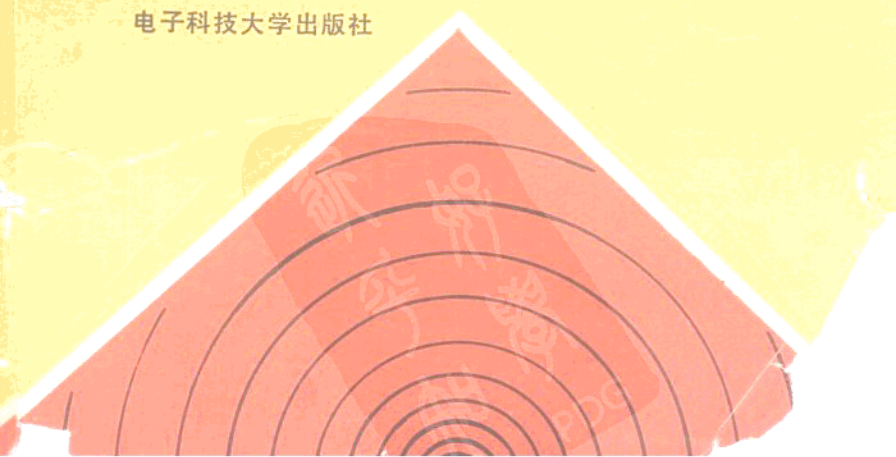


高等学校教学用书

臧建华 方蕴文 编著

# 振动分析基础

电子科技大学出版社



# 前 言

通过多年教学和科研实践，我们感到需要一本不局限于数学处理，又不局限于现象罗列的，而是从工程设计角度出发来编写的振动分析教材，本书就是这样一种尝试。它不企图包括振动学的多个分支，而只着眼于线性振动的基本理论和处理方法，适当地插入一些具体问题的分析。

本书的读者对象主要是机械工程和结构工程的大学生和研究生，也可供从事振动工程的技术人员参考。本书的先修课程是理论力学、材料力学、微积分、微分方程和线性代数等。

在内容的安排上，本书以多自由度系统和连续系统的分析和讨论为重点，并对振动分析中的近似方法作了详细介绍。同时对对阻尼的讨论作为重要内容贯串全书。振动测量的理论和数据分析方法则单列一章加以阐述。

第一章讨论单自由度系统，其叙述带有复习性，但很多基本概念和方法是在这一章中引出和介绍的。所以，如果在讲授中略去这一章，则要求学生通过自学掌握它。

第二、三章讨论多自由度系统，普遍应用了矩阵分析法，并详述了固有频率和振型的计算技术。

第四章至第八章详细讨论了连续系统的振动。首先对具体的梁、板等重要构件作了分析，然后对本征值问题加以普遍讨论；详述了近似计算方法；对阻尼在连续系统振动中的作用进行了专门讨论；摄动和稳定性问题在一些章节中也作了介绍。

