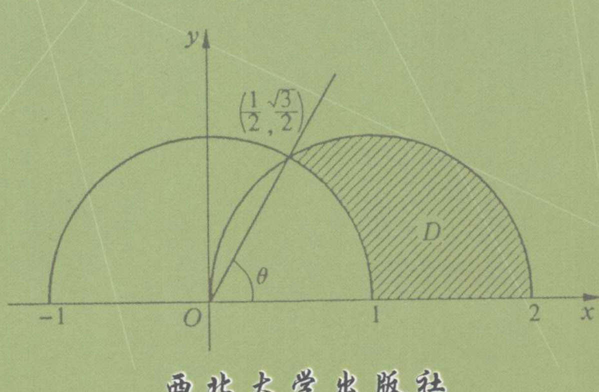
21世纪高职高专规划教材

# 高等数学

（上册）

GAO DENG SHU XUE

张曙光 田德宇 主编




西北大学出版社

21世纪高职高专规划教材

# 高等数学

(上　册)

张曙光　田德宇　主　编

西北大学出版社

## 内容提要

本书分为上、下两册,上册包含函数与极限、函数的连续性与函数的可导性、函数的可微性与微分、函数的可积性与定积分、函数与定积分的应用;下册包含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分、无穷级数、微分方程等内容.带“*”的章、节可以根据需要进行取舍.习题大多以基本概念与基本方法为主,是学生必须掌握的;部分习题有一定难度,综合性较强,能较好地适应学生进一步深造的需要.书末附有习题答案或提示,便于教师和学生参考.

本书可作为高等院校相关专业的高等数学教材,亦可作为自学和数学爱好者的参考教材.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学/张曙光,田德宇主编.—西安:西北大学出版社,2007.8

ISBN 978-7-5604-2340-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②田… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 119374 号

**高等数学**

---

**出版发行**:西北大学出版社
**地　　址**:西安市太白北路 229 号
**经　　销**:全国新华书店
**印　　刷**:黄委会勘测规划设计研究院印刷厂
**开　　本**:890×1240 毫米　1/32
**字　　数**:590 千字
**印　　张**:20.625
**版　　次**:2007 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
**定　　价**:(上下册)45.00 元 (本册)22.80 元

# 前　言

高等数学(上、下册)是根据全日制大学专科教学大纲以及教育部颁发的“专升本”入学考试的基本要求编写的.

本书尽可能做到概念清楚,重点突出,条理清晰,文字准确,通俗易懂,并与初等数学紧密衔接,便于教师讲解和学生学习;同时,注重运算能力的培养,通过对大量例题的讲解,帮助学生加深对基本内容的理解,提高其解决问题的能力;在内容的安排上,对枝节问题避免冗长的叙述,贯彻“少而精”和“够用”的原则. 书末附有习题答案或提示,以便于教师和学生参考.

上册包含函数与极限、函数的连续性与函数的可导性、函数的可微性与微分、函数的可积性与定积分、函数与定积分的应用;下册包含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分、无穷级数、微分方程等内容.

需要指出的是,带“ * ”的章、节可以根据开课专业的需要进行取舍.习题大多以基本概念与基本方法为主,是学生必须掌握的;部分习题则有一定难度,综合性较强,希望能较好地适应学生进一步深造的需要.

本书由焦作师范高等专科学校张曙光、漯河职业技术学院田德宇任主编;由焦作建筑经济学校焦留旺、焦作师范高等专科学校杨秀芹、李中方、刘瑞华、任勤任副主编;由焦作师范高等专科学校朱青堂、李长武、焦作建筑经济学校梁栋、漯河职业技术学院张和平任编委.全书由张曙光、田德宇负责统稿工作.

由于编者的水平有限,书中难免有疏漏和不当之处,敬请广大读者指正.

