实数，因此实数是复数的特殊情况. 称 $x-\mathrm{j}y$ 是 $x+\mathrm{j}y$ 的共轭复数，用 $\bar{z}$ 表示. 为了对复数进行运算，定义两个复数只有它们的实部、虚部分别相等时才相等.

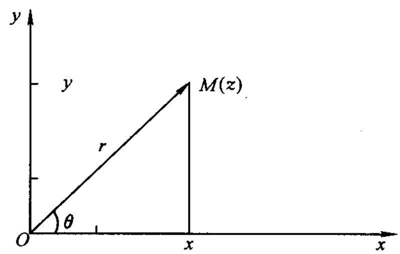


图 1.1 复平面示意图

复数 $z=x+\mathrm{j}y$ 有向量表示法、三角表示法和指数表示法. 向量表示法中，复数与平面上的点是一一对应的，图 1.1 的复平面上 M 点对应了复数 z，横轴称为实轴，纵轴称为虚轴. 若 x 和 y 分别看成向量$\overrightarrow{OM}$在实轴和虚轴上的射影，复数 $z=x+\mathrm{j}y$ 与向量$\overrightarrow{OM}$互相对应. 注意，复数 0 与零向量对应.

z 是一个不为零的复数时，它对应的向量长度叫做 z 的模，记作 $|z|$. 从图 1.1 可见

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.1.1}$$

z 所对应向量的方向角叫做 z 的辐角，记作

$$\mathrm{Arg}z=\theta$$

在 $z\neq0$ 时，从图 1.1 中可以看到，z 有无穷多个辐角，其中任意两个辐角差为 2π 的整数倍. 用 $\arg z$ 表示 z 的所有辐角中介于 $-\pi$ 与 π 之间（包括 π）的那一个，记作

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi \tag{1.1.2}$$

称 $\arg z$ 为主辐角. 复数 $z=0$ 对应零向量，它没有确定的方向，其辐角 θ 是不确定的. 而对于一个不为 0 的复数 $z=x+\mathrm{j}y$，它的主辐角可用下式表示

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\ y\text{ 为任意实数}\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0\\[2ex] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geqslant0\\[2ex] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0\end{cases}$$

$\mathrm{Arg}z$ 与 $\arg z$ 的关系是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k\text{ 是任意整数}) \tag{1.1.3}$$

一个复数也可以写成三角表示式. 从图 1.1 可以得到 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$，因此有

$$z=x+\mathrm{j}y=r(\cos\theta+\mathrm{j}\,\sin\theta) \tag{1.1.4}$$

由于一个不为零的复数的辐角有无穷多，所以复数的三角表示式不是唯一的，这样若两个三角表达式相等

$$r_1(\cos\theta_1+\mathrm{j}\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{j}\sin\theta_2)$$

则有 $r_1=r_2$，$\theta_1=\theta_2+2k\pi$　(k 为整数).

另一有用的表示法是复数的指数表示式. 首先介绍欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta \tag{1.1.5}$$

后面的1.3节里将证明式（1.1.5）的正确性. 将式（1.1.5）代入式（1.1.4），可以得到复数 z 的指数表达式为

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \tag{1.1.6}$$

式（1.1.6）在电工学的交流稳态电路分析中有着广泛的用途.

【例1.1】　写出 $-4-3\mathrm{j}$ 的三角表达式和指数表达式.

解　模 $|z|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$；辐角 $\arg(-4-3\mathrm{j})=\arctan\dfrac{3}{4}-\pi$. 因此三角表达式和指数表达式分别是

$$-4-3\mathrm{j}=5\left[\cos\left(\arctan\frac{3}{4}-\pi\right)+\mathrm{j}\sin\left(\arctan\frac{3}{4}-\pi\right)\right]$$

$$-4-3\mathrm{j}=5\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\arctan\frac{3}{4}-\pi)}$$

1.1.2　复数的运算规则

以两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{j}y_1$、$z_2=x_2+\mathrm{j}y_2$ 为例，复数运算规则可以表示如下：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{j}(y_1\pm y_2)$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+\mathrm{j}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{j}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{j}(y_1x_2+x_1y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{j}y_1}{x_2+\mathrm{j}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{j}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0)$$

实际上，乘、除法用指数和三角表示式更加方便，有

$$z_1\cdot z_2=(r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1})(r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2})=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)}=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{j}\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1-\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{j}\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

上两式说明两复数相乘，积的模为两模的乘积，辐角等于复数辐角之和；两复数相除，商的模为两模的商，辐角等于复数辐角之差.

