培优提高班

PEIYOU TIGAO BAN

王亚权 主编

八年级下

SHUXUE

数学

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

培优提高班·数学

八年级下

本册主编　王亚权
编写人员　苏志清　章　燕　王亚权
　　　　　郑　洁　周　鸿

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

培优提高班．数学．八年级．下／王亚权主编．—杭州：浙江大学出版社，2007．12
ISBN 978-7-308-05556-7

Ⅰ．培… Ⅱ．王… Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 145197 号

出版发行：浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail：zupress@zju.edu.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
责任编辑：王大根
排 版 者：杭州好友排版工作室
印　　刷：杭州杭新印务有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：10.75
字　　数：250 千
版　　次：2007 年 12 月第 1 版　2008 年 2 月第 2 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-308-05556-7
定　　价：14.00 元

编写说明

中学教材的内容和要求是以大多数学生的学习能力为基础的，没有充分考虑学生的个性化要求，仅仅考虑普适性。这对于那些学有余力的学生来说是一个缺憾。经过反复征求广大中学师生的意见和充分进行市场调研，我们觉得很有必要策划一套既适合大多数学生使用，又能满足那些“吃不饱”的学生要求的教辅图书。基于此，我们组织中学一线的资深教师和教育专家反复论证，策划了“初中各学科培优提高班”丛书。丛书包括语文、数学、英语和科学四种，其中七、八年级分上下两册，九年级为全一册(科学九年级仍分上下册)。

丛书的栏目设计和编写的特色是：

从书各分册与相应的学科教材同步配套，以课时为单元编写。每个课时包括学习要求，典型问题剖析与点评，以及三级课外训练。例题典型，能触类旁通；点评富有启发性，能举一反三；三级练习层次分明，依次递进，引导学生循序渐进。

丛书注重学生个性发展，设计了相当数量的提高训练，为那些学有余力的学生提供了优秀的学习素材。

丛书选材精练，所有素材都选自各地中考试题，具有相当的典型性、科学性、指导性、预测性和训练价值。

丛书实用性强，训练部分留有空白，既可以作为学生学习的指导用书，又可以作为作业本使用，同时还可以作为教师教学的参考用书。

目录

第 1 章　二次根式

1.1　二次根式的性质

课堂笔记

重点讲解　本节的主要内容是二次根式的概念和性质.

(1)二次根式的概念：表示算术平方根，且根号内含有字母的代数式叫做二次根式. 如$\sqrt{a}$($a\geqslant 0$). 通常一个数的算术平方根也叫做二次根式，如$\sqrt{2}$、$\frac{\sqrt{7}}{3}$等.

(2)二次根式的性质主要有四个：

①$(\sqrt{a})^2=a$ ($a\geqslant 0$)；

②$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\ -a\ (a<0);\end{cases}$

③$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ ($a\geqslant 0,b\geqslant 0$)；

④$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a\geqslant 0,b>0$).

运用二次根式的性质可以将一个根式化简.

难点点拨　注意$\sqrt{a}\geqslant 0$($a\geqslant 0$)的非负性，即$\sqrt{a}$是表示a($a\geqslant 0$)的算术平方根，它是一个非负数. 在运用二次根式性质②时，应考虑a的符号，避免与性质①混淆.

例题解析

例 1　已知$-1<a<0$，化简$\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}$得________.

【分析】　将被开方数展开、化简，再利用二次根式性质，去掉根号，得到化简结果.

【解】　原式$=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right|+\left|a+\frac{1}{a}\right|$，

因为$-1<a<0$，所以$a-\frac{1}{a}>0$，$a+\frac{1}{a}<0$.

所以原式$=a-\frac{1}{a}-a-\frac{1}{a}=-\frac{2}{a}$.

【评注】　注意到公式：$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$及a与$\frac{1}{a}$的倒数关系，本题也可以直接得到$(a+\frac{1}{a})^2-4=(a-\frac{1}{a})^2$，$(a-\frac{1}{a})^2+4=(a+\frac{1}{a})^2$，使化简简便.