第九章简述振动测量。只要求学生了解这方面的基本方法。

本书编写分工如下：方蕴文同志编写第一、二、三、九章及附录；臧建华同志编写第四、五、六、七和八章。

虽然本书内容在教学过程中几经修改，但由于编者水平所限，不妥和疏漏之处在所难免，希望读者指正。

编 者

# 目 录

引 言	( 1 )
第一章 单自由度系统振动的理论及应用	( 2 )
§ 1.1 运动微分方程及其解	( 2 )
§ 1.2 稳态响应	( 8 )
§ 1.3 能量耗散, 等效粘滞阻尼, 结构阻尼	( 10 )
§ 1.4 库伦阻尼	( 13 )
§ 1.5 简谐振动的复矢量表示	( 15 )
§ 1.6 机械阻抗	( 17 )
§ 1.7 对非谐周期激振函数的响应	( 18 )
§ 1.8 对任意激振函数的响应	( 21 )
§ 1.9 Laplace变换方法	( 26 )
§ 1.10 状态平面(State plane)方法	( 29 )
§ 1.11 应用举例	( 30 )
习 题	( 31 )
第二章 多自由度系统的振动	( 42 )
§ 2.1 两自由度系统的自由振动	( 42 )
§ 2.2 无阻尼多自由度系统的自由振动	( 51 )
§ 2.3 主坐标, 正规坐标	( 54 )
§ 2.4 初值问题	( 58 )
§ 2.5 影响系数法	( 60 )
§ 2.6 拉格朗日方程的应用	( 64 )
§ 2.7 无阻尼强迫振动	( 69 )
§ 2.8 有阻尼系统	( 78 )
习 题	( 85 )
第三章 固有频率和振形的计算方法	( 93 )
§ 3.1 Dunkerley法	( 93 )
§ 3.2 矩阵迭代法	( 95 )
§ 3.3 传递矩阵法	( 100 )
§ 3.4 Myklestad-Prohl法	( 105 )
§ 3.5 Rayleigh商法和Rayleigh最小值原理	( 116 )
§ 3.6 Stodola法	( 118 )
习 题	( 119 )

<b>第四章 连续系统的振动</b> .....	( 121 )
§ 4.1 弦的空间振动.....	( 121 )
§ 4.2 杆的纵向自由振动和轴的扭振.....	( 134 )
§ 4.3 欧拉-伯努利梁平面弯曲振动.....	( 141 )
§ 4.4 板的振动.....	( 160 )
<b>第五章 连续系统的本征振动</b> .....	( 174 )
§ 5.1 变量分离法.....	( 174 )
§ 5.2 本征值与本征函数.....	( 175 )
§ 5.3 实例 本征值和本征函数的求解.....	( 177 )
§ 5.4 本征函数的正交性.....	( 180 )
§ 5.5 有集中质量的梁.....	( 184 )
§ 5.6 挂有单振子的梁.....	( 187 )
§ 5.7 系统的能量辨认.....	( 191 )
§ 5.8 计及集中质量的转动惯量时梁的本征函数的正交性.....	( 200 )
<b>第六章 连续系统的强迫振动</b> .....	( 204 )
§ 6.1 区域激振的强迫振动.....	( 204 )
§ 6.2 支座振动时的强迫振动.....	( 206 )
§ 6.3 移动荷载与移动质量时的强迫振动.....	( 213 )
§ 6.4 动影响函数.....	( 214 )
§ 6.5 传送带的振动问题.....	( 217 )
<b>第七章 连续系统本征振动计算的近似方法</b> .....	( 221 )
§ 7.1 瑞利商法.....	( 221 )
§ 7.2 Southwell法.....	( 227 )
§ 7.3 Dunkerley法.....	( 229 )
§ 7.4 允许函数的迭代改进.....	( 230 )
§ 7.5 附加质量的影响.....	( 234 )
§ 7.6 Galerkin法.....	( 238 )
§ 7.7 实例——非均衡旋转装配轴的振动.....	( 244 )
§ 7.8 实例——初估函数的迭代改进.....	( 247 )
§ 7.9 圆柱壳的本征振动计算.....	( 251 )
<b>第八章 阻尼对连续系统振动的影响</b> .....	( 256 )
§ 8.1 外阻尼情况.....	( 256 )
§ 8.2 小阻尼时的振动计算.....	( 259 )

