新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

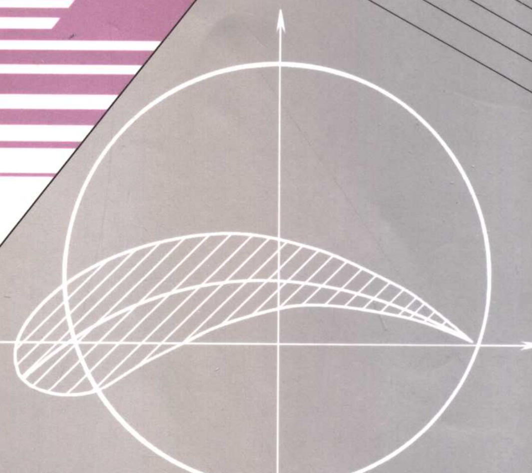
陈方权 蒋绍惠 编著

北京师范大学数学科学学院 组编

解析函数论基础

第二版

JIEXI HANSHU LUN JICHU



$$W=\frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right)$$

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

北京师范大学数学科学学院 组编

解析函数论基础 第二版

JIEXI HANSHULUN JICHU

陈方权 蒋绍惠 编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析函数论基础/陈方权，蒋绍惠编著.—2版.—北京：北京师范大学出版社，2008.2
ISBN 978-7-303-09103-4

Ⅰ.解… Ⅱ.①陈… ②蒋… Ⅲ.解析函数-师范大学-教材 Ⅳ.O174.55

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第005812号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：涿州市星河印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：16
字　　数：280千字
印　　数：1～3 000册
版　　次：2008年2月第2版
印　　次：2008年2月第1次印刷
定　　价：24.00元

责任编辑：岳昌庆　　装帧设计：高　霞
责任校对：李　菡　　责任印制：马鸿麟

内 容 简 介

本书是作者总结多年在北京师范大学数学系教与学两方面的经验，根据原教育部1980年颁发的师范院校教学大纲的要求，并参考了国内外多种复变函数论教材编写而成的. 本书内容包括复数与复变函数、复变初等函数、解析函数的基本特征、解析函数的重要性质、留数理论及其应用、解析开拓、单叶解析映照、复变函数方法在边值问题中的应用. 本书具有以下特点：

(1)便于自学和阅读；

(2)适当突出与中学数学课程有关的内容；

(3)加强与解析函数基本理论有关的练习；

(4)章节安排便于根据实际情况取舍.

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立了数学与数学教育研究所，2004年成立了数学科学学院．学院现有教师73人，其中教授32人，副教授23人；有博士学位的教师占90％．特别地，有中国科学院院士2人，国家杰出青年基金获得者4人，教育部长江学者奖励计划特聘教授5人和讲座教授1人，入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人，入选教育部跨/新世纪人才培养计划7人．

数学科学学院1981年获基础数学、概率论与数理统计学博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权，1988年，基础数学、概率论与数理统计学被评为国家级重点学科，1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站，1996年，数学学科成为国家"211工程"重点建设的学科，1997年成为国家基础科学人才培养基金基地，1998年获数学一级学科博士授予权，2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体，2002年概率论与数理统计学再次被评为国家级重点学科，2005年进入"985工程"科技创新基础建设平台，2006年国家教育部数学与复杂系统重点实验室已经通过专家论证，目前正在建设中．2007年概率论与数理统计学重点学科通过考核评估，基础数学被增补为国家级重点学科，数学被认定为国家级一级重点学科．学院还有基础数学、计算数学、概率论与数理统计学、应用数学、课程与教学论(数学)、科学技术史(数学)、计算机软件与理论、控制理论与控制工程8个硕士点．学院下设数学系、统计与金融数学系，有数学与应用数学、统计学2个本科专业；有分析、代数、几何、方程、概率论、数理统计、计算数学、应用数学、数学教育与数学史9个教研室和《数学通报》杂志编辑部．数学与数学教育研究所有随机数学、生物信息、模糊系统与模糊信息处理、统计数据分析、数学现代分析、科学计算、动力系统7个研究中心，有复杂系统实时控制、数据统计与分析2个实验室．