类题演练　化简：$\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

例 2　已知$y=\sqrt{\frac{x^2-2}{5x-4}}-\sqrt{\frac{x^2-2}{4-5x}}+2$，则$x^2+y^2$________.

【分析】 首先考虑要使根式有意义时 x 的取值，再算 y 的取值，然后代人计算结果.

【解】 由题意得

$\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{5x-4}\geqslant 0,\\ \dfrac{x^2-2}{4-5x}\geqslant 0.\end{cases}$ 解得 $\dfrac{x^2-2}{5x-4}=0$，所以 $x^2-2=0,x^2=2$，

把 $x^2=2$ 代人已知等式得，$y=2$.

所以 $x^2+y^2=2+4=6$.

【评注】 有的题目看上去条件不是很明显，但你要注意分析，有时可能有隐含条件，这是解题的突破口. 本题还可以从这个角度去思考：易发现 $\dfrac{x^2-2}{5x-4}$ 与 $\dfrac{x^2-2}{4-5x}$ 是互为相反数，此时，必有 $\dfrac{x^2-2}{5x-4}=0$.

类题演练 要使代数式 $\dfrac{\sqrt{3-|x+1|}}{\sqrt{|x-1|-2}}$ 有意义，实数 x 的取值范围是________.

例 3 化简二次根式 $a\sqrt{-\dfrac{a+1}{a^2}}$ 的结果是(　　).

A. $\sqrt{-a-1}$　　B. $-\sqrt{-a-1}$　　C. $a\sqrt{+1}$　　D. $-\sqrt{-a+1}$

【分析】 根据二次根式的意义有 $-\dfrac{a+1}{a^2}\geqslant 0$，而 $a^2>0$，所以 $a+1\leqslant 0,a\leqslant -1$. 所以原式 $=\dfrac{a}{|a|}\sqrt{-a-1}=-\sqrt{-a-1}$.

【答案】 B

【评注】 解决本题的关键是发现 a 的取值范围，再根据二次根式的意义和性质进行化简.

类题演练 化简 $\sqrt{-\dfrac{a^3}{b}}$ $(b>0)$.

例 4 若 $\sqrt{x-y+1}+\sqrt{x+y-5}=0$，求 $\dfrac{(x-y)^{2005}}{x^3+y^2}$ 的值.

【分析】 根据算术平方根的非负性，已知两数之和为零，必须且只需这两个加数都为零，由此列出方程组，求出 x 和 y 值，得到最后结果.

【解】 由已知可得 $\begin{cases}x-y+1=0,\\ x+y-5=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=3.\end{cases}$

所以，原式 $=\dfrac{(2-3)^{2005}}{2^3+3^2}=\dfrac{-1}{8+9}=-\dfrac{1}{17}$.

【评注】 算术平方根的非负性在二次根式的有关问题中应用较广.

类题演练 已知 $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x+y}=0$，则 $x-y$ 的值为(　　).

A. 2　　B. 6　　C. 2 或 -2　　D. 6 或 -6

例 5 若 m 适合关系式 $\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=\sqrt{x-199+y}\cdot\sqrt{199-x-y}$，试确定 m 的值.

【分析】 从二次根式的意义人手，寻找有用条件，得到 $x+y=199$，再利用算术平方根的非负性得到 $\begin{cases}3x+5y-2-m=0,\\ 2x+3y-m=0.\end{cases}$ 从而获解.

【解】 由已知可得 $\begin{cases}x-199+y\geqslant 0,\\ 199-x-y\geqslant 0.\end{cases}$ 解得 $x+y=199$……①.

所以，原关系式可变为 $\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=0$.

因此，可得 $\begin{cases}3x+5y-2-m=0,\\2x+3y-m=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2m-6,\\y=4-m.\end{cases}$

代入①，得 $(2m-6)+(4-m)=199$，解得 $m=201$.

【评注】 初看本题很难找到有用信息，根据二次根式的意义逐步探索，可找到隐含的规律，从而获得解题，这也是探索解题的一种途径.