编　者

2007 年 3 月

# 目　录

2.变量变化范围的表示方法

任何一变量,总有一定的变化范围.例如,一天的时间 $t$ 所取的值,总是介于0到24(小时)之间,即变量 $t$ 的变化范围是0 ~ 24.如果变量的变化是连续的,变量的变化范围常常用区间来表示.下面我们列表给出区间的名称、定义和符号.

| 名　称 | 定　义 | 符　号 |
|---|---|---|
| 闭区间 | $a \leqslant x \leqslant b$ | $[a,b]$ |
| 开区间 | $a < x < b$ | $(a,b)$ |
| 左半开区间 | $a < x \leqslant b$ | $(a,b]$ |
| 右半开区间 | $a \leqslant x < b$ | $[a,b)$ |
| 无限区间 | $a < x$ | $(a,+\infty)$ |
| 无限区间 | $a \leqslant x$ | $[a,+\infty)$ |
| 无限区间 | $x < b$ | $(-\infty,b)$ |
| 无限区间 | $x \leqslant b$ | $(-\infty,b]$ |
| 无限区间 | $-\infty < x < +\infty$ | $(-\infty,+\infty)$ |

**注意**　$+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读做"正无穷大"和"负无穷大",它们不是数,仅仅是个记号.在数轴上,表示区间的端点时,实圆点"·"表示区间包括端点;空心圆点"◦"表示区间不包括端点.

**例1**　满足不等式 $-\pi \leqslant x < \pi$ 的全体实数 $x$,是右半开区间,记做 $[-\pi,\pi)$.在数轴上可用图1-1表示出来.

**例2**　满足不等式 $-\infty < x \leqslant 2$ 的全体实数 $x$,是无限区间,记做 $(-\infty,2]$.在数轴上可用图1-2表示.

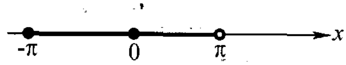



图1-1

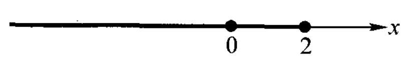



图1-2

## 1.1.2　绝对值与邻域

1.绝对值

**定义**　任意实数 $a$ 的绝对值用符号"$|a|$"表示,定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

由定义可知,任何一个实数 $a$ 的绝对值是非负的.显然有

$$|a| = \sqrt{a^2}, |-a| = |a|.$$

$a$ 的绝对值 $|a|$,在几何上表示数轴上的点 $a$ 到原点的距离.

由绝对值的定义,还可以得到下列一些论断:

(1) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

事实上,如果 $a \geqslant 0$,有 $-|a| \leqslant a = |a|$;如果 $a < 0$,有 $-|a| = a < |a|$.因此,对任何实数 $a$,式(1)总是成立的.

(2) $|x| < r \quad (r > 0)$,与 $-r < x < r$ 是等价的.即,若 $|x| < r$,则有 $-r < x < r$;反之,若 $-r < x < r$,则有 $|x| < r$.

事实上,从几何上看这是非常显然的,因为 $|x| < r$,表示点 $x$ 与原点的距离小于 $r$,所以点 $x$ 必落在区间 $(-r, r)$ 内,即 $-r < x < r$;反之,若 $-r < x < r$ 成立,则点 $x$ 落在区间 $(-r, r)$ 内,所以点 $x$ 与原点的距离小于 $r$,因而有 $|x| < r$.

同理还可以得到,绝对值不等式 $|x - a| < r$ 与 $a - r < x < a + r$ 是等价的.

(3) $|x| > N \quad (N > 0)$,与 $x > N$,或 $x < -N$ 是等价的(证明从略).

**绝对值的性质**

(1) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

(2) $|a - b| \geqslant |a| - |b|$.

(3) $|ab| = |a||b|$.

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$.

**证(1)** 由公式(1)得

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

把两式相加,得

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|,$$

它与不等式

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

等价,性质(1)得证.

证(2) 因为 $|a| = |(a-b)+b|$,利用性质(1)得,

$$|(a-b)+b| \leqslant |a-b| + |b|,$$

于是 $$|a| \leqslant |a-b| + |b|,$$

即 $$|a-b| \geqslant |a| - |b|.$$

性质(2)得证.