90多年来，数学科学学院已毕业全日制本科生6467人．20多年来，已毕业博士研究生190人，硕士研究生818人．据不完全统计，在博士毕业生中：有2人当选为中国科学院院士，6人获国家杰出青年基金，4人获国家自然科学奖，3人获国家级有突出贡献的中青年专家称号，2人入选新世纪百千万人才工程国家级人选，2人入选教育部优秀青年教师资助计划，7人入选教育部跨/新世纪人才培养计划，1人入选全国百篇优秀博士学位论文．2人获全国百篇优秀博士学位论文提名．

（李仲来执笔）

2008年1月18日

第二版前言

1915年北京高等师范学校成立数理部，1922年成立数学系. 2005年适逢数理部诞辰90周年，也是北京师范大学数学科学学院建院1周年. 经过90年的寒暑春秋，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980年，北京师范大学出版社成立，给教材的出版提供了一个很好的契机. 我院教师编著的数十种教材已先后在这里出版. 除了北京师范大学现代数学丛书外，就大学教材而言，共有五种版本. 第一种是列出编委会的高等学校教学用书，这是在20世纪80年代初期，由北京师范大学出版社王文湧先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会，研究编写出版一套数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材. 在出版社的大力支持下，这一计划完全实现，满足了当时教学的需要. 第二种是标注高等学校教学用书，但未列编委会的教材. 第三种是(北京师范大学)面向21世纪课程教材. 第四种是北京师范大学现代数学课程教材. 第五种是未标注高等学校教学用书，但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中，除再次印刷外，已经有五部教材进行了修订或出版了第二版.

前一段时间，王建华老师和王琦老师分别搜集了我院本科生的所有教材和研究生12门基础课教材的使用情况，李仲来教授汇总了我院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作，由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，准备对数学科学学院教师目前使用或誊印(出版社已经没有存书的教材)的北京师范大学出版社出版的部分教材进行修订后再版. 计划用几年时间，出版数学和应用数学、数学教育、数学学科硕士研究生三个系列的主要课程教材.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2005年8月8日

第二版编者的话

我们在退休逾十年之际，能有机会来修订二十年前出版的这一本大学本科复变函数论课程的基础教材，并再次印刷出版，感到十分欣慰. 新版在保留原版结构和特点的基础上作了全面的修订，删节了一些烦琐或多余的段落及习题，并将全书的各种编号作了统一的调整，我们希望改版后的这本教材对教学及读者更为实用.

我们借此向多年来本校和各兄弟院校使用本教材的教师及读者表示感谢！并为原版教材中的问题所带来的不便表示歉意. 对北京师范大学数学科学学院领导对教材建设的关注和所付出的辛劳表示敬意和感谢！也感谢北京师范大学出版社的王松浦等同志，他们为新版教材的出版同样付出了太多的辛劳！

编者

2007 年 8 月于北京师范大学数学科学学院

第一版编者的话

我们在多年从事复变函数论课程的教学工作之后，总结教和学两方面的经验，结合目前师范院校的情况，按照原教育部 1980 年颁发的师范院校复变函数教学大纲所规定的内容，并参考了国内外现行的多种复变函数论教材，编写了本教材.

我们希望业已完成的教材有以下特点：

(1) 便于读者自学和阅读. 例如，我们将复变函数中的一些与一元微积分在形式上几乎完全一样的概念，如函数、连续、微分、积分、级数(特别是幂级数)及其基本性质集中于第一章中引入，这样既使读者不感到陌生而又便于对照复习数学分析中相应的概念和性质.

(2)适当突出与中学数学教学有关的内容.

