顶尖系列

自主学习先锋

高中步步高

顶尖数学

选修2-3

人教A版

福建人民出版社

顶尖系列

自主学习先锋

高中步步高

顶尖数学

选修2-3

人教A版

福建人民出版社

主　编
张鹏程（福建师范大学数学与计算机科学学院中学数学教学研究室主任）

编写人员（按姓氏笔画排序）
方秦金　叶文榕　叶青柏　汤锦德　李新岳　陆集宁　陈　言　陈　腾
陈中峰　陈天雄　陈蓓璞　卓道章　林　风　林　婷　林元武　林嘉慧
姚承佳　柯跃海　赵祥枝　倪政翔　黄　雄　黎　强

顶尖数学（选修 2—3）（人教 A 版）
DINGJIAN SHUXUE

出　　版：福建人民出版社
地　　址：福州市东水路 76 号　　**邮政编码**：350001
电　　话：0591-87604366（发行部）　87521386（编辑室）
电子邮件：211@fjpph. com
网　　址：http://www. fjpph. com
发　　行：福建省新华书店
印　　刷：人民日报社福州印务中心
地　　址：福州市鼓屏路 33 号　　**邮政编码**：350001
开　　本：787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张：10.75
字　　数：264 千字
版　　次：2008 年 1 月第 1 版　　2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-211-05665-1
定　　价：13. 90 元

编写说明

“高中步步高”根据课程标准，配合各版本教材进行编写。丛书以课为训练单位，以单元为测试单位建构编写体系，符合教学规律，体现课改精神。丛书不仅关注学生夯实基础知识、基本技能，还关注学生学习的自主性、探究性、合作性；不仅关注培养学生学会学习、学会反思、学会自我激励，还关注培养学生学习过程中情感、态度和价值观的形成。

为了使本丛书在理念上与最新教改理念、精神相吻合，我们在本套丛书的编写过程中，坚持“三参与”原则，即颇有造诣的课程研究专家参与，深谙当前基础教育课程改革的教研员参与和具有丰富教学实践经验的一线特、高级教师参与，从而使本丛书在质量上得到充分保证。

“高中步步高”按章（或单元）进行编写，每一章（或单元）一般设：“学习目标”、“要点透析”“方法指津”、“自我评估”、“探究应用”、“拓展视野”、“归纳整合”、“单元检测卷”等栏目。

“学习目标”是根据各章（或单元）应达到的目标提出具体要求。“要点透析”是以课程标准为基准，以相应版本的教材为落脚点，较详细地分析本章（或单元）内容的重点、难点。“方法指津”通过对精选的经典题目的解析和点拨，拓展学生的思路，提升发散思维能力，掌握科学的学习方法。“自我评估”在题目设计上，特别注重吸收全国各地出现的最新题型，同时注重知识的现代化，以激活学生已有的知识、经验和方法。题目既注重基础性，又强调自主性、参与性、实践性、合作性。“探究应用”特别注重吸收密切联系生产、生活实际的有趣题目，加强探究性习题的训练。“拓展视野”对本章（或单元）知识进行拓展，通过对一些典型的探究型、开放型的题目进行解析和点拨，使学生对章（或单元）内、学科内、学科间知识结构的关系得以把握和拓展。“归纳整合”以树形图、方框图或表格等形式对本章（或单元）知识进行梳理、归纳、整合，使学生对整章（或单元）知识间的逻辑关系有个清楚的认识。经过系统的训练后，通过“单元检测卷”与“模块检测卷”对所学内容进行评价与总结。由于不同学科及不同版本的教材各有特点，因此，上述栏目及其写法允许根据实际需要适当调整，灵活掌握。“检测卷”和“部分参考答案”一般做成活页的形式，以方便使用。

“高中步步高”实现了引导学生从预习到课外阅读全程自主学习的编写理念。我们在栏目设置上创设了科学的整合模式，将“知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观”三维目标分层次地融入书中，激发学生的自主性，使学生的自主学习效果达到最优化，促进学生的全面发展。

本丛书在编写过程中引用了一些作者的作品，在此，对这些作者表示感谢，对一部分未署名的作品的作者表示歉意，并请与我们联系。由于编写时间仓促，书中难免存在不足之处，恳望读者不吝赐教，以便我们今后不断努力改进。

编 者

目录 CONTENTS

第一章 计数原理

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

学习目标

1. 理解分类加法计数原理、分步乘法计数原理.