关于绝对值乘法和除法的性质(3)、(4)利用绝对值的定义,即可得证.

2. 邻域

**定义** **设 $a$ 与 $\delta$ 是两个实数,而 $\delta > 0$,满足不等式**

$$|x-a| < \delta$$

**的实数 $x$ 的全体称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域.点 $a$ 称为邻域的中心,$\delta$ 称为邻域的半径.不等式又可写成**

$$-\delta < x-a < \delta \text{ 或 } a-\delta < x < a+\delta.$$

因此,点 $a$ 的 $\delta$ 邻域就是以点 $a$ 为中心,而长度为 $2\delta$ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$,如图 1-3.

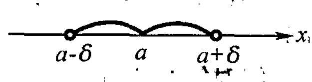



图 1-3

**例 3** 点 2 的 $\delta = \frac{5}{2}$ 的邻域,可表示为

$$|x-2| < \frac{5}{2},$$

即 $$2-\frac{5}{2} < x < 2+\frac{5}{2},$$

即 $$-\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2},$$

该邻域是开区间 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

### 1.1.3 函数概念

在某一自然现象或实验过程中,往往同时遇到两个或多个变量,这

些变量不是孤立地变化，而是互相联系、互相依赖，遵循着一定的规律变化. 下面仅就两个变量的情形举例说明:

**例 4** 圆的面积 $S$ 与它的半径 $r$ 间的关系，由公式 $S = \pi r^2$ 确定. 当半径 $r$ 取某一正的数值时，圆面积 $S$ 相应地有一个确定的数值.

**例 5** 在初速度为零的自由落体运动中，路程 $s$ 和时间 $t$ 是两个变量，当时间 $t$ 变化时，所经历的路程也相应地变化，它们之间有下列关系:

$$s = \frac{1}{2}gt^2, 0 \leqslant t \leqslant T, g \text{ 是重力加速度(常量)}.$$

**例 6** 两个质点做相对运动，彼此间的距离 $r$ 与相互作用的引力 $f$ 是两个变量. 根据万有引力定律，它们之间的关系式是

$$f = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (G \text{ 是引力常数}, m_1, m_2 \text{ 是两质点的质量}).$$

上述三例都表达了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系给出了一种对应规律. 根据这种对应规律，当其中一个变量在某一个范围内取一个数值时，另一个变量就有一个确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数关系.

**定义** **设有两个变量 $x$ 和 $y$，如果当变量 $x$ 在实数的某一范围 $I$ 内，任意取定一个数值时，变量 $y$ 按照一定的规律，总有一个确定数值和它对应，则变量 $y$ 称为变量 $x$ 的函数，记做**

$$y = f(x), x \in I.$$

**其中变量 $x$ 称为自变量，变量 $y$ 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 $I$，称为函数的定义域.**

在函数的定义中要着重理解以下几点:

(1) 函数的两个要素: 函数的定义表明函数是由定义域和对应规律所确定的. 对两个变量只要给出定义域和对应规律就构成了一个函数关系. 因此，又把函数的定义域和对应规律称为函数的两个要素.

(2) 函数的定义域: 如果自变量取某一数值 $x_0$ 时，函数有一个确定的值和它对应，那么就称函数在 $x_0$ 处有定义. 因此函数的定义域就是使函数有定义的实数的全体. 如何确定函数的定义域呢? 通常是按下面

两种情况考虑:① 对于实际问题,是根据问题的实际意义具体确定.如例 4 函数的定义域为$(0, +\infty)$,因为半径不能取负值.例 5 函数的定义域为$[0, T]$,其中 $T$ 为自由落体落地的时间.② 函数由公式给出时,不考虑函数的实际意义,这时函数的定义域就是使表达式有意义的自变量的一切实数值.