(3)加强与解析函数基本理论有关的练习. 例如，我们专门针对某些重要定理编选了习题使读者通过练习加深对定理的理解. 另外在习题中还注意配备了一些综合应用题及有多种解法的习题，以便教师在习题课上讲解或组织学生讨论.

(4)在章节的安排上便于教师根据不同情况及要求进行取舍. 例如前三章详细讲述了复变函数、复变初等函数与解析函数的基本概念及基本性质，这部分内容应要求学生很好地掌握，但有些章节(例如第一章的部分内容)可由学生通过自学完成. 后几章着重讲述解析函数的级数方法、积分方法、解析开拓方法、初等映照方法的应用及有关理论，这部分内容可根据不同情况及要求删去或略讲其中某些章节，例如第四章 §4.1.3(即第 3 段，下同)，§4.1.4，§4.3.5，§4.4，第五章 §5.1.4，§5.1.5，§5.2.3，第六章 §6.2，第七章 §7.1.1，§7.1.2，§7.1.3，§7.3 中定理的证明，第八章 §8.1，§8.2.3，§8.2.4.

本教材作为讲义已在本系连续使用过多次，实践结果表明使用本教材在 68～72 学时中可以完成教学大纲规定的教学任务. 各章的教学时数可参考如下安排：第一章 8 学时，第二章 10 学时，第三章 10 学时，第四章 10 学时，第五章 8 学时，第六章 6 学时，第七章 12 学时，第八章 4～8 学时，另外有

17～18 学时的习题课.

本教材在目次上分为章、节(§)、段，其中定义、定理、公式按节编号，推论跟随在相应定理之后编号，例题按段编号，图按全书统一顺序编号，未用定义给出的概念用黑体字印出.

本教材第一、二、三、七章由陈方权编写，第四、五、六、八章由蒋绍惠编写. 黄海洋、洪良辰、娄树宪等同志先后使用过本教材进行教学，提出了许多有益的修改意见，赵桢老师对本教材的编写工作十分关心和支持，并亲自进行了审阅，另外许多兄弟院校的同行及我们的学生也对这一教材提出了不少修改意见，我们在此一并表示感谢. 由于本教材采用了与现行各种教材不太一样的顺序，也由于编者水平所限，因而难免会有谬误或不妥之处，欢迎读者和同行们批评指正.

编者

1986 年 10 月于北京师范大学数学系

目　　录

第一章　复数与复变函数 …… (1)
§1.1　复数表示法及其代数运算 …… (1)
1.1.1　复数域 …… (1)
1.1.2　虚单位 …… (2)
1.1.3　共轭复数 …… (2)
1.1.4　复平面 …… (3)
1.1.5　复数的向量表示 …… (4)
1.1.6　复数的三角表示 …… (5)
1.1.7　复数的乘幂 …… (6)
1.1.8　举例 …… (7)
§1.2　序列极限及无穷大 …… (10)
1.2.1　复数序列的极限 …… (10)
1.2.2　复数项级数 …… (11)
1.2.3　无穷大及无穷远点 …… (13)
§1.3　复变函数的极限与连续性 …… (15)
1.3.1　复变函数 …… (15)
1.3.2　函数的极限 …… (17)
1.3.3　函数的连续性 …… (17)
1.3.4　连续曲线 …… (18)
1.3.5　函数 Arg z 的单值连续分支 …… (20)
§1.4　复函数的导数与微分 …… (22)
1.4.1　导数与微分 …… (22)
1.4.2　导数与微分运算法则 …… (22)
1.4.3　可导与可微的充分必要条件 …… (23)
1.4.4　光滑曲线 …… (25)
§1.5　复函数的积分 …… (26)
1.5.1　复函数的积分 …… (26)
1.5.2　复积分的性质 …… (27)