2. 会用分类加法计数原理或分步乘法计数原理分析和解决一些简单的实际问题.

3. 培养分析问题和解决问题的能力，提高数学探究能力、数学建模能力，进一步发展数学实践能力.

要点透析

1. 分类加法计数原理

完成一件事有两类不同的方案，在第1类方案中有 m 种不同的方法，在第2类方案中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m+n$ 种不同的方法.

推广：完成一件事有 n 类不同的方案，在第1类方案中有 m_1 种不同的方法，在第2类方案中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类方案中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

2. 分步乘法计数原理

完成一件事需要分成两个步骤，做第1步有 m 种不同的方法，做第2步有 n 种不同的方法，那么完成这件事有 $N=m\times n$ 种不同的方法.

推广：完成一件事需要分成 n 个步骤，做第1步有 m_1 种不同的方法，做第2步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

3. 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的异同点

相同点：都是求完成一件事的不同方法种数的问题. 不同点：分类加法计数原理针对的是“分类”问题，完成一件事有若干类，各类的方法相互独立，用任何一类中的任何一种方法都可以单独完成这件事，类与类之间具有独立性和并列性；而分步乘法计数原理针对的是“分步”问题，完成一件事要分为若干步，各个步骤相互依存，不完成其中任何的一步都不能完成该件事，只有当各个步骤都依次完成后，才能完成这件事，是合作完成，步与步之间具有相依性和连续性.

4. 口诀

“分类用加法、分步用乘法”：分类和分步要注意“不重复、不遗漏”：解决复杂问题时多数要“先分类后分步”. 注意：少数问题可能要先分步，然后在某一步内分类.

课时1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

方法指津

例1　书架上放有3本不同的数学书，5本不同的语文书，6本不同的英语书.

（1）若从这些书中任取一本，有多少种不同的取法？

（2）若从这些书中，取数学书，语文书、英语书各一本，有多少种不同的取法？

（3）若从这些书中取不同的科目的书两本，有多少种不同的取法？

解　（1）从书架上任取一本书，可以有3类办法：第一类办法是从3本不同数学书中任取1本，有3种方法；第二类办法是从5本不同的语文书中任取1本，有5种方法；第三类办法是从6本不同的英语书中任取1本，有6种方法．根据分类加法计数原理，得到不同的取法种数是$N=m_1+m_2+m_3=3+5+6=14$．故从书架上任取一本书的不同取法有14种.

（2）从书架上任取数学书、语文书、英语书各1本，需要分成3个步骤完成：第一步取1本数学书，有3种方法；第二步取1本语文书，有5种方法；第三步取1本英语书，有6种方法．根据分步乘法计数原理，得到不同的取法种数是$N=m_1\times m_2\times m_3=3\times5\times6=90$．故从书架上取数学书、语文书、英语书各1本，有90种不同的方法.

（3）从书架上任取不同科目的书两本，可以有3类办法：第一类办法是数学书、语文书各取1本，需要分两个步骤，有3×5种方法；第二类办法是数学书、英语书各取1本，需要分两个步骤，有3×6种方法；第三类办法是语文书、英语书各取1本，有5×6种方法．一共得到不同的取法种数是$N=3\times5+3\times6+5\times6=63$．即从书架任取不同科目的书两本的不同取法有63种.

评注　由例1可知，解题的关键是从总体上看做这件事情是“分类完成”，还是“分步完成”．“分类完成”用“分类加法计数原理”，“分步完成”用“分步乘法计数原理”.

例2　用n种不同颜色为下列两块广告牌着色（如图1-1），要求在①，②，③，④个区域中相邻（有公共边界）的区域不能用同一种颜色.

（1）若$n=6$，为甲着色时共有多少种不同方法？

（2）若为乙着色时共有120种不同方法，求n.

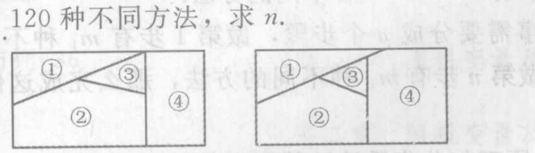

图1-1

分析　完成着色这件事，共分四个步骤，可依次考虑为①，②，③，④着色时各自的方法数，再由分步乘法计数原理确定着色方法数.