**例 7**　求函数 $y = \dfrac{1}{x+1}$ 的定义域.

**解**　显然只有在分母 $x + 1 \neq 0$,即 $x \neq -1$ 时,表达式才有意义.因此,函数的定义域为 $x \neq -1$ 的全体实数,即$(-\infty, -1)$,或$(-1, +\infty)$.

**例 8**　求函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域.

**解**　因为根式$\sqrt{1-x^2}$ 中的 $1-x^2$ 不能为负,又因为这个根式是分母,不能为零.因此,必须有 $1-x^2 > 0$,即 $x^2 < 1$,故函数的定义域为

$$-1 < x < 1, \text{或写成}(-1,1).$$

**例 9**　求 $y = \ln(x-1)$ 的定义域.

**解**　因为对数的真数必须大于零,故 $x-1 > 0$,即 $x > 1$.所以,函数的定义域为 $x > 1$,或写成$(1, +\infty)$.

**例 10**　求函数 $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$　$(b > a > 0)$ 的定义域.

**解**　因为根式内的$(x-a)(b-x)$不能为负,即 $x$ 满足不等式

$$(x-a)(b-x) \geqslant 0.$$

它可分为两种情况.$x$ 适合不等式组:

$$\begin{cases} x - a \geqslant 0, \\ b - x \geqslant 0; \end{cases} \tag{1}$$

或者适合不等式组:

$$\begin{cases} x - a \leqslant 0, \\ b - x \leqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

由(1) 可以解出:$a \leqslant x \leqslant b$,而(2) 无解.因此函数的定义域为 $a \leqslant x \leqslant b$,或写成$[a, b]$.

**例 11** 求函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

**解** 此题是求两个函数之和的定义域,先分别求出每个函数的定义域.$\sqrt{x^2 - x - 6}$ 的定义域必须满足 $x^2 - x - 6 \geqslant 0$,即

$$(x-3)(x+2) \geqslant 0,$$

解得 $x \geqslant 3$,或 $x \leqslant -2$.

而 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域是 $\left|\frac{2x-1}{7}\right| \leqslant 1$,即

$$-7 \leqslant 2x - 1 \leqslant 7,$$

解得 $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

这两个函数定义域的公共部分是:$-3 \leqslant x \leqslant -2$,或 $3 \leqslant x \leqslant 4$,于是,所求函数的定义域是:

$$-3 \leqslant x \leqslant -2 \text{ 或 } 3 \leqslant x \leqslant 4.$$

(3) 函数记号:函数记号 $y = f(x)$ 表示 $y$ 是 $x$ 的函数.如果函数关系由某个式子具体给出时,记号"$f(\quad)$"表示 $x$ 与 $y$ 之间的确定的对应规律.如例 5 中 $s$ 是 $t$ 的函数写成 $s = f(t)$,则 $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$.再如,$y = f(x) = x^2 - 2x + 3$,对于这个具体函数,记号 $f(\quad) = (\quad)^2 - 2(\quad) + 3$,表示把 $x$ 代入括号内进行运算而得到 $y$.

$y$ 是 $x$ 的函数,可以记做 $y = f(x)$,也可以记做 $y = G(x)$ 或 $y = F(x)$ 等.但同一函数在讨论中应取定同一种记法.同一问题中涉及多个函数时,则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律.为方便起见,有时也用记号 $y = y(x)$,$u = u(x)$,$s = s(x)$ 等表示函数.

(4) 函数值:对于函数 $y = f(x)$,当自变量 $x$ 在定义域内取得值 $x_0$,函数 $f(x)$ 的对应值 $y_0$ 叫做当 $x = x_0$ 时的函数值,记做

$$y_0 = f(x_0),\text{或 } y|_{x=x_0} = y_0.$$

**注意** $f(x_0)$ 与 $f(x)$ 的区别,前者是一个固定值,后者一般是变量.在函数的定义中规定对于自变量 $x$ 的确定值,函数 $y$ 只有一个值与其对应(单值函数).但有时会遇到变量 $y$ 有一个以上的值与之对应的情形,此时我们称 $y$ 是 $x$ 的多值函数.对于变量 $y$ 多值的情形,我们限制

$y$ 的取值范围使之成为单值，再进行研究，例如反三角函数 $y=\text{arcsin}x$，它是多值的，当 $y$ 限制在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，就是单值的(这时反正弦函数记为 $y=\arcsin x$). 当我们研究了 $y=\arcsin x$ 之后，对 $y=\text{arcsin}x$ 也就不难了解了.