乘方运算表达式是

$$z^n=(r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{j}\sin n\theta) \tag{1.1.7}$$

开方是乘方的逆运算，记 n 为正整数，在 $z\neq0$ 时 $w^n=z$，开方后有

$$w=z^{\frac{1}{n}}=\left[r e^{j(2k\pi+\theta)}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$k=0$，1，2，…，$n-1$ 时，$z^{\frac{1}{n}}$ 有不同的值，而 k 取其他值时，$w=z^{\frac{1}{n}}$ 必定和这 n 个值中的一个相等. 所以，$w=z^{\frac{1}{n}}$ 只有 n 个值，其表达式是

$$w=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+j\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right]\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)\qquad(1.1.8)$$

【例 1.2】 解方程 $z^4+2z^3-4z-8=0$.

解 将方程左边因式分解，得到

$$(z+2)(z^3-4)=0$$

所以有 $z=-2$，和 $z^3=4$. 根据式（1.1.8），得到

$$z=-2$$

$$z=4^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{2k\pi+0}{3}+j\sin\frac{2k\pi+0}{3}\right]=\sqrt[3]{4}\left[\cos\frac{2k\pi}{3}+j\sin\frac{2k\pi}{3}\right],\ k=0,1,2$$

方程的四个解是 -2，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)$，$\sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)$.

1.1.3 复变函数的概念

复变函数的定义类似于高等数学中的函数定义，下面是其定义.

设在复平面上任意点集 G 中的一点 $z=x+jy$，有一个或多个复数 w 与之对应，就说在 G 上定义了一个复变函数 $w=f(z)$. 此定义可用公式表示为

$$w=f(z)=u+jv\qquad(1.1.9)$$

式中的 u 和 v 均为实值函数.

u 和 v 的函数有什么样的性质？这里通过一个例子来说明这个问题. 设 $z=x+jy$，$w=z^2$，则有

$$w=f(z)=z^2=(x^2-y^2)+j(2xy)$$

根据式（1.1.9），可以得到 $u=u(x,y)=x^2-y^2$，$v=v(x,y)=2xy$. 因此一般情况下 u 和 v 应是二元实变函数，这就是说复变函数 $f(z)$ 的性质由一对二元实变函数 u 和 v 的性质决定. 另一方面，也可以通过适当的变换将一个二元实变函数变换成复变函数，在复平面上研究其性质.

【例 1.3】 指出 $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|>\alpha$（$\alpha>0$），所表示的几何意义.

解 $z=x+jy$ 代入不等式后，经过化简得到

$$\left(x-\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2+y^2>\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2\quad(0<\alpha<1)$$

$$x<0 \quad (\alpha=1)$$

$$\left(x-\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2+y^2<\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2 \quad (\alpha>1)$$

因此当 $0<\alpha<1$ 时该不等式表示为以 $\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}, 0\right)$ 为圆心、以 $\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$ 为半径的圆外区域；当 $\alpha=1$ 时该不等式表示为左半平面；当 $\alpha>1$ 时该不等式表示为以 $\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}, 0\right)$ 为圆心、以 $\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$ 为半径的圆内区域.

实变函数中的极限和连续的概念也可以推广为复变函数的极限与连续性.

对于预先给定的一个任意小的正数 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 δ，只要 $0<|z-z_0|<\delta$，就有 $|f(z)-w|<\varepsilon$，就称 w 是 z 趋近于 z_0 时 $f(z)$ 的极限，记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w$$

或简记为 $z\to z_0$ 时，$f(z)\to w$. 若 $w=f(z_0)$，即

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

就说 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

复变函数的极限运算法则形式上与高等数学中的一元函数极限的运算法则相同，设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，则

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=AB$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B} \quad (B\neq 0)$$

为了方便复变函数的极限运算，也定义了复变函数含∞的极限：

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0 \quad \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{f(1/t)}=0 \quad \Leftrightarrow \lim_{z\to \infty} f(z)=\infty$$

$$\lim_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right)=a \quad \Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} f(z)=a \qquad (a \text{ 为有限复数})$$

从定义中可见，∞相当于一个特殊的复数，与“$\frac{1}{0}$”相当. 它与有限数的四则运

算规则和高等数学中∞与有限数运算法则相同，但是，$\infty\pm\infty$、$0\cdot\infty$、$\infty\cdot 0$、$\frac{\infty}{\infty}$、$\frac{0}{0}$都是没有意义的.