解　（1）甲图中，为①着色有6种方法，为②着色有5种方法，为③着色有4种方法，为④着色也有4种方法．∴共有着色方法$6\times5\times4\times4=480$（种）.

（2）乙图中，与（1）的区别在于与④相邻的区域由两块变成了三块，同理，不同的着色方法数是$n(n-1)(n-2)(n-3)$.

依题意：$n(n-1)(n-2)(n-3)=120$，$\therefore(n^2-3n)(n^2-3n+2)-120=0$，

即$(n^2-3n)^2+2(n^2-3n)-12\times10=0$，$\therefore(n^2-3n-10)(n^2-3n+12)=0$.

$\because n^2-3n+12>0$ 恒成立，$\therefore n^2-3n-10=0$，解得 $n_1=5$，$n_2=-2$（舍去），$\therefore n=5$.

例 3 若 x，y 是满足 $1\leqslant x\leqslant 4$，$2\leqslant y\leqslant 7$ 的整数，则以 $(x, y)(x\leqslant y)$ 为坐标的点有多少个？

解 可以分成 4 类：第一类是横坐标 $x=1$ 时，$2\leqslant y\leqslant 7$，有 6 个点；第二类是横坐标 $x=2$ 时，$2\leqslant y\leqslant 7$，也有 6 个点；第三类是横坐标 $x=3$ 时，$3\leqslant y\leqslant 7$，有 5 个点；第四类是横坐标 $x=4$ 时，$4\leqslant y\leqslant 7$，有 4 个点，根据分类加法计数原理，满足条件的点有：$6+6+5+4=21$（个）.

自我评估

1. 若公园有 4 个门，某人从一个门进，另一个门出，则他有（　　）不同走法.
   A. 16 种　　B. 13 种　　C. 12 种　　D. 10 种
2. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面，其中有 2 个面不相邻的选法共有（　　）.
   A. 8 种　　B. 12 种　　C. 16 种　　D. 20 种
3. 有 A，B 两种类型的车床各 1 台，现有甲、乙、丙 3 名工人，其中甲、乙都会操作两种车床，丙只会操作 A 种车床，现从这 3 名工人中选 2 名分别去操作以上车床，则不同的选派方法有（　　）.
   A. 6 种　　B. 5 种　　C. 4 种　　D. 3 种
4. 从集合{1，2，3}和{1，4，5，6}中各取一个元素作为点的坐标，则在直角坐标系中能确定不同点的个数是（　　）.
   A. 12　　B. 11　　C. 24　　D. 23
5. (1) 若从甲地至乙地有 2 班船，5 班车，则从甲地至乙地共有______种不同的方法.
   (2) 甲地经乙地至丙地，若甲地至乙地有公路 3 条，乙地至丙地有公路 5 条，则从甲地至丙地共有______种不同的方法.
   (3) 甲地经乙地至丙地，若甲地至乙地有水路 1 条，公路 3 条，乙地至丙地有水路 1 条，公路 2 条，铁路 1 条，则从甲地至丙地共有______种不同的方法.
6. 如图 1-2，要给地图 A、B、C、D 四个区域分别涂上红、黄、蓝、绿 4 种不同颜色中的某一种，允许同一种颜色使用多次，但相邻区域必须涂不同的颜色，不同的涂色方案有______种.
7. 要从 5 名出租车司机中选出 2 名分别上日班和晚班，有多少种不同的选法？

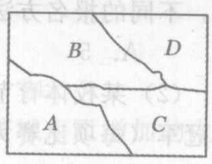

图 1-2

8. 满足 $A\cup B=\{1,\ 2\}$ 的集合 A、B 共有多少组？

9. 某文艺团体有10人，其中8人会唱歌，5人会跳舞，从中选出会唱歌与会跳舞的各1人，有多少种不同的选法？

课时2　两个原理的应用

方法指津

例1　(1) 5名学生报名参加篮球、足球、乒乓球和羽毛球4项体育比赛，每人限报1项，不同的报名方法的种数为（　　）.