类题演练　实数 a,b 满足 $\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{36-12a+a^2}=10-|b+3|-|b-2|$，则 a^2+b^2 的最大值为________.

同步反馈

A 组

1. 下列各式中不是二次根式的是(　　).

A. $\sqrt{x^2+1}$　　B. $\sqrt{-4}$　　C. $\sqrt{0}$　　D. $\sqrt{(a-b)^2}$

2. 若实数 m 满足 $m-\sqrt{m^2}=0$，则 m 的取值范围是(　　).

A. $m\geqslant0$　　B. $m>0$　　C. $m\leqslant0$　　D. $m<0$

3. 使代数式 $\dfrac{\sqrt{3-x}}{x+2}$ 有意义的 x 的取值范围是(　　).

A. $x\neq-2$　　B. $x<3$ 且 $x\neq-2$　　C. $x\leqslant3$ 且 $x\neq2$　　D. $x\leqslant3$ 且 $x\neq-2$

4. 若 $\sqrt{(x-2)(3-x)}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{3-x}$ 成立. 则 x 的取值范围为(　　).

A. $x\geqslant2$　　B. $x\leqslant3$　　C. $2\leqslant x\leqslant3$　　D. $2<x<3$

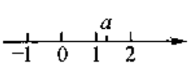
5. 若 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+y}=0$，则 $x^{2006}+y^{2005}$ 的值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 2

B 组

6. 实数在数轴上的位置如图所示，

化简 $|a-1|+\sqrt{(a-2)^2}=$________.



(第 6 题)

7. 代数式 $3-\sqrt{4-x^2}$ 的最大值为________.

8. 若 a,b,c 为△ABC 的三边之长，则化简 $\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}$ 的结果是(　　).

A. $a+b-c$　　B. $b+c-a$　　C. $c+a-b$　　D. $a+b+c$

9. 若 $x<1$，则 $|\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(2-x)^2}|$ 等于(　　).

A. 1　　B. $3-2x$　　C. $2x-3$　　D. -2

10. 如果 $x<0,y<0$，且 $3x-2y=\sqrt{xy}$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的值为(　　).

A. $-\dfrac{4}{9}$　　B. 1　　C. $\dfrac{4}{9}$　　D. 以上答案都不对

11. 已知 $A=(2-x)-(\sqrt{2}x-5)\sqrt{2}$，则使 A 为正数的自然数 x 有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 多于 2 的有限个　　D. 无限多个

12. 满足不等式 $|5-x|+|x-1|<\sqrt{37}$ 的整数解共有(　　).

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 7 个

13. 已知 $a=2-\sqrt{5}$，$b=\sqrt{5}-2$，$c=5-2\sqrt{5}$，那么，a,b,c 的大小顺序是（　　）.

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

14. 方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2001}$ 的整数解（　　）.

A. 不存在　　B. 仅有 1 组　　C. 恰有 2 组　　D. 至少有 4 组

15. 设 a,b,c 都是实数，若 $a+b+c=2\sqrt{a-1}+4\sqrt{b+1}+6\sqrt{c-2}-12$，则 $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=$________.

课外拓展

16. 已知 $a+b-2\sqrt{a-1}-4\sqrt{b-2}=3\sqrt{c-3}-\frac{1}{2}c-5$，求 $a-b+c$ 的值.

17. 设 $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}$，求不超过 S 的最大整数.

1.2　二次根式的运算

课堂笔记

重点讲解　本节的主要内容是二次根式的运算，乘除运算法则用式子可以表达为：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$，$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$. 加减运算可以参照整式的运算进行，因为整式的运算法则和方法同样适用于二次根式.

难点点拨　二次根式的运算本身就已经隐含了一种开方运算（带有根号），再加上其他的一些运算比较复杂且有一定的灵活性，所以难度相对大些. 在运算过程中，一要注意运算顺序，比如，在二次根式的加减运算中，一般是先化简，再进行加减；而在二次根式的乘除运算中，一般是先乘除，再化简. 二要运用有关法则，结果要把二次根式化简.

