文都教育

2007

考研数学

全真模拟试卷及精析

主编：蔡子华

数学三

按照2007年新大纲内容要求

涵盖历年真题所有知识考点

考题模式完全依据真题模式

体现考研命制试题指导思想

精编试题与真题难度最逼近

随堂演习名师精解各个击破

中国国际广播音像出版社

2007

考研数学

全真模拟试卷及精析

主编 蔡子华

数学三

2007

考研数学

全真模拟试卷及精析

主编：蔡子华

数学三

按照2007年新大纲内容要求
涵盖历年真题所有知识考点
考题模式完全依据真题模式
体现考研命制试题指导思想
精编试题与真题难度最逼近
随堂演习名师精解各个击破

中国国际广播音像出版社

2007考研数学全真模拟试卷及精析(数学三)/蔡子华主编.—北京:中国国际广播音像出版社,2006.8
ISBN 7－89995－427－4
Ⅰ.2… Ⅱ.蔡… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题
Ⅳ.013—44

2007考研数学全真模拟试卷及精析(数学三)
编　　者:蔡子华
责任编辑:王兴旺　肖幸娟
出版发行:中国国际广播音像出版社
地　　址:北京市复兴门外大街2号
邮政编码:100866
文都网址:http://www.wendu.com
销售服务热线:010－88820136转833、830(传真)
经　　销:新华书店经销
印　　刷:北京龙兴印刷厂
开　　本:787×1092毫米 1/16
印　　张:9.875
版　　本:2006年8月第2版　　2006年8月第1次印刷
书　　号:ISBN 7－89995－427－4
定　　价:12.00元

编写说明

2007年的考研复习即将进入冲刺阶段。对于广大考生来说，最大的愿望是能找到一种既能尽快提高自己熟悉考试题型及掌握特定解法的能力，又有实战感受的方法。

《2007年考研数学全真模拟试卷及精析》即为此而编写。

本全真模拟试卷严格按照《2007年全国硕士研究生入学考试数学考试大纲》的考试要求编写，考点覆盖全面，题型和题量与2007年考研试题完全一致，难度与真题相当。试卷后附有分析及详细解答。

本全真模拟试卷的编者长期从事高校数学教学工作，参加过多种层次的考试命题，并连续多年参与研究生入学数学考试的辅导及阅卷工作；熟悉考试的重难点及考生的知识薄弱点，对命题规律等亦颇有研究。

相信本全真模拟试卷能在有效提高应试技巧和实战能力诸方面给考生以较大的帮助。顺祝广大考生取得理想的考研成绩。

编　者

2006年8月

考研数学试题(2001年——2003年)知识点分布表

数学三

所属单元 \ 考试内容 \ 年份	2001	2002	2003
函数、极限、连续性	①函数的连续性 ②重要极限	①重要极限 ②洛必达法则 ③在闭区间上连续函数的性质(介值定理,最值定理) ④函数连续性的定义	①间断点的分类 ②左连续的定义 ③等价无穷小替换;无穷小的性质 ④洛必达法则 ⑤介值定理
导数与微分		①可导与连续的关系	①导数的定义 ②导数的几何意义 ③求导法则
中值定理及导数的应用	①弹性 ②函数的极值的充分条件 ③拉格朗日中值定理,罗尔定理 ④求最大值	①函数的最值	①函数的极值 ②罗尔定理
不定积分		①换元、分部积分	
定积分及应用	①求积分上限的函数 ②平面图形的面积 ③积分中值定理	①积分上限的函数 ②旋转体的体积 ③定积分的性质	①分部积分法
无穷级数	①幂级数求和	①幂级数的逐项求导法 ②幂级数求和	①级数的性质 ②幂级数的和函数
多元函数微积分	①方程组所确定的函数的导数 ②二重积分的计算(奇偶性及在直角坐标下的计算)	①二次积分交换次序 ②多元复合函数与隐函数的偏导数、全微分	①二重积分的运算性质和几何意义 ②极值的必要条件 ③二元函数(抽象)的二阶偏导数(复合函数求导) ④二重积分的计算(极坐标)
微分与差分方程	①差分方程 ②一阶线性方程	①二阶常系数非齐次方程的特解	①一阶线性方程
线性代数	①行列式的计算、降秩与行列式的关系 ②矩阵的初等变换与初等矩阵的关系 ③线性方程组的解的讨论 ④非齐次方程组有唯一解的条件 ⑤用正交变换法将矩阵对角化 ⑥二次型的矩阵 ⑦二次型的规范形(矩阵的合同)	①矩阵乘法,线性相关性 ②齐次线性方程组有非零解的判定 ③特征值与特征向量 ④齐次方程组的全部解 ⑤矩阵的特征值 ⑥矩阵正定的判定	①逆矩阵的定义 ②矩阵的乘法 ③矩阵的秩与伴随矩阵的秩的关系 ④线性相关的定义 ⑤齐次线性方程组解的判定及基础解系 ⑥利用正交变换化二次型为标准形 ⑦特征值的性质(迹)
概率统计	①切比雪夫不等式 ②统计量的分布 ③相关系数 ④中心极限定理 ⑤二维随机变量函数的分布	①离散型随机变量的函数的协方差 ②参数的矩估计 ③统计量的分布;(χ^2 分布,F分布的定义) ④离散型随机变量的联合分布、函数的分布 ⑤数学期望、方差 ⑥连续型随机变量函数的分布,分布函数	①相关系数 ②事件的独立性 ③一维随机变量的函数的分布 ④二维随机变量的函数的分布