A. 5^4　　B. 4^5　　C. $5\times4\times3\times2$　　D. $5+4+3+2$

(2) 某校体育节期间，高二年的5个班级争夺篮球、足球、乒乓球和羽毛球4项团体比赛冠军（每项比赛无并列冠军），那么获得冠军的可能种数为（　　）.

A. 5^4　　B. 4^5　　C. $5\times4\times3\times2$　　D. $5+4+3+2$

解　(1) 5名学生中任1名均可报其中的任1项，因此每个学生都有4种报名方法，5名学生都报了项目才能算完成这一事件，故报名方法种数为 $4\times4\times4\times4\times4=4^5$（种）. 选B.

(2) 每个项目只有1个冠军，每一个班级都可能获得其中的1项获军，因此每个项目获冠军的可能性有5种，故有 $5\times5\times5\times5=5^4$（种）. 选A.

评注　对于题(1)，你是否认为应选A？为什么不可以让篮球队、足球队、乒乓球队和羽毛球队来选五名学生呢？事实上，如果这么做，那么就有下面选法：篮球队选甲、足球队选甲、乒乓球队选乙…换句话说甲至少报了篮球、足球两项，不符合“每人限报1项”的要求.

例2　(1) 试写出由1，2，3，4，5这5个数字组成的横纵坐标不等的点的坐标，问

共有几个符合题意的点的坐标？

（2）试写出由1，2，3，4，5这5个数字组成的点的坐标，问共有几个符合题意的点的坐标？

解　（1）由1，2，3，4，5这5个数字组成的横纵坐标不等的点的坐标有：

（1，2），（1，3），（1，4），（1，5）；

（2，1），（2，3），（2，4），（2，5）；

（3，1），（3，2），（3，4），（3，5）；

（4，1），（4，2），（4，3），（4，5）；

（5，1），（5，2），（5，3），（5，4）.

答：符合题意的点的坐标共有 $5\times4=20$（个）.

（2）由1，2，3，4，5这5个数字组成的点的坐标有：

（1，1），（1，2），（1，3），（1，4），（1，5）；

（2，1），（2，2），（2，3），（2，4），（2，5）；

（3，1），（3，2），（3，3），（3，4），（3，5）；

（4，1），（4，2），（4，3），（4，4），（4，5）；

（5，1），（5，2），（5，3），（5，4），（5，5）.

答：符合题意的点的坐标共有 $5^2=25$（个）.

评注　请注意审题，题（1）中要求"横纵坐标不等"，属"不重复问题"；题（2）中没有要求"横纵坐标不等"，属"可重复问题"，即横纵坐标可以相等，要注意它们的区别与联系.

例3　已知集合 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$，求 A 的非空真子集的个数.

解　因为集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的子集的个数是 2^n（请阅读课本第12页的"子集的个数有多少"）．所以集合 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ 的子集的个数是 2^{10}，则 A 的非空真子集的个数是 $2^{10}-2=1\,022$.

自我评估

1. 将3个不同的小球放入4个盒子中，则不同放法种数有（　　）

A. 81　　B. 64　　C. 12　　D. 14

2. 某大城市的电话号码由七位升为八位（首位数字均不为0），则该城市可增加的电话部数是（　　）.

A. $9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2$　　B. 8×9^7

C. 9×10^7　　D. 81×10^6

3. 某校拟派高二年级的3个班同时到劳动基地进行社会实践，劳动基地有甲、乙、丙、丁4个，每班可自由选择1个基地，不同班级可到同一个基地，但基地甲必须有班级去，则不同的分配方案有（　　）.

A. 16种　　B. 18种　　C. 37种　　D. 48种

4. 现有1角、2角、5角、1元、2元、5元、10元、50元人民币各1张，100元人民币2张，从中至少取1张，共可组成不同的币值种数是（　　）.

A. 1024种　　B. 1023种　　C. 768种　　D. 767种

5. 已知集合 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$，则 A 的所有真子集有______个.

6. 如图1-3，一电荷从A到B共有______条不同的线路可通电.