§ 8.3	内阻尼的影响	( 262)
§ 8.4	具有内、外阻尼时的强迫振动	( 264)
§ 8.5	材料的“记忆”	( 266)
§ 8.6	“记忆”材料直杆的纵向振动	( 268)
§ 8.7	具有陀螺效应的旋转轴振动分析	( 271)
§ 8.8	具有内外阻尼的旋转轴振动问题	( 281)
§ 8.9	液流管振动问题	( 285)
<b>第九章</b>	<b>振动试验</b>	( 290)
§ 9.1	振动测量系统	( 290)
§ 9.2	振动传感器, 压电加速度计	( 291)
§ 9.3	激振器	( 293)
§ 9.4	结构振动试验	( 294)
§ 9.5	快速正弦波频率扫描激振试验	( 300)
<b>附 录</b>		( 302)
A	Fourier变换	( 302)
A.1	Fourier级数	( 302)
A.2	Fourier积分	( 304)
B	LaPlace变换	( 305)
B.1	定义	( 305)
B.2	导数的Laplace变换	( 305)
B.3	求逆变换的常用方法	( 306)
B.4	卷积定理	( 308)
<b>参 考 文 献</b>		( 309)

# 引 言

振动，一般被理解为往复类型的运动，是自然界及工程上一种普遍存在的运动方式。随着科技和生产的发展，振动领域的基础理论和应用技术的研究日益广泛和深入。借助于近代电子技术和数字计算机，过去无法实现的复杂计算和测试已成为可能，从而使对振动的研究取得了突破性进展。

本书主要研究线性系统的振动，只在个别场合涉及非线性系统。对于线性系统，同时施加的多个激励的总响应可以应用叠加原理对各个激励的响应求和来获得。

一个系统的振动形态决定于多种因素。在振动研究中，最重要的因素是系统的平衡位置和惯性，对系统所施加的扰动或激励，使之回复平衡位置的弹性力，以及系统在振动过程中所受到的阻尼力。

系统仅仅由于初始不平衡而发生的振动称为自由振动；而在激振因素作用下发生的振动则称为强迫振动。实际系统在振动过程中总是伴随有能量耗散，亦即系统的运动受到阻尼作用。系统的构件连结处和支承处的摩擦，材料的内摩擦，以及系统周围介质的阻力等均造成阻尼作用。大多数机械系统的阻尼是轻微的，有时为了降低振动强度，则可能利用强阻尼装置。

对于一个实际的振动问题，由于各种影响因素错综复杂，一般要求通过理论分析和实验研究两方面结合起来求解。从工程设计观点出发，常需建立一较为简单的理想模型，由此得出的分析结果可以反映出真实现象的主要方面。所以，为真实系统“建模”是振动研究工作中十分重要及首要的任务。

机械及结构的振动常常被看作一种有害现象。机床的振动会降低加工的精度；建筑结构的振动可能导致墙体倒塌；诸多噪声的根源来自振动。近代机械和结构要求在严峻的振动环境中具有高可靠性。然而，振动的有利一面也愈来愈为人们所认识和开发。各种各样的振动机械和振动设备正越来越有成效地应用在生产和科研的许多领域，发挥着独特的作用。所以，工程技术人员应在振动理论和测试方面拥有坚实的基础知识，且对各种激励(输入)下系统的响应(输出)有深入的了解。

# 第一章 单自由度系统振动的 理论及应用

严格的单自由度系统在工程上实际是不存在的。即使是一个质块悬吊于弹簧上的直线振动，也由于质块本身总是变形体而具有无限多个自由度，更不用说还要考虑弹簧的质量了。然而，如果质块的变形比起它的位移是很小，且弹簧的质量比起质块的质量也是很小的，则此系统完全可被抽象为一个集中质量与无质量弹簧的串联。这样就形成了振动系统的最简单模型。图1.1表示单自由度系统在激振力 $F(t)$ 作用下的强迫振动模型。图中， $x$ 为相对于静平衡位置的位移坐标， $m$ 为单个质量， $k$ 为弹簧的刚度常数， $c$ 为粘滞阻尼系数，此处假定系统的阻尼为粘滞型的。

当然，并非只有一个质量才可能成为单自由度系统。只要系统的变位可以用单个广义坐标来表示，那么它就是单自由度系统。例如图1.2(a)中，若 $AB$ 可视为刚杆，则此系统是一单自由度系统，因为 $m_1$ 、 $m_2$ 两个质量的位移可以用此刚杆的角位移唯一地表示。对于图1.2(b)的系统，若滑轮和物块都视为刚体，绳与轮间又无滑动，则也可认为是单自由度的。