例题解析

例 1　计算 $\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}}\right)^2\cdot(7-4\sqrt{3})+(8+4\sqrt{6})$.

【分析】　按实数的运算顺序进行化简.

【解】　原式$=\frac{10-4\sqrt{6}}{7-4\sqrt{3}}\cdot(7-4\sqrt{3})+(8+4\sqrt{6})=(10-4\sqrt{6})+(8+4\sqrt{6})=18.$

【评注】　乘法公式和分式的运算法则在二次根式的运算中仍然适用，合理的运用公式可以提高运算速度和准确率.

类题演练　计算$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$.

例2　计算$9\sqrt{45}\div\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

【分析】　二次根式的除法与整式的除法类似，把根号外的“系数”与根号内的被开方数分别相除.

【解】　原式$=\left[9\div\left(-\frac{3}{2}\right)\right]\cdot\sqrt{45\div\frac{3}{2}}=-6\sqrt{45\times\frac{2}{3}}=-6\sqrt{30}.$

【评注】　合理运用运算法则，是进行正确解题的前提.

类题演练　计算$(4\sqrt{3}-2\sqrt{12}+3\sqrt{18})\div\left(-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

例3　已知$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，求$\frac{x^3}{x^4+x+1}$的值.

【分析】　直接代入运算，运算量较大，若能把已知条件变形(或将所求的代数式进行变形)，再采用降次代入，就能简化运算，提高运算速度和准确率.

【解】　**解法一**

因为$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，

所以$(2x-1)^2=5$.

所以$4x^2-4x+1=5, x^2-x=1$.

所以$x^2=x+1$.

原式$=\frac{x^3}{x^4+x+1}=\frac{x^3}{x^4+x^2}=\frac{x^3}{x^2(x+1)}=\frac{x^3}{x^4}=\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解法二　由上可知，$x^2=x+1$.

所以 原式$=\frac{x^3}{x(x+1)+x+1}=\frac{x^3}{x^2+2x+1}=\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{x^3}{x^4}=\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【评注】　在利用已知条件等式进行求值时，合理利用等式是解题的关键．本题中把已知等式变形，采用降次(或升次)逐步代入，往往是一条有效的途径.

类题演练 已知 $x=2\sqrt{2}+1$，则分式$\frac{x^2-2x-9}{x^3-11x-15}=$________.

例 4 已知 $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$，则 $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$的值为( ).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【分析】 由已知条件直接求解比较困难. 通过观察，不难发现所求代数式与已知条件之间存在一定的关系，即$(\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2})(\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2})=25-x^2-(15-x^2)=10$. 若设$\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}=m$，则 $2m=10$，$m=5$.

【答案】 C

【评注】 "直难则曲"是一种解题的策略，当遇到直接解题有困难时，不妨尝试采用间接的方法解决.

类题演练 已知 $\sqrt{53-x^2}-\sqrt{13-x^2}=2$，求 $\sqrt{53-x^2}+\sqrt{13-x^2}$的值.

例 5 计算$\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}}$.

【分析】 看到本题，我们自然会联想到另一个问题：计算$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}$.

这个问题的解决是把每一个分式进行拆项：$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，…，最后许多项相互抵消，简化计算. 本题能否尝试用这样的方法呢？$\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$，

$\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{15}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}})$，…，从而找到本题的解答方法.

【解】 原式$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{47}}-\frac{1}{\sqrt{49}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{49}}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}=\frac{3}{7}$.

【评注】 多项代数式求和问题，通常要采用拆项求和. 本题的化简过程可用下面的一般式子表示：$\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{2n-1}(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}=$

$\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{2n-1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$.

类题演练 计算$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2008}}$.

同步反馈

A 组

1. 下列化简计算正确的是（　　）.

A. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$

C. $\sqrt{8}=3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{4}\div\sqrt{2}=2$

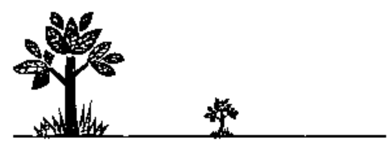
2. 计算 $2\sqrt{3}\times3\sqrt{\frac{1}{3}}\div3\sqrt{\frac{1}{27}}$的结果是（　　）.

A. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{\frac{1}{3}}$　　C. $6\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{6}$

3. 有两棵树，一棵高 6 米，另一棵高 2 米，两树相距 5 米.一只小鸟从一棵树的树梢飞到另一棵树的树梢，至少飞了（　　）米.

A. 41　　B. $\sqrt{41}$

C. 3　　D. 9



（第 3 题图）

4. 计算

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}\times\sqrt{10}$；　　(2) $\left(\sqrt{\frac{3}{8}}-3\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{12}$；

(3) $(\sqrt{18}-\sqrt{27})\div\sqrt{6}+8\sqrt{\frac{1}{2}}$；　　(4) $\sqrt{12}\div\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$

5. 计算$(2-\sqrt{5})^{2007}\cdot(2+\sqrt{5})^{2008}=$________.

6. 先阅读下列解答过程，然后再解答：

形如$\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}$的化简，只要我们找到两个数 a、b，使 $a+b=m$，$ab=n$，使得$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=m$，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{n}$，那么便有：

$\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}(a>b)$.

例如：化简$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

解：首先把$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$化为$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$，这里 $m=7$，$n=12$，由于 $4+3=7$，$4\times3=12$，

即$(\sqrt{4})^2+(\sqrt{3})^2=7$，$\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{12}$，

所以$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$.

由上述例题的方法化简：$\sqrt{13-2\sqrt{42}}$.

7. 请你观察思考下列计算过程：因为 $11^2=121$，所以 $\sqrt{121}=11$.

同样因为 $111^2=12321$，所以 $\sqrt{12321}=111$. ……

由此猜想 $\sqrt{12345678987654321}=$________.

8. 观察下列各式：$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$；$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$；$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$；……

将你猜想到的规律用含自然数 $n(n\geqslant 1)$ 的代数式表示出来，它是________.

9. 已知 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，试求 $2a^2-5a-2+\frac{3}{a^2+1}$ 的值.

10. 设$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$的整数部分为 x，小数部分为 y，试求 $x^2+\frac{1}{2}xy+y^2$ 的值.

11. 已知 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$，求 x^2-xy+y^2 的值.

12. 已知 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$，$y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，则 $x^4+y^4=$________.

13. 计算：$\sqrt{2005\times2006\times2007\times2008+1}-2006^2=$________.

14. 计算$(\sqrt{3}+1)^{2001}-2(\sqrt{3}+1)^{2000}-2(\sqrt{3}+1)^{1999}+2001$.

15. 若 $x-y=\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$，$x+y=\sqrt{3\sqrt{5}-\sqrt{2}}$，则 $xy=$________.

B 组

课外拓展

16. 已知 $b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求 $b^4-9b^2+2\sqrt{2}b+1$ 的值.

17. 若正数 a、b、c 满足 $a+c=2b$，求证：$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$.

第 2 章　一元二次方程

2.1　一元二次方程

课堂笔记

重点讲解　本节的主要内容是一元二次方程及其解的概念. 为了便于区分一元二次方程的二次项、一次项和常数项，我们通常要把一元二次方程化为一般形式，这时应注意各项系数的符号. 本节中还牵涉到用因式分解法解一元二次方程，熟练地掌握因式分解的方法是解方程的前提.

难点点拨　判断某个方程是否为一元二次方程，需要经过整理后才能判断，判断的依据是定义. 一元二次方程的二次项系数不能等于 0，这是一个容易被忽视的地方，应特别注意. 应养成看到一个一元二次方程就把它化为一般形式的习惯(特殊形式的方程除外)，这会有利于我们准确地选择方程的解法. 比如用因式分解法解一元二次方程时，先化为一般形式后再把方程左边因式分解，根据"若 $A\cdot B=0$，则 $A=0$ 或 $B=0$"，可将解一元二次方程的问题转化为解两个一元一次方程的问题.