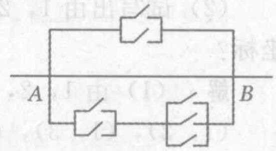

图1-3

7. 一个八位密码锁，各位上数字由0，1，2，…，9十个数字组成，可以设置多少种八位数的密码（各位上的数字允许重复）？

8. 在直角坐标平面上的点P（a，b）满足：$a\neq b$，a，$b\in\{1,2,3,4,5,6\}$，且点P到原点O的距离$|OP|\geqslant 5$. 求这样的点P的个数.

9. 电视台主持人在“欢乐今宵”节目中拿出两个信箱，其中存放着先后两次竞猜中成绩优秀的观众来信，甲信箱中有30封，乙信箱中有20封，现由主持人从甲、乙两个信箱中抽奖确定1名幸运之星，2名幸运伙伴，总共3名. 程序是：先确定1名幸运之星，再从两信箱中各确定1名幸运伙伴. 问有多少种不同的结果？

1.2 排列与组合

学习目标

1. 理解排列、组合的概念.

2. 能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式.

3. 能解决简单的实际问题.

4. 养成有条理有步骤地思考问题的良好习惯，形成实事求是、一丝不苟的科学态度和锲而不舍的钻研精神，领悟"数学来源于实践，又反过来作用于实践"，认识数学的科学意义、文化内涵，从而进一步树立辩证唯物主义的世界观.

要点透析

1. 排列与排列数

(1) 排列：一般地，从 n 个不同元素中取出 m ($m\leqslant n$) 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列 (arrangement).

(2) 排列数：从 n 个不同元素中取出 m ($m\leqslant n$) 个元素的所有不同排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数. 用符号 A_n^m 表示.

2. 排列数公式

$$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!},$$

这里，n，$m\in\mathbf{N}^*$，并且 $m\leqslant n$.

另外，全排列数公式是：$\mathrm{A}_n^n=n!=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\times2\times1$. 规定 $0!=1$.

注意区别排列和排列数的不同："一个排列"是指，从 n 个不同元素中，任取 m 个元素按照一定的顺序排成一列，不是数；"排列数"是指从 n 个不同元素中，任取 m ($m\leqslant n$) 个元素的所有排列的个数，是一个数. 所以符号 A_n^m 只表示排列数，而不表示具体的排列.

3. 组合与组合数

(1) 组合：一般地，从 n 个不同元素中，任取 m ($m\leqslant n$) 个元素合成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合 (combination).

(2) 组合数：从 n 个不同元素中取出 m ($m\leqslant n$) 个元素的所有不同组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示.

4. 组合数公式

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m(m-1)\cdot\cdots\cdot2\times1}=\frac{n!}{(n-m)!\ m!},$$

这里 n，$m\in\mathbf{N}^*$，且 $m\leqslant n$.

5. 组合数的两个性质

性质 1：$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$　(特别规定 $\mathrm{C}_n^0=1$)；

性质 2：$\mathrm{C}_{n+1}^m=\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}$.

6. 排列与组合的联系和区别

排列与组合都是从n个不同元素中任取m个不同元素，但是前者要求将元素排出一个顺序（既取又排，有序），而后者对此不做要求（只取不排，无序），是否有序是它们之间的本质区别．若不理解排列问题和组合问题的区别，在解决实际问题时就会犯错误．

7．解排列、组合应用问题的基本思路和常用方法

（1）基本思路：

①直接法，即从条件出发，直接考虑符合条件的排列数或组合数．

②间接法，即先不考虑限制条件，求出所有排列或组合数，然后再从中减去不符合条件的排列或组合数．

（2）两种途径：元素分析法，位置分析法．

（3）常用方法：特殊元素、特殊位置"优先法"、捆绑法、插空法、排除法（减法）、除序法（除法）隔板法（构造法）等等．

8．口诀

"有序用排列，无序用组合"；解决综合问题时多数要"先选后排，先分类后分步"．注意：少数问题可能要"先排后选"．

1.2.1 排 列

课时1 排列与排列数公式

方法指津

例1 计算下列各题：(1) $\dfrac{2A_7^5-A_6^6}{6!+5!}$；(2) $\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_{10}^6-A_{10}^5}$．

解 (1) $\dfrac{2A_7^5-A_6^6}{6!+5!}=\dfrac{2\times7\times6\times5\times4\times3-6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1+5\times4\times3\times2\times1}=\dfrac{7\times6-6}{6+1}=\dfrac{36}{7}$．