考研数学试题(2004 年——2006 年)知识点分布表

数学三

所属单元＼考试内容＼年份	2004	2005	2006
函数、极限、连续性	①用洛必达法则、函数连续性求极限 ②函数连续性的定义 ③函数的有界性的定义 ④等价无穷小替换求极限 ⑤零点定理 ⑥保号性	①重要极限 ②函数的有界性 ③罗必达法则	①重要极限 ②极限的求法 ③函数的连续性
导数与微分	①导数的定义、几何意义 ②[illegible]复合函数求导 ③微分的几何意义		
中值定理及导数的应用	①极值点、拐点 ②弹性、单调性的判定	①函数的极值 ②单调性证不等式 ③用导数研究函数的图象（方程的根的讨论）	①单调性的判别法 ②导数的几何应用(单调性、凹凸性) ③中值定理
不定积分			
定积分及应用	①换元积分法 ②分部积分法	①定积分的换元法 ②定积分的分部积分法	①平面图形的面积
无穷级数	①常数项级数的性质 ②幂级数的性质	①级数的性质 ②幂级数的和函数	①常数项级数的性质 ②幂级数的收敛域及和函数
多元函数微积分	①二元函数的高阶偏导数 ②二重积分的计算(极坐标下)	①全微分 ②二重积分的性质 ③复合函数的二阶偏导数 ④二重积分的计算	①复合函数求导 ②全微分 ③二元函数的条件极值 ④二重积分的计算
微分与差分方程	①一阶线性方程求解	①可分离变量的方程、特解	①线性方程解的性质和结构 ②一阶线性方程
线性代数	①二次型矩阵的秩 ②矩阵等价的性质 ③齐次线性方程组的基础解系 ④线性表出的概念与非齐次线性方程组解的判定及求解 ⑤矩阵的特征值和特征向量,将矩阵对角化	①向量组的线性相关性 ②矩阵的乘法 ③方阵的行列式 ④矩阵的特征值特征向量 ⑤向量组的线性相关性 ⑥齐次线性方程组、同解问题 ⑦矩阵的合同 ⑧矩阵的正定性 ⑨矩阵的乘法	①矩阵的运算 ②方阵的行列式、幂 ③向量组的线性相关性的定义 ④矩阵的初等变换和初等矩阵 ⑤向量组的线性相关性、极大线性无关组 ⑥特征值、特征向量的定义 ⑦向量组的正交规范化 ⑧矩阵对角化
概率统计	①指数分布的数字特征及概率的求法 ②数学期望的性质,估计量的无偏性 ③标准正态分布的上 α 分位点及概率的求法 ④求二维(离散型)随机变量的概率分布、相关系数及函数的分布 ⑤矩估计、最大似然估计	①条件概率,全概率公式 ②随机变量的独立性 ③置信区间 ④二维随机变量的边缘密度 ⑤二维随机变量函数的分布 ⑥条件概率 ⑦方差的计算 ⑧协方差的计算 ⑨无偏估计量	①独立性 ②均匀分布求概率 ③正态分布标准化及概率 ④随机变量函数的分布 ⑤二维随机变量的概率求法 ⑥随机变量及函数的数字特征 ⑦估计量的评价标准 ⑧矩估计法、最大似然估计

目　录

2007年全国硕士研究生入学考试

数学(三)　全真模拟试卷(一)

试卷密号：

试卷密号：

此密号考生不得填写

考试科目 数　学　(三)

题号		得分	评卷人
一			
二			
三	(17)		
	(18)		
	(19)		
	(20)		
	(21)		
	(22)		
	(23)		
	(24)		
总分			