**例 12** 求函数 $f(x)=x^2-2x+3$，在 $x=3$，$x=x_0+\Delta x$ 处的函数值.

**解** $x=3$ 时，$f(3)=(3)^2-2(3)+3=6$.

$x=x_0+\Delta x$ 时，

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x)&=(x_0+\Delta x)^2-2(x_0+\Delta x)+3\\&=x_0{}^2+2x_0(\Delta x-1)+\Delta x(\Delta x-2)+3.\end{aligned}$$

**例 13** 设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，求 $f(\frac{2}{\pi})$.

**解** $f(\frac{2}{\pi})=\frac{1}{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{1}{\frac{2}{\pi}}=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

**例 14** 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$.

**解** 令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，代入上式得

$$\begin{aligned}f(t)&=(t-1)^2+3(t-1)+5\\&=t^2+t+3\end{aligned}$$

即 $$f(x)=x^2+x+3.$$

**例 15** 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，证明 $\frac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$.

**证** $\frac{f(x)}{f(y)}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}=\mathrm{e}^{x-y}=f(x-y)$.

当 $x\in\mathrm{N}_+$ 时，$y=f(x)$ 即是数列. 所以数列是特殊的函数，叫做整标函数. 常记为 $a_n=f(a)$.

### 1.1.4 函数的表示法

函数通常有三种表示法：表格法、图示法和解析式法(或代数式法).

1. **表格法**

表格法就是把自变量 $x$ 与因变量 $y$ 的一些对应值用表格列出.例如常用的平方表、对数表、三角函数表等都是用表格法表示函数的.表格法表示函数的优点是使用方便.

2. **图示法**

把自变量 $x$ 与因变量 $y$ 当做平面直角坐标系中点的横坐标与纵坐标, $y$ 是 $x$ 的函数可用直角坐标系中的平面曲线表示.

例如, $y = f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数.在平面上取定直角坐标系后,对于区间 $[a,b]$ 上的每一个 $x$,由 $y = f(x)$ 都可确定平面上一点 $M(x,y)$,当 $x$ 取遍 $[a,b]$ 中所有值时,点 $M(x,y)$ 描出一条平面曲线,称为函数 $y = f(x)$ 的图形,如图 1－4 所示.

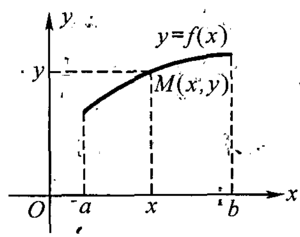



图 1－4

图示法表示函数的优点是直观性强,函数的变化一目了然,并且便于研究函数的几何性质,缺点是不便于做理论上的推导运算.

3. **解析式法(或代数式法)**

把两个变量之间的函数关系直接用代数式表出,对代数式进行运算就可由自变量的值得到对应的函数值.在高等数学中所涉及的函数大多数是用代数式法给出的.例如:

$$s = \frac{1}{2}gt^2, S = \pi r^2, y = 3x^2 - 2x + 1,$$

等等,都是用代数式法表示的函数.

用代数式法表示函数的优点是便于对函数进行理论上的研究,简明准确,便于计算.缺点是不够直观.为了克服这个缺点,有时将函数同时用代数式法与图示法表示,这样对函数既便于理论上的研究,又具有直观性强、一目了然的优点.

## 习 题 1－1

1. 将下列不等式用区间记号表示.

(1) $0 < x \leqslant 6$;　　(2) $|x-2| \geqslant 1$;

(3) $|x-3| < 4$;　　(4) $(x-1)(x+2) < 0$.

2. 下列函数是否表示同一函数?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$,　　$g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$,　　$g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$,　　$g(x)=\sin x$;

(4) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$,　　$g(x)=1$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-4}$;　　(2) $y=\ln x+\arcsin x$;

(3) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;　　(4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

4. 求函数值.