1.5.3 不定积分与原函数 …………………………………… (28)
§1.6 复变函数项级数 …………………………………… (30)
1.6.1 复变函数项级数 …………………………………… (30)
1.6.2 幂级数 …………………………………… (31)
第一章 习题 …………………………………… (35)
第二章 复变量初等函数 …………………………………… (40)
§2.1 有理函数 …………………………………… (40)
2.1.1 多项式 …………………………………… (40)
2.1.2 有理函数 …………………………………… (41)
2.1.3 一些常用的有理函数及其性质 …………………………………… (43)
§2.2 指数函数 …………………………………… (47)
2.2.1 指数函数的定义及其基本性质 …………………………………… (47)
2.2.2 指数函数的映照性质 …………………………………… (48)
§2.3 三角函数与双曲函数 …………………………………… (51)
2.3.1 三角函数的定义及其基本性质 …………………………………… (51)
2.3.2 双曲函数的定义及性质 …………………………………… (53)
2.3.3 三角函数的映照性质 …………………………………… (54)
§2.4 根式函数 …………………………………… (57)
2.4.1 根式函数的定义 …………………………………… (57)
2.4.2 根式函数的单值连续分支 …………………………………… (57)
2.4.3 函数 $f(z)=\sqrt[n]{R(z)}$ 的单值连续分支 …………………………………… (59)
2.4.4 根式函数的映照性质 …………………………………… (62)
§2.5 对数函数 …………………………………… (64)
2.5.1 对数函数的定义 …………………………………… (64)
2.5.2 对数函数的运算性质 …………………………………… (64)
2.5.3 对数函数的单值连续分支 …………………………………… (65)
2.5.4 函数 $f(z)=\mathrm{Ln}\,R(z)$ 的单值连续分支 …………………………………… (66)
2.5.5 对数函数的映照性质 …………………………………… (68)
2.5.6 对数函数的导数及其积分表示与级数表示 …………………………………… (68)
§2.6 一般幂函数与一般指数函数 …………………………………… (71)
2.6.1 一般幂函数的定义及性质 …………………………………… (71)
2.6.2 一般指数函数 …………………………………… (71)
§2.7 反三角函数与反双曲函数 …………………………………… (73)
2.7.1 反三角函数的定义 …………………………………… (73)

2.7.2　反余弦函数的单值连续分支 …… (73)
2.7.3　反余弦函数的映照性质 …… (74)
2.7.4　反双曲函数 …… (76)
第二章　习题 …… (77)
第三章　解析函数及其基本特征 …… (81)
§3.1　解析函数的定义 …… (81)
3.1.1　解析函数的定义 …… (81)
3.1.2　初等函数的解析性 …… (82)
§3.2　柯西积分定理及柯西积分公式 …… (83)
3.2.1　柯西积分定理 …… (83)
3.2.2　多连通区域上的柯西积分定理 …… (87)
3.2.3　柯西积分公式 …… (89)
§3.3　解析函数的泰勒展式 …… (91)
3.3.1　泰勒定理 …… (91)
3.3.2　初等函数的泰勒展式 …… (93)
§3.4　解析函数的罗朗展式 …… (98)
3.4.1　幂级数的推广 …… (98)
3.4.2　罗朗定理 …… (100)
§3.5　解析函数的特征 …… (104)
3.5.1　解析函数的微分形式的特征条件 …… (104)
3.5.2　解析函数的积分形式的特征条件 …… (105)
3.5.3　解析函数的级数形式的特征条件 …… (106)
第三章　习题 …… (107)
第四章　解析函数的重要性质 …… (112)
§4.1　区域内解析函数的性质 …… (112)
4.1.1　解析函数的唯一性 …… (112)
4.1.2　最大模原理 …… (114)
4.1.3　希瓦尔兹引理 …… (116)
4.1.4　维尔斯特拉斯定理 …… (118)
§4.2　解析函数的零点及其性质 …… (121)
4.2.1　解析函数的零点 …… (121)
4.2.2　解析函数零点的孤立性 …… (122)
§4.3　解析函数在孤立奇点附近的性质 …… (124)
4.3.1　解析函数的孤立奇点及其类型 …… (124)