注意：此半页考生不得填写

准考证编号＿＿＿＿＿＿

考试科目＿＿＿＿＿＿

报考学科、专业＿＿＿＿＿＿

报考研究方向＿＿＿＿＿＿

报考单位＿＿＿＿＿＿

注意事项

1. 以上各项除试卷密号之外必须填写清楚。
2. 答案必须写准确、清晰、必须写在试卷上。
3. 字迹要清楚、卷面要整洁。
4. 草稿纸另发，考试结束，统一收回。

数学三　全真模拟试卷(一)

得分	评卷人

一、选择题：1－10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内．

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^2}=2$，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的某邻域存在二阶连续导数，则(　　)．

(A) $\exists\,\delta>0$，使 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，$f'(x)$ 单调增加

(B) $\exists\,\delta>0$，使 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，$f'(x)$ 单调减少

(C) $f'(x)$ 在 x_0 点取得极大值

(D) $f'(x)$ 在 x_0 点取得极小值

(2) 当产量为 x 时，产品的总成本为 $C(x)=C_0+C_1(x)$，其中 C_0 是固定成本，$C_1(x)$ 是可变成本．则产品的边际成本(　　)．

(A) 与 C_0 和 $C_1(x)$ 都有关　　(B) 与 C_0 有关，而与 $C_1(x)$ 无关

(C) 与 C_0 无关与 $C_1(x)$ 有关　　(D) 与 C_0 和 $C_1(x)$ 都无关

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $f(0)>0$，$f'(x)\leqslant a<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内 $f(x)$(　　)．

(A) 没有零点　　(B) 至少有一个零点

(C) 只有一个零点　　(D) 有无零点与 a 有关

(4) 下列说法中正确的是(　　)．

(A) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则当 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$ 时必有 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=\infty$

(B) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则当 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=\infty$ 时必有 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$

(C) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$ 时必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\infty$

(D) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\infty$ 时必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$

(5) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$(　　)．

(A) 不连续　　(B) 连续，但偏导数不存在

(C) 连续且偏导数存在，但不可微　　(D) 可微

(6) 已知由方程 $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{x}{y}}$ 确定了函数 $y=y(x)$，则曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程为(　　)．

(A) $x-y+1=$　　(B) $x+y+1=0$

(C) $x-y-1=0$　　(D) $x+y-1=0$

(7) $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的充要条件不是(　　)．

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组中必有一向量可以由其余向量线性表出

(B) $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵

(C) 齐次线性方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

(D) 对任意 $n>1,\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}$

(8) $\boldsymbol{A}$ 为四阶方阵，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，则秩 $(\boldsymbol{A}^*)^*=($　　$)$.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(9) 已知随机变量 X、Y，且 $P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7}$，$P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}$，则 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=($　　$)$.

(A) $\frac{16}{49}$　　(B) $\frac{6}{7}$　　(C) $\frac{5}{7}$　　(D) $\frac{2}{7}$

(10) 若随机变量 X 服从几何分布，且其数学期望为 3，则方差 $D(X)=($　　$)$.

(A) 6　　(B) 3　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{6}$

得分	评卷人

二、填空题：11－16 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上

(11) 设 $f(x)$ 连续且满足 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\frac{\sin x}{x}$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=$__________.

(12) 设 $f(x)=x\sin^2 x$，则 $f^{(19)}(0)=$__________.

(13) 微分方程 $y'=\frac{1}{x+\mathrm{e}^y}$ 的通解为__________.

(14) 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数，$f(x)=$__________.

(15) 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$，则 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=$__________.

(16) 设事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$__________.

三、解答题：17－27 小题，共 86 分. 解答应写文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(17)(本题满分 10 分)

试确定 a、b 的值，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\sin x-\cos^2 x}-(a+b\sin x)}{\tan^2 x}\text{ 存在}$$

并求此极限.

得分	评卷人

(18)（本题满分 11 分）

计算$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{x}\frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

得分	评卷人

(19)（本题满分 11 分）

某商品交易市场上的税收收入与交易的成交额之间的关系经统计资料分析为：税收的收入随成交额增加的增长率等于税收收入的立方与成交额立方的 2 倍的差、再除以成交额与税收收入平方之积的 3 倍. 若成交额为 $x=1$（万元）时，税收收入 $y=2$（百元），试求该商品市场的税收收入与成交额之间的函数关系.

得分	评卷人

(20)(本题满分 10 分)

设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $f(x+y, y+z) = 0$ 所确定,求 $\mathrm{d}z$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

得分	评卷人

(21)(本题满分 11 分)

讨论方程组 $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2 \\ \lambda x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2\lambda - 4 \end{cases}$ 何时有解;当其有解时,求其通解.