(1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$,求 $f(0),f(1),f(-\dfrac{1}{2}),f(a)$;

(2) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $f(-x),f(x+1),f(\dfrac{1}{x})$;

(3) $f(x)=ax+b$,求 $g(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

5. 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$,求 $f(x),f(x-1)$.

6. 设 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$,验证 $f(t)=f(\dfrac{1}{t})$.

# 1.2 函数的分类

## 1.2.1 基本初等函数

在实际问题中遇到大量的反映变量之间的函数关系,其中最基本、

最常见的函数关系,就是所谓的基本初等函数,即常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.这些函数是今后研究各种函数的基础.这些函数在中学课程中已经学过,这里简要地概括一下:

①$y = C$ ($C$ 为常数)

②$y = x^{\alpha}$ ($\alpha$ 为常数)

③$y = a^{x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

④$y = e^{x}$

⑤$y = \log_a x$

⑥$y = \ln x$

⑦$y = \sin x$

⑧$y = \cos x$

⑨$y = \tan x$

⑩$y = \cot x$

⑪$y = \sec x$

⑫$y = \csc x$

⑬$y = \arcsin x$

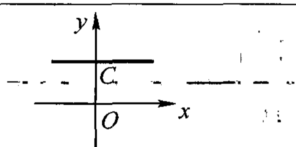
⑭$y = \arccos x$

⑮$y = \arctan x$

⑯$y = \operatorname{arccot} x$

这些函数的性质和图形如下:

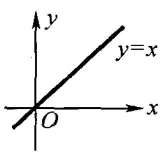
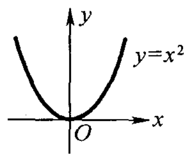
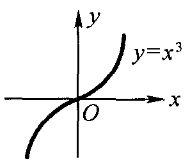
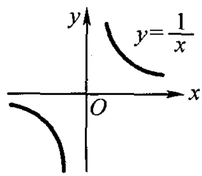
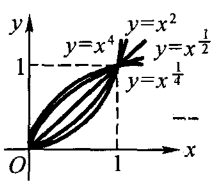
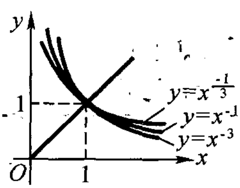
1.常数函数 $y = C$($C$ 为常数)

| 图 形 | 主要性质 |
|---|---|
|  | 定义域:$R$<br>值域:$\{C\}$ |

2.幂函数 $y = x^{\mu}$($\mu$ 是常数)

幂函数 $y = x^{\mu}$ 的定义域,与 $\mu$ 的取值有关.例如,当 $\mu = 3$时,$y = x^3$ 的定义域$(-\infty, +\infty)$;当 $\mu = \dfrac{1}{2}$ 时,$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 的定义域$[0,$

$+\infty$);当 $\mu=-1$ 时,$y=\frac{1}{x}$ 的定义域($-\infty,0$),或($0,+\infty$);当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时,$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域($0,+\infty$),不论 $\mu$ 取什么值,幂函数 $y=x^{\mu}$ 在($0,+\infty$)内总是有定义的.它的图形及其主要性质如下表.

| 图　形 | 主要性质 |
| --- | --- |
|  ($\mu=1$)  ($\mu=2$) | 1. $\mu>0$ 时,图形过(0,0)及(1,1)点.在($0,+\infty$)内是单调增函数. |
|  ($\mu=3$)  ($\mu=-2$) | 2. $\mu<0$ 时,图形过(1,1)点.在($0,+\infty$)内是单调减函数. |
|  ($\mu>0$)  ($\mu<0$) | |

3. **指数函数** $y=a^x$ ($a>0, a\neq1$)

工程中,常用以 e 为底的指数函数 $y=e^x$,其中 e 是无理数,$e=2.718281828459\cdots$. $y=a^x$ 的图形及主要性质见下表.