例题解析

例 1　已知关于 x 的方程 $mx^2+(m-1)x-1=2x^2-x$.

(1)当 m 取什么值时，这个方程是一元二次方程？这时它的二次项系数、一次项系数、常数项分别是多少？

(2)当 m 取什么值时，这个方程是一元一次方程？

【分析】　由于一元二次方程是只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的整式方程，即可以化为一般形式为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程，所以先要对方程 $mx^2+(m-1)x-1=2x^2-x$ 进行整理，化为一般形式.

【解】　把方程 $mx^2+(m-1)x-1=2x^2-x$ 变形，得 $(m-2)x^2+mx-1=0$.

(1)m 为不等于 2 的任意实数时，这个方程是一元二次方程，二次项系数、一次项系数、常数项分别是 $m-2, m, -1$.

(2)因为 $\begin{cases} m-2=0, \\ m\neq 0. \end{cases}$ 所以 $m=2$ 时这个方程为一元一次方程.

【评注】　在判断一个方程是否为一元二次方程时，先要把方程化为一般形式，再确定二次项系数是否为 0. 在辨析二次项系数、一次项系数和常数项时，不要漏掉项的符号. 在第(2)小题的解答时，必须同时满足两个条件，特别是一次项系数不为零. 例如关于 x 的方程 $(m-2)x^2+(m-2)x-1=0$ 就不存在实数 m，使这个方程为一元一次方程.

类题演练　已知关于 x 的方程 $(k^2-1)x^2+2(k-1)x+2k+2=0$.

(1)当 k 取什么值时，这个方程是一元二次方程？这时它的二次项系数、一次项系数、常数项分别是多少？

(2)当 k 取什么值时，这个方程是一元一次方程？

例 2 已知关于 x 的方程 $(3x-a)(ax+2)=(2x-1)(ax+4)$ 有一个解为 0，求另一解及 a 的值.

【分析】 能使一元二次方程两边相等的未知数的值叫一元二次方程的解(或根). 由于已知方程的一个解是 0，可将 $x=0$ 代入方程中求出 a 的值.

【解】 把 $x=0$ 代入方程，得 $-a\times 2=-1\times 4$.

所以 $a=2$.

把 $a=2$ 代入方程，整理得 $2x^2-4x=0$.

$2x(x-2)=0$.

所以 $x_1=0, x_2=2$.

所以另一个根为 $x=2, a=2$.

【评注】 解答本题的关键是理解方程的解的意义.

类题演练 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(t-2)x-t=0$ 有一个根是 2，则 $t=$________，另一个根是________.

例 3 解一元二次方程：$9(x-1)^2=25(3-x)^2$.

【分析】 根据方程的特点，可以把方程移项后用平方差公式进行因式分解，亦可两边直接开平方，化为两个一元一次方程 $3(x-1)=5(3-x)$ 或 $3(x-1)=-5(3-x)$.

解法一 移项，得

$9(x-1)^2-25(3-x)^2=0$.

$[(3x-3)+(15-5x)][(3x-3)-(15-5x)]=0$.

$(12-2x)(8x-18)=0$.

所以 $x_1=6, x_2=\frac{9}{4}$.

解法二 等式两边直接开平方，得

$3(x-1)=5(3-x)$ 或 $3(x-1)=-5(3-x)$.

解这两个一元一次方程，得

$x_1=\frac{9}{4}, x_2=6$.

类题演练 $(1-2x)^2=4(3x+2)^2$.

例 4 已知 a,b,c 分别是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的三条边，且 $(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)-15=0$，求斜边 c.

【分析】 求斜边 c，只要求出 c^2 即可，也就是求 a^2+b^2 的值. 由条件易知，方程 $(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)-15=0$ 可以看成是关于"a^2+b^2"的一元二次方程，因此，只要求这个方程的正数解即可.

【解】 设 $x=a^2+b^2$，则 $x>0$，原方程可化为 $x^2-2x-15=0$，

因式分解，得 $(x-5)(x+3)=0$.