或者 $\dfrac{2A_7^5-A_6^6}{6!+5!}=\dfrac{7!-6!}{6!+5!}=\dfrac{(7\times6-6)\times5!}{(6+1)\times5!}=\dfrac{36}{7}$．

(2) $\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_{10}^6-A_{10}^5}=\dfrac{9\times8\times7\times6\times5+9\times8\times7\times6}{10\times9\times8\times7\times6\times5-10\times9\times8\times7\times6}=\dfrac{5+1}{10\times5-10}=\dfrac{3}{20}$．

或者 $\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_{10}^6-A_{10}^5}=\dfrac{5A_9^4+A_9^4}{5A_{10}^5-A_{10}^5}=\dfrac{6A_9^4}{4A_{10}^5}=\dfrac{6A_9^4}{4\times10A_9^4}=\dfrac{3}{20}$．

评注 注意变式：$m!=m\cdot(m-1)!=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)!=\cdots$．

例2 求n值：$A_{2n+1}^4=140A_n^3$．

解 由排列数公式，得$(2n+1)\cdot2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)=140\cdot n(n-1)(n-2)$，

整理得 $4n^2-35n+69=0$，$\therefore(4n-23)(n-3)=0$，$\therefore n=3$或$n=\dfrac{23}{4}$（舍去）．

$\therefore n=3$．

例3 乒乓球队的10名队员中有3名主力队员，派5名参加比赛，3名主力队员要安排在第一、三、五位置，其余7名队员选2名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有多少种？（用数字作答）．

解　分成两个步骤完成：第一步，三名主力队员的排法有 A_3^3 种；第二步，其余7名队员选2名安排在第二、四位置上有 A_7^2 种排法，故共有排法数 $A_3^3\times A_7^2=252$（种）.

自我评估

1. 5人站成一排，不同的站法有（　　）.

A. 120种　　B. 100种　　C. 32种　　D. 24种

2. 对于小于55的自然数 n，积 $(55-n)(56-n)(57-n)\cdot\cdots\cdot(68-n)(69-n)$ 等于（　　）.

A. A_{69-n}^{55-n}　　B. A_{69-n}^{15}　　C. A_{55-n}^{15}　　D. A_{69-n}^{14}

3. 不同的3本数学书、4本英语书、5本小说放在书架的同一格里，每种书都要集中放在一起，则不同摆放方法种数为（　　）.

A. $(A_3^3)^2A_4^4A_5^5$　　B. $A_3^3A_4^4A_5^5$　　C. $3A_3^3A_4^4A_5^5$　　D. $\frac{1}{3}A_{12}^{12}$

4. 若直线方程 $Ax-By=0$ 的系数 A、B 可以从0，1，2，3，6，7六个数字中取不同的数值，则这些方程所表示的不同直线的条数是（　　）.

A. 22　　B. 20　　C. 18　　D. 12

5. 计算：$A_5^5=$______；$A_6^6=$______；$A_8^3=$______.

6. 电视台连续播放6个广告，其中含4个不同的商业广告和2个不同的公益广告，要求首尾必须播放公益广告，则共有______种不同的播放方式（结果用数值表示）.

7. 由0，1，3，5，7，9这6个数字可以组成多少个没有重复数字的六位奇数？

8. 求证：(1) $A_{n+1}^{n+1}=A_{n+1}^{n}=(n+1)A_n^n$；(2) $A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$.

9. 安排7位工作人员在10月1日到10月7日值班，每人值班1天，其中甲、乙2人都不能安排在10月1日和2日，不同的安排方法共有多少种？

课时2　排列的应用1

方法指津

例1　已知 $ax^2-b=0$ 是关于 x 的一元二次方程，其中 a，$b\in\{1, 2, 3, 4\}$，求解集不

同的一元二次方程的个数.

解 a 有 4 种取法，b 有 4 种取法，据乘法原理，一共有 $4\times4=16$ 个方程. 但由于要求解集不同，所以在上述解法中要去掉同解情况，由于 $\begin{cases}a=1,\\b=2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}a=2,\\b=4\end{cases}$ 同解，$\begin{cases}a=2,\\b=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}a=4,\\b=2\end{cases}$ 同解，$\begin{cases}a=1,\\b=1,\end{cases}$ $\begin{cases}a=2,\\b=2,\end{cases}$ $\begin{cases}a=3,\\b=3\end{cases}$ 和 $\begin{cases}a=4,\\b=4\end{cases}$ 四个方程同解，故要减去 5 个.