4.3.2 可去奇点 …………………………………………………… (125)
4.3.3 极点 ………………………………………………………… (126)
4.3.4 本性奇点 …………………………………………………… (127)
4.3.5 解析函数在无穷远点附近的性质 ………………………… (129)
§4.4 整函数与亚纯函数的概念 ……………………………… (132)
4.4.1 整函数 ……………………………………………………… (132)
4.4.2 亚纯函数 …………………………………………………… (133)
第四章 习题 ……………………………………………………… (135)
第五章 留数理论及其应用 ……………………………………… (138)
§5.1 留数理论 ………………………………………………… (138)
5.1.1 留数的概念 ………………………………………………… (138)
5.1.2 留数定理 …………………………………………………… (139)
5.1.3 留数的计算 ………………………………………………… (139)
5.1.4 无穷远点的留数 …………………………………………… (142)
5.1.5 辐角原理和儒歇定理 ……………………………………… (144)
§5.2 应用留数计算实函数的积分 …………………………… (148)
5.2.1 预备知识 …………………………………………………… (148)
5.2.2 积分计算(Ⅰ) ……………………………………………… (149)
5.2.3 积分计算(Ⅱ) ……………………………………………… (153)
第五章 习题 ……………………………………………………… (158)
第六章 解析开拓 ………………………………………………… (162)
§6.1 解析开拓的概念与方法 ………………………………… (162)
6.1.1 解析开拓的定义 …………………………………………… (162)
6.1.2 对称开拓 …………………………………………………… (163)
6.1.3 幂级数的解析开拓 ………………………………………… (164)
6.1.4 将实变量函数开拓为复变量函数 ………………………… (166)
§6.2 完全解析函数及黎曼曲面的概念 ……………………… (168)
6.2.1 完全解析函数的概念 ……………………………………… (168)
6.2.2 单值性定理 ………………………………………………… (169)
6.2.3 黎曼曲面举例 ……………………………………………… (170)
第六章 习题 ……………………………………………………… (174)
第七章 单叶解析映照 …………………………………………… (176)
§7.1 解析映照的基本特性 …………………………………… (176)
7.1.1 局部单叶性 ………………………………………………… (176)

7.1.2　保区域性 …………………………………………………… (178)
7.1.3　保连通性 …………………………………………………… (178)
7.1.4　保角性 ……………………………………………………… (179)
7.1.5　伸缩率的不变性 …………………………………………… (181)
7.1.6　保形性 ……………………………………………………… (182)
§7.2　分式线性映照 ………………………………………………… (183)
7.2.1　分式线性映照的一般性质 ………………………………… (183)
7.2.2　分式线性映照的特性 ……………………………………… (184)
7.2.3　确定分式线性映照的条件及方法 ………………………… (191)
§7.3　单叶解析映照基本问题 ……………………………………… (197)
7.3.1　单叶解析映照基本问题 …………………………………… (197)
7.3.2　边界对应定理 ……………………………………………… (197)
7.3.3　黎曼存在及唯一性定理 …………………………………… (198)
§7.4　单叶解析映照基本问题举例 ………………………………… (201)
第七章　习题 ……………………………………………………… (210)
第八章　复变函数方法在边值问题中的应用 ……………………… (214)
§8.1　柯西型积分与黎曼边值问题 ………………………………… (214)
8.1.1　柯西型积分 ………………………………………………… (214)
8.1.2　柯西型积分的主值 ………………………………………… (216)
8.1.3　柯西型积分的极限值 ……………………………………… (217)
8.1.4　黎曼边值问题 ……………………………………………… (220)
§8.2　调和函数与狄利克雷问题 …………………………………… (224)
8.2.1　调和函数和解析函数的关系 ……………………………… (224)
8.2.2　中值公式与泊松公式 ……………………………………… (225)
8.2.3　极值原理 …………………………………………………… (226)
8.2.4　狄利克雷问题 ……………………………………………… (227)
第八章　习题 ……………………………………………………… (231)