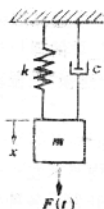


图 1.1

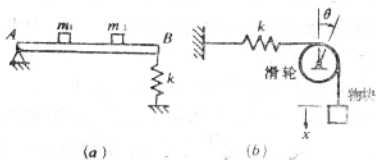


图 1.2

## § 1.1 运动微分方程及其解

对于图1.1所示的系统，可按牛顿第二定律列出它的运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1.1a)$$

这就是在单自由度系统中存在粘滞阻尼的强迫振动微分方程式。对于正弦激振情况，有

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (1.1b)$$

$F_0$ 为激振力幅值， $\omega$ 为激振力频率（角频率）。如果是自由振动，即 $F(t) = 0$ ，则(1.1a)

式成为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.2)$$

令

$$\frac{c}{m} = 2n \quad \frac{k}{m} = p^2 \quad (1.3)$$

则(1.2)式可写为

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0 \quad (1.4)$$

式中,  $n$ 称为衰减系数。 $p$ 就是无阻尼系统的自然角频率, 所以系统的自然频率为  $f = p/2\pi$ 。以后为方便起见, 我们将把  $p$  和  $f$  均称为自然频率或固有频率。(1.4)式是一个线性齐次二阶微分方程, 其解  $x(t)$  的特性因  $n > p$  (过阻尼),  $n = p$  (临界阻尼), 及  $n < p$  (欠阻尼) 而异。当  $n > p$  时, 有

$$x = \exp(-nt) [A \exp(qt) + B \exp(-qt)] \quad (1.5)$$

式中,  $q = \sqrt{n^2 - p^2}$ , 常数  $A$ 、 $B$  由初始条件确定。显然此情况不发生振动。当  $n = p$  时, 有

$$x = (A + Bt) \exp(-nt) \quad (1.6)$$

也不发生振动。以上两种情况的  $x-t$  图如图 1.3 所示。只有在  $n < p$  时, 才发生衰减振动, 所以  $n = p$  是区分振动发生与否的临界情况, 此情况下的阻尼称为临界阻尼, 记为  $c_{cr}$ , 则

$$c_{cr} = 2mp = 2\sqrt{mk} \quad (1.7)$$

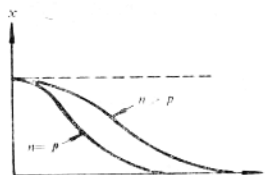


图 1.3

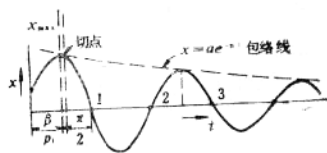


图 1.4

图 1.4 表示衰减振动。此时, 有

$$x = \exp(-nt) [C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t] \quad (1.8a)$$

或写为

$$x = a \exp(-nt) \cos(p_1 t - \beta) \quad (1.8b)$$

上式中

$$p_1 = \sqrt{p^2 - n^2} \quad (1.9)$$

任意常数  $C_1$  及  $C_2$ 、 $a$  及  $\beta$  由初始条件确定。若  $t = 0$  时  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ , 则可得到

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{p_1} \quad (1.10)$$

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + n x_0}{p_1}\right)^2} \quad (1.11)$$



$$\beta = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \left( \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{p_1 x_0} \right)$$

由(1.8b)式可知, 图1.4中位移为零的各点对应于

$$\begin{aligned} \cos(p_1 t - \beta) &= 0 \\ p_1 t - \beta &= q\pi/2 \quad q=1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