所以解集不同的一元二次方程共有 $16-5=11$（个）.

评注 要注意审题，做到“不重复，不遗漏”. 不要遗漏 a，b 可以取同一个数时的方程；要去掉重复的同解方程.

例 2 用 0，2，3，4，5 这五个数字，组成没有重复数字的三位数，其中偶数共有多少个？

分析 因组成的三位数为偶数，末位的数字必须是偶数，又 0 不能排在首位，故 0 是其中的“特殊”元素，应优先安排，可按 0 排在末位和 0 不排在末位分类.

解 分为两类：①当 0 排在末位时，三位偶数有 A_4^2 个；②当 0 不排在末位时，三位偶数有 $A_2^1A_3^1A_3^1$ 个，据分类加法计数原理，偶数共有 $A_2^1A_3^1A_3^1+A_4^2=30$（个）.

评注 对于带有特殊元素的排列问题，一般应优先考虑安排特殊元素，再考虑安排其他元素，这种方法一般叫做“优先法”. 同样的，对于一些特殊位置，如本例的末位，也应优先考虑，再考虑其他位置.

例 3 有 5 名学生和 3 名老师站成一排照像.

（1）3 名老师必须站在一起的不同排法共有多少种？

（2）3 名老师必须都不相邻的不同排法共有多少种？

解 （1）将 3 名老师“捆绑”起来看做一个元素，与 5 名学生排列，有 A_6^6 种排法，而 3 名老师之间又要自排，有 A_3^3 种排法，故满足条件的排法共有 $A_6^6A_3^3=4320$（种）.

（2）先让 5 名学生排成一行，有 A_5^5 种排法，再让 3 名老师在每两人之间及两端的 6 个空隙中插入，有 A_6^3 种方法，故满足条件的排法共有 $A_5^5A_6^3=14400$（种）.

评注 （1）对于某几个元素要求相邻的排列问题，可先将相邻的元素“捆绑”起来看做一个元素与其他元素排列，然后再对相邻元素之间进行排列，这种方法一般叫做“捆绑法”. 简称相邻问题捆绑法.（2）对于某几个元素不相邻的排列问题，可先将其他元素排好，然后再将不相邻的元素在这些排好的元素之间及两端的空隙中插入，这种方法一般叫做“插空法”. 简称不相邻问题插空法.

自我评估

1. A、B、C、D、E 5 人并列站成一排，如果 A、B 必须相邻且 B 在 A 的右边，那么不同的排法有（　　）.

A. 60 种　　B. 48 种　　C. 36 种　　D. 24 种

2. 3 名男歌唱家和 2 名女歌唱家联合举行一场音乐会，演出的出场顺序要求 2 名女歌唱家之间恰有 1 名男歌唱家，其出场方案共有（　　）.

A. 36 种　　B. 18 种　　C. 12 种　　D. 6 种

3. 用数字 0，1，2，3，4 组成没有重复数字的比 1 000 大的奇数共有（　　）.

A. 36 个　　B. 48 个　　C. 66 个　　D. 72 个

4. 在由数字 1，2，3，4，5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中，大于 23 145 且小于 43 521 的数共有（　　）.

A. 56 个　　B. 57 个　　C. 58 个　　D. 60 个

5. 用 1，4，5，x 四个不同数字组成四位数，所有这些四位数中各位上的数字的总和为 288，则 x=______.

6. 8 张单人椅子排成一行，有 4 个人就座，每人 1 个座位，恰有 3 个连续空位的坐法共有______种.

7. 有个密码由 5 个大写字母 A，B，C，D，E 和 4 个小写字母 a，b，c，d 构成，且按下列要求排列，求各有多少种不同的排法？

(1) 大写字母、小写字母都分别排在一起；(2) 大小写字母必须相间.