部分习题参考答案 ………………………………………………… (233)
外国人名译名对照 ………………………………………………… (242)

第一章　复数与复变函数

本章从复数域的定义出发引入了复数及其运算的几种表示法；复数列的极限及无穷大数；复变函数及其极限、连续、导数、微分、积分、级数等基本概念及它们的基本性质，这些概念及性质与一元或二元微积分中相应概念及性质在形式上非常相近，但本质上却有着很大的差别，这种差别是我们应该特别关注的.

§1.1　复数表示法及其代数运算

1.1.1　复数域

复变函数是定义于复数域上的函数关系，因而回顾一下复数域的基本概念是十分必要的.

一对有序实数 a 与 b 的复合称为一个**复数**，可按其顺序记为 (a,b)，或用单一字母 z 表示. 一切复数的全体构成**复数集**，记作 $\mathbf{C}=\{z=(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$，此处 $\mathbf{R}$ 表示实数域.

我们对 $\mathbf{C}$ 中任意两个复数 $z_1=(a,b)$，$z_2=(c,d)$，引入如下规定：

(1)当且仅当 $a=c,b=d$ 时称 z_1 与 z_2 **相等**，记作 $z_1=z_2$；

(2)z_1 与 z_2 相"**加**"的**和**仍为一复数 $(a+c,b+d)$，记作 $z_1+z_2=(a+c,b+d)$；

(3)z_1 与 z_2 相"**乘**"的**积**仍为一复数 $(ac-bd,ad+bc)$，记作 $z_1\cdot z_2=(ac-bd,ad+bc)$.

容易验证，"加"与"乘"的运算满足交换律、结合律和分配律；对于加法有**零元** $(0,0)$，记作 0，对于任意复数 z，显然有 $z+0=z$，同时对任意复数 $z=(a,b)$，有**负元** $(-a,-b)$，记作 $-z$，使得 $z+(-z)=0$；对于乘法有**单位元** $(1,0)$，记作 1，对任意复数 z，有 $z\cdot 1=z$，同时对任意非零复数 $z=(a,b)$，有**逆元** $\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$，记作 z^{-1}，或 $\frac{1}{z}$，使得 $z\cdot z^{-1}=z\cdot\frac{1}{z}=1$.

复数 $z_1=(a,b)$ 与 $z_2=(c,d)$ 相减的**差**定义为：

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(a-c,b-d).$$

而复数 z_1 与 $z_2(z_2\neq 0)$ 相除的商定义为:

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot(z_2^{-1})=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

综上所述可见,复数集 $\mathbf{C}$ 对于所作的三条规定来说构成复数域. 容易验证,数集 $\{(a,0)\mid a\in\mathbf{R}\}$ 是复数域中与实数域同构的子域,为简单起见,可认为 $(a,0)$ 与 a 表示同一个数,即 $\{(a,0)\mid a\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$. 这样就可以说实数域是复数域的子域,反之,复数域是实数域的括域.

1.1.2　虚单位

复数域中,$(0,1)$ 是一个特殊的复数,它有以下性质:

(1) $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$;

(2) $(a,b)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0)=a+(0,1)\cdot b$.

称 $(0,1)$ 为**虚单位**,简记为 i. 于是性质(1)可记为 $\mathrm{i}^2=-1$,这表明 i 是方程 $z^2+1=0$ 的根. 而由性质(2)可知复数 $z=(a,b)$ 可表成 $z=a+\mathrm{i}b$,称 a 为复数 z 的**实部**,记作 $a=\mathrm{Re}\,z$;称 b 为复数 z 的**虚部**,记作 $b=\mathrm{Im}\,z$.