得分	评卷人

(22)(本题满分11分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&2\\1&0&0\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵，求(Ⅰ) a 及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵；(Ⅱ) $\boldsymbol{A}^{100}$；(Ⅲ) $\boldsymbol{P}^{-1}$

得分	评卷人

(23)(本题满分12分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+axy & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(Ⅰ) 求常数 a；

(Ⅱ) X、Y 是否相互独立？

(Ⅲ) 求 $P\{X+Y>1\}$

得分	评卷人

(24)(本题满分 10 分)

设总体 X 方差 σ^2 有限且不为 0，$X_1, X_2, \cdots, X_{m+n}(n > m)$ 为取自 X 的样本容量为 $m+n$ 的样本.(Ⅰ)求 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 与 $Z = \sum_{k=1}^{n} X_{m+k}$ 的相关系数;(Ⅱ)若 $E(X) = \mu$，求 $E(Z^2)$.

测试总结						
	得分情况			总分		
	选择题	填空题	解答题	各部分分值	各部分所得分	
微积分				82		
线性代数				34		
概率论与数理统计				34		
测试分析						

2007年全国硕士研究生入学考试

数学(三)　全真模拟试卷(二)

试卷密号：

考试科目　数　学　(三)

题　号		得　分	评卷人
一			
二			
三	(17)		
	(18)		
	(19)		
	(20)		
	(21)		
	(22)		
	(23)		
	(24)		
总分			

注意：此半页考生不得填写

试卷密号：

此密号考生不得填写

准考证编号＿＿＿＿＿＿

考试科目＿＿＿＿＿＿

报考学科、专业＿＿＿＿＿＿

报考研究方向＿＿＿＿＿＿

报考单位＿＿＿＿＿＿

注　意　事　项

1. 以上各项除试卷密号之外必须填写清楚。
2. 答案必须写准确、清晰、必须写在试卷上。
3. 字迹要清楚、卷面要整洁。
4. 草稿纸另发，考试结束，统一收回。

数学三　全真模拟试卷(二)

得分	评卷人

一、选择题：1—10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$(　　).

(A) 发散　(B) 条件收敛　(C) 绝对收敛　(D) 敛散性不确定

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f(a)<0$，$f'(x)<f(x)$，则(　　)

(A) $\frac{f(b)}{f(a)}>e^{b-a}$　(B) $\frac{f(b)}{f(a)}<e^{b-a}$　(C) $\frac{f(b)}{f(a)}\geqslant e^{b-a}$　(D) $\frac{f(b)}{f(a)}\leqslant e^{b-a}$

(3) 某商品的需求量 Q 对价格 P 的弹性为 $P\ln 2$，已知该商品的最大需求量为1000，则需求量 Q 关于价格 P 的函数关系是(　　).

(A) $Q=1000e^{-P}$　(B) $Q=1000\times 2^{-P}$

(C) $Q=1000e^{-2P}$　(D) $Q=1000\times 2^{-2P}$

(4) 下列说法中正确的是(　　)

(A) 若 $f'(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内单调减少

(B) 若 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大值，则当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f(x)$ 单调增加，$x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f(x)$ 单调减少

(C) 若 $f(x)$ 在 x_0 点取得极值，则 $f(x)$ 在 x_0 点必连续

(D) 若 $f(x)$ 是偶函数且 $f''(0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处必取得极值

(5) $f(x)$ 在 x_0 点连续是 $|f(x)|$ 在 x_0 点连续的(　　).

(A) 充分条件　(B) 必要条件　(C) 充要条件　(D) 以上都不是

(6) 若 $\lim_{x\to 6}\frac{f(x)}{x-6}=-2006$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim_{x\to 6}\frac{\int_0^x\left[t\int_t^6 f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{(x-6)^3}=$(　　)

(A) 2005　(B) -2006　(C) 2006　(D) 2007

(7) 已知二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 通过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 化为 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$，则①$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，②$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，③$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，④$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$ 关系中成立的有(　　).

(A) ①③④　(B) ①②③

(C) ②③④　(D) ①②④

(8) 设随机变量 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim B(2,\frac{1}{2})$，X_3 服从于参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}E(X_1) & D(X_1) & E(X_1^2)\\ E(X_2) & D(X_2) & E(X_2^2)\\ E(X_3) & D(X_3) & E(X_3^2)\end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定是(　　).

(A) 可逆矩阵　(B) 不可逆矩阵

(C) 对称矩阵　(D) 反对称矩阵