图中第一个零位移点1, 对应于 $q=1$ , 由此得

$$t = \frac{\beta + \pi/2}{p_1}$$

由1至3的时间称为此衰减振动的周期或称为条件周期

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{p_1} \quad (1.12)$$

而 $p_1 = 2\pi/\tau_1$ 称为条件频率。(1.8b)式中的 $\beta$ 则称为条件相位角。衰减振动的振幅对应于图1.4曲线的各个极值点, 显然它们不仅与初始条件有关, 而且还与时间有关, 可称之为条件振幅。

图1.4之 $x-t$ 曲线有一包络线 $x = \pm a \exp(-nt)$ , 图中示出了上面一根包络线 $x = a \exp(-nt)$ , 此线与 $x-t$ 曲线在 $\cos(p_1 t - \beta) = 1$ 时相切。需注意, 这些切点并不与曲线的极值点重合, 在阻尼较大时, 两者有明显差异。不过, 在弱阻尼情况下, 两者是很接近的, 通常可不加区分。这时任意相邻两个正极大值点或负极大值点的条件振幅大小之比为

$$a \exp(-nt) / a \exp[-n(t + \tau_1)] = \exp(n\tau_1)$$

表示条件振幅按常数比例衰减。通常用幅值比的自然对数来表示幅值的衰减率, 称为对数缩减率, 记为 $d$ , 即

$$d = n\tau_1 \quad (1.13a)$$

注意到(1.9)及(1.12)式, 并令 $n/p = \bar{n}$ , 则 $d$ 也可表为

$$d = \frac{2\pi \bar{n}}{\sqrt{1 - \bar{n}^2}} \quad (1.13b)$$

式中的 $\bar{n}$ 称为阻尼比, 它实际上就等于阻尼系数 $c$ 与临界阻尼系数 $c_c$ 之比, 即

$$\bar{n} = \frac{c}{2m\dot{p}} = \frac{c}{c_c} \quad (1.14)$$

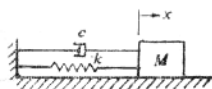


图 1.5

**例1.1** 图1.5表示一粘滞阻尼-弹簧-质量系统的数学模型。设质量为4kg, 弹簧常数为25N/m。开始时, 物体位移为1m, 然后自由释放。试考虑 $c = 0.1c_c$ ,  $c_c$ , 及 $10c_c$ 三种情况下, 物体的运动。

**解。** 在此系统中

$$p = \sqrt{k/m} = 2.5 \text{ rad/s}$$

$$c_c = 2m\dot{p} = 20 \text{ kg/s}$$

初始条件为:  $t = 0$ 时,  $x(0) = 1$ 及 $\dot{x}(0) = 0$

(1)  $c = 0.1c_c = 2 \text{ kg/s}$ 时, 为欠阻尼情况, 物体作衰减振动。由(1.8b)式, 知

$$x = a \exp(-nt) \cos(p_1 t - \beta)$$

$$\dot{x} = -na \exp(-nt) \cos(p_1 t - \beta) - p_1 a \exp(-nt) \sin(p_1 t - \beta)$$

式中,  $n = c/2m = 0.25/s$ ,  $p_1 = \sqrt{p^2 - n^2} = 2.49 \text{ rad/s}$ 。利用初始条件, 得  $a \approx 1.01 \text{ m}$ ,  $\beta \approx -0.1 \text{ rad}$ 。故物体的运动方程为

$$x = 1.01 \exp(-0.25t) \cos(2.49t + 0.1)$$

(2)  $c = c_c = 20 \text{ kg/s}$  时为临界阻尼情况。由(1.6)式, 知

$$x = (A + Bt) \exp(-nt)$$

$$\dot{x} = (-nA - nBt + B) \exp(-nt)$$

式中,  $n = c/2m = 2.5/s$ 。代入初始条件得  $B = nA = 2.5 \text{ m/s}$ , 物体的运动方程为

$$x = (1 + 2.5t) \exp(-2.5t)$$

(3)  $c = 10c_c = 200 \text{ kg/s}$  时为过阻尼情况。由(1.5)式, 知

$$x = A \exp(q-n)t + B \exp[-(q+n)t]$$

$$\dot{x} = (q-n)A \exp[(q-n)t] - B(q+n) \exp[-(q+n)t]$$

式中,  $n = c/2m = 2.5/s$ ,  $q = \sqrt{n^2 - p^2} = 24.87$ , 代入初始条件得  $A \approx 1.003 \text{ m}$ ,  $B \approx -0.003 \text{ m}$ 。运动方程为