利用 $z=a+\mathrm{i}b$ 的表示法,复数的加法与乘法可写成

$$z_1+z_2=(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)=(a+c)+\mathrm{i}(b+d);\tag{1.1.1}$$

$$z_1\cdot z_2=(a+\mathrm{i}b)\cdot(c+\mathrm{i}d)=(ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc).\tag{1.1.2}$$

减法与除法可以写成

$$z_1-z_2=(a+\mathrm{i}b)-(c+\mathrm{i}d)=(a-c)+\mathrm{i}(b-d);\tag{1.1.3}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\mathrm{i}\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\ (z_2\neq 0).\tag{1.1.4}$$

1.1.3　共轭复数

还有一个复数 $(0,-1)=-\mathrm{i}$,称为**共轭虚单位**. 相应地把复数 $a-\mathrm{i}b$ 称为 $z=a+\mathrm{i}b$ 的**共轭复数**,记作 $\bar{z}=a-\mathrm{i}b$. 由于 $\bar{\bar{z}}=z$,故 z 与 $\bar{z}$ 互为共轭复数. 实数是复数域中全部的共轭不变量,即 z 是实数的充要条件为 $z=\bar{z}$. 利用共轭复数可以得到以下关系:

$$\mathrm{Re}\,z=a=\frac{z+\bar{z}}{2};\tag{1.1.5}$$

$$\mathrm{Im}\,z=b=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}.\tag{1.1.6}$$

容易验证以下关于共轭复数的运算公式:

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2;\tag{1.1.7}$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2;\tag{1.1.8}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\ (z_2\neq 0). \tag{1.1.9}$$

1.1.4 复平面

如果将任一复数 $a+ib$ 的实部 a 与虚部 b 分别看作直角坐标平面中的横坐标与纵坐标，则复数域 $\mathbf{C}$ 就与平面点集建立了一一对应关系，因此我们称 $a+ib$ 为复数的**直角坐标表示**. 为了体现复数的特点，我们将直角坐标系中的横轴改称为**实轴**，它与实数相对应，而把纵轴改称为**虚轴**，它与实部为零的复数相对应，其中虚部非零的复数称为**纯虚数**，这样建立起来的与复数相对应的平面称为**复数平面**，简称**复平面**，记作 **Z 平面**. 今后我们约定在不会引起混乱时，"复数 z"与"点 z"为同义语，"复数集"与"复平面点集"也为同义语.

复平面上两点 $z_1=a+ib$ 与 $z_2=c+id$ 间的距离记作 $d(z_1,z_2)$，定义为

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}. \tag{1.1.10}$$

特别将 $z=a+ib$ 到 $z=0$ 的距离记为

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}, \tag{1.1.11}$$

并称为复数 z 的**模**，于是两点的距离就是两个复数的差的模. 一复数与其共轭复数关于实轴对称，它们的模相等，即

$$|z|=|\overline{z}|, \tag{1.1.12}$$

并有以下关系：

$$z\cdot\overline{z}=(a+ib)\cdot(a-ib)=a^2+b^2=|z|^2. \tag{1.1.13}$$

利用(1.1.13)可将复数除法(1.1.4)表作

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{z_2\cdot\overline{z}_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{|z_2|^2}\ (z_2\neq 0).$$

利用(1.1.13)还可验证

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|; \tag{1.1.14}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2\neq 0). \tag{1.1.15}$$

设 α,β,γ 是复平面上的三点，则有

$$|\alpha-\gamma|\leqslant|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|, \tag{1.1.16}$$

这是复数形式的**三角不等式**，等号当且仅当 α,β,γ 三点顺次共线时成立.

三角不等式有更为简明的形式：将(1.1.16)改写为

$$|\alpha-\beta+\beta-\gamma|\leqslant|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|,$$

记 $\alpha-\beta=z_1,\beta-\gamma=z_2$，则有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1.1.17}$$

我们对任意复数 z_1,z_2 直接证明(1.1.17). 首先由(1.1.11)可得不等式