从几何观点来看，普通复平面上并没有与∞对应的点. 但是，可以设想普通复平面上附加了一个理想点与之对应，此点称为无穷远点. 普通的复平面加上无穷远点合在一起称为扩充的复平面，扩充复平面上的每一条直线都经过无穷远点.

从前面的定义可知，复变函数的连续性是实变函数连续性的直接推广，因此复数域中连续函数的四则运算定理的结论和证明可以直接引用实变分析的结论和证明. 这样就有，在一点z_0（或在一个点集G内）连续的两个函数$f(z)$和$\varphi(z)$的和、差、积在这一点（或在这个点集G内）仍然是连续的；在$\varphi(z_0)\neq 0$时（或在点集G内$\varphi(z)\neq 0$），$f(z)/\varphi(z)$也是连续的，即商是连续的.

下面是一个应用非常广泛的求极限和判断连续性的定理.

定理 1.1 设$z_0=x_0+\mathrm{j}y_0$，$w_0=u_0+\mathrm{j}v_0$，$f(z)=u(x,y)+\mathrm{j}v(x,y)$，则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$$

特别是$u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$时，上两式也是$f(z)$在z_0点连续的充要条件.

只要按定义就可以证明定理 1.1，这里略去了证明过程，请读者自己完成.

【例 1.4】 判断函数的连续性：

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right), & z\neq 0\\[2mm] 0, & z=0\end{cases}$$

解 在$z\neq 0$时，有理分式的分母不为零，因此是连续的. 而在$z=0$时，取$y=kx$，令z沿直线$y=kx$趋近于零，得到

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{4}\left(\frac{x+\mathrm{j}kx}{x-\mathrm{j}kx}-\frac{x-\mathrm{j}kx}{x+\mathrm{j}kx}\right)=\mathrm{j}\,\frac{4k}{1+k^2}$$

在k取不同值时，$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$有不同值. 因此$z\to 0$时极限不存在，即$f(z)$在$z=0$处不连续.

1.1.4 复多项式与复变函数的幂级数

不难证明复多项式是最简单的连续函数，对几个复多项式可以进行求极限、

和、差、积等运算．那么与复多项式有着形式上类似的幂级数情况如何？下面简单讨论之．

复变函数的幂级数定义式是

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (|z-z_0|<R) \tag{1.1.10}$$

式中系数 c_n、z_0 都是复常数，z 是一个复变量．幂级数有收敛的概念．收敛是指部分和

$$s_n(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

有极限，即 $s(z)=\lim\limits_{n\to\infty} s_n(z)$ 成立．$s(z)$ 是一个复变函数，称之为级数的和．若 $\{s_n(z)\}$ 没有极限，称幂级数是发散的．对于幂级数的收敛性有以下定理．

收敛级数的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(z-z_0)^n=0$.

证　因为

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1}=s,\ \lim_{n\to\infty} s_n=s$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty} c_n(z-z_0)^n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=s-s=0$$

[证毕]

现在进一步考虑如何判断幂级数的收敛性．根据式（1.1.9）可以得到 $c_n(z-z_0)^n=u_n(x,y)+\mathrm{j}v_n(x,y)$，因此有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)+\mathrm{j}\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,y) \tag{1.1.11}$$

上式说明，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_n)^n$ 一定收敛．

复变函数的幂级数的绝对收敛性可以这样考虑，由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{|u_n^{(x,y)}|^2+|v_n^{(x,y)}|^2} \tag{1.1.12}$$

根据上式可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |v_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 也是绝对收敛的．

从式（1.1.10）可知，复幂级数的收敛区域是 $|z-z_0|<R$，这是一个圆，圆的半径称为收敛半径 R．R 可以是 0、∞、常数，与之对应，幂级数有三种收敛情况：

（1）在 $R=0$ 时，幂级数在整个复平面上发散；

（2）在 $R=\infty$ 时，幂级数在整个复平面上收敛；