8. 已知集合 $\{-11, -7, 0, 1, 2, 3, 5\}$ 从中每次取出 3 个不重复的元素作为直线 $Ax+By+C=0$ 中的字母 A，B，C，问斜率小于 0 的直线共有多少条？

9. 7 个人排成一排，在下列情况下，各有多少种不同排法？

(1) 甲不排头，也不排尾；

(2) 若要求甲、乙、丙 3 人不排两端，且甲、乙、丙 3 人排在一起；

(3) 甲、乙之间有且只有 2 人；

(4) 甲、乙、丙 3 人两两不相邻；

(5) 甲在乙的左边（不一定相邻）；

(6) 甲、乙、丙 3 人按从高到矮，自左向右的顺序；

(7) 甲不排头，乙不排尾；

(8) 要求甲、乙、丙 3 人两两不相邻，且丁不排在队首与队尾.

课时 3　排列的应用 2

方法指津

例 1　某次文艺晚会上共演出 8 个节目，其中 2 个歌唱、3 个舞蹈、3 个曲艺节目，要排 2 个歌唱节目不相邻，3 个舞蹈节目也不相邻的节目单，问共有多少种不同的排法？

分析　直接法要讨论的情况多，过程较繁杂."正难则反"，从问题的"反面"入手可以简化解题过程. 即：符合题意的种数＝舞蹈节目不相邻的排法种数－2 个歌唱节目相邻而 3 个舞蹈节目不相邻的排法种数.

解　先排 5 个非舞蹈节目，有 A_5^5 种排法，再将 3 个舞蹈节目插入，有 6 个空格好插，所以有 A_6^3 种插入法，即舞蹈节目不相邻的排法共有 $A_5^5\times A_6^3$ 种. 其中 2 个歌唱节目相邻而 3 个舞蹈节目不相邻的排法种数有：把相邻 2 个歌唱节目看做一个元素，与 3 个曲艺节目排列，共有 A_4^4 种排法，再将 3 个舞蹈节目插入，共有 A_5^3 种插入法，最后再将 2 个歌唱节目互换位置，有 A_2^2 种排法，所以 2 个歌唱节目相邻而 3 个舞蹈节目不相邻的排法种数有 $A_4^4A_5^3A_2^2$ 种.

故排法共有 $A_5^5A_6^3-A_4^4A_5^3A_2^2=11\ 520$（种）.

例 2　用数字 0、1、2、3、4、5 组成没有重复数字的六位数.

（1）个位数字小于十位数字的共有多少个？

（2）个位数字小于十位数字，且十位数小于百位数字的共有多少个？

解　（1）若不考虑附加条件，组成的六位数共有 $A_5^1A_5^5$ 个，而其中个位数字与十位数字的 A_2^2 种排法中只有一个符合条件（如 541 032，541 023 这两个个位数字和十位数字由 2、3 排列成的六位数只有一个符合条件，另一个不符合条件），即符合条件的六位数占总数的二分之一，故共有 $A_5^1A_5^5\div 2=300$（个）.

（2）若不考虑附加条件，组成的六位数共有 $A_5^1A_5^5$ 个，而其中个位数字、十位数字和百位数字的 A_3^3 种排法中只有一个符合条件（如 410 532，410 523，410 352，410 325，410 253和 410 235 这 6 个六位数的个位数字、十位数字和百位数字是由 2，3，5 排列成的，其中只有一个符合条件，另外五个不符合条件），即符合条件的六位数占总数的六分之一，故共有 $A_5^1A_5^5\div A_3^3=100$（个）.

评注　对于要求某几个元素顺序一定的排列问题，可先把这几个元素与其他元素一同进行排列，然后用所得排列数除以这几个元素的全排列数，这种方法一般叫做"除序法". 简称定序问题除序法.

例 3　某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分（如图 1-4），现要栽种 4 种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有多少种？

分析一　记花的颜色为 A、B、C、D 四色，按照区域的顺序分步安排栽种方法.

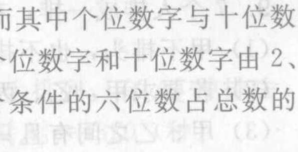

图 1-4

解法一　先安排区域 1、2、3 有 A_4^3 种不同的栽种法：不妨设 1、2、3 已分别栽种 A、B、C 三色的花，则区域 4、5、6 栽种方法共 5 种，如下所示，根据分步乘法计数原理，