所以 $x_1=5$，$x_2=-3$（不合题意，舍去）.

所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{x}=\sqrt{5}$.

【评注】 本题是几何与一元二次方程的解相结合的问题，运用了整体思想和换元思想. 注意求得的解要符合实际意义.

类题演练　解方程 $(x-2)^2-2(x-2)-3=0$

例 5　若 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，求 $2a^2-5a-2+\frac{3}{a^2+1}$ 的值.

【分析】 根据方程的解的定义，若 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，则有 $a^2-3a+1=0$.

解法一　因为 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，

所以 $a^2-3a+1=0$.

显然，$a\neq0$. 所以

$2a^2-5a-2+\frac{3}{a^2+1}=2(a^2-3a+1)+a-4+\frac{3}{3a}$

$=a-4+\frac{1}{a}=\frac{a^2-4a+1}{a}=\frac{(a^2-3a+1)-a}{a}$

$=\frac{0-a}{a}=-1$

解法二　同上可得，$a^2-3a+1=0$，$a^2+1=3a$.

因为 $a\neq0$，

所以可将 $a^2-3a+1=0$ 等号两边同时除以 a，

得 $a-3+\frac{1}{a}=0$，即 $a+\frac{1}{a}=3$.

所以 $2a^2-5a-2+\frac{3}{a^2+1}=2(a^2-3a+1)+a-4+\frac{3}{3a}$

$=a-4+\frac{1}{a}=3-4=-1$.

【评注】 熟练运用方程的解的定义，是解决本题的关键. 将方程进行适当变形，又可大大简化运算过程.

类题演练　已知 a 是方程 $x^2-2004x+1=0$ 的一个根，求 $a^2-2003a+\frac{2004}{a^2+1}$ 的值.

同步反馈

A 组

1. 关于 x 的方程中一定是一元二次方程的是（　　）.

A. $ax^2+bx+c=0$　　　　B. $mx^2+x-m^2=0$

C. $(m+1)x^2=(m+1)^2$

D. $(m^2+1)x^2-m^2=0$

2. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根分别为 $x_1=3, x_2=1$，那么 x^2+px+q 可以因式分解成为________.

3. 当 $a=$________时，$(a-1)x^{a^2+1}+3x-1=0$ 为一元二次方程.

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m^2+2m-3=0$ 的一个根为 0，则 m 的值为(　　).

A. 1

B. -3

C. 1 或 -3

D. 不等于 1 的任意实数

5. 已知方程 $3x^2-6x+\sqrt{x^2-2x+3}=7$，若令 $\sqrt{x^2-2x+3}=y$，则方程变为(　　).

A. $3y^2+y-7=0$

B. $3y^2+y+2=0$

C. $3y^2+y-16=0$

D. $3y^2+y+16=0$

6. 解下列方程：

(1) $3y^2-6y=0$；

(2) $25x^2=16$.

B 组

7. 已知 $(x+y)(x+y+2)=8$，那么 $x+y=$________.

8. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(2x-1)^2=25(x+1)^2$；

(2) $(3x+1)^2-3(3x+1)=4$.

9. (1) 若 $a+b+c=0$，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一解为________.

(2) 若 $a-b+c=0$，则一元二次方程 $ax^2-bx+c=0$ 必有一解为________.

(3) 若 $4a+2b+c=0$，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一解为________.

10. 方程 $(2a-4)x^2-2bx+a=0$.

(1) 在什么条件下，此方程为一元二次方程？

(2) 在什么条件下，此方程为一元一次方程？

11. 如果非零实数 n 是关于 x 的方程 $x^2-mx+n=0$ 的根，那么 $m-n=$________.

12. 已知 m、n 都是方程 $x^2+2006x-2008=0$ 的根，试求 $(m^2+2006m-2007)(n^2+2006n-2009)$ 的值.

13. 已知 a、b 是实数，$\sqrt{2a+6}+|b-\sqrt{2}|=0$，解关于 x 的方程 $(a+2)x^2+b^2x+8=0$.