$$x = 1.003 \exp(-0.13t) - 0.003 \exp(-49.87t) \approx 1.003 \exp(-0.13t)$$

例1.2 某一阻尼-弹簧-质量系统作衰减振动,  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $k = 800 \text{ N/m}$ 。测量结果显示, 振幅按10%衰减, 求阻尼系数之值。

解 按定义, 对数减缩率为

$$d = \ln \frac{1}{1-0.1} = 0.105$$

由(1.13b)式得阻尼比为

$$\bar{n} = \frac{d}{\sqrt{(2\pi)^2 + d^2}} = 0.017$$

因而得阻尼系数为

$$\begin{aligned} c &= \bar{n} c_c = \bar{n} (2m p) = 2 \bar{n} \sqrt{mk} \\ &= 2 \times 0.017 \times \sqrt{2 \times 800} = 1.36 \text{ N} \cdot \text{s/m} \end{aligned}$$

我们再回到(1.1)式表示的强迫振动。令

$$F_0/m = q \quad (1.15)$$

再据(1.3)式, 则(1.1)式成为

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = q \sin \omega t \quad (1.16)$$

这是一个线性非齐次二阶常系数微分方程。这个方程的一般解应是齐次解和特解之和, 齐次解的形式与(1.4)式的解即自由振动解的形式相同。至于特解, 可假设为如下形式:

$$x_p = a' \sin(\omega t - \alpha) \quad (1.17)$$

代入(1.16)式, 得

$$[a' (p^2 - \omega^2) - q \cos \alpha] \sin(\omega t - \alpha) + [2na' \omega - q \sin \alpha] \cos(\omega t - \alpha) = 0$$

为满足恒等关系，上式方括号内之值均应为零。由此求得

$$a' = \frac{q}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}} \quad (1.18)$$

$$\alpha = \arctg \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2} \quad (1.19)$$

于是，对小阻尼，即  $n < p$  的情况，通解为

$$x = a \exp(-nt) \cos(p_1 t - \beta) + \frac{q \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}} \quad (1.20)$$

可见， $x(t)$  由两部分组成。上式右边第一项为衰减振动部分，与起始条件有关。第二项是正弦激振力引起的强迫振动部分，这部分振动与起始条件无关，其振动频率与激振力频率相同。

由于衰减振动将按负指数规律趋于消失，所以经过一段时间之后，将只剩下强迫振动部分。只要正弦激振力一直不变，此强迫振动也将不变地继续进行下去，所以这部分振动解称为稳态解。系统在可被认为呈现稳态响应前的过程中，其运动形态被称为瞬态。从(1.20)式可看出，瞬态运动为两种具有不同振幅和不同频率的振动之叠加，是一种非常复杂的运动。

**例1.3** 已知系统的  $m$  为 20kg， $k$  为 8kN/m， $c$  为 130N·s/m。初始条件为  $t = 0$  时， $x = 0$ ， $\dot{x} = 100$  mm/s。如系统受激振力  $F(t) = 24 \sin 15t$  (N) 作用，求系统的响应。又问，若系统的初位移及初速度均为零，则有否瞬态响应？

**解** 写出(1.20)式及其导数为

$$x = a \exp(-nt) \cos(p_1 t - \beta) + \frac{q \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}}$$

$$\dot{x} = -na \exp(-nt) \cos(p_1 t - \beta) - p_1 a \exp(-nt) \sin(p_1 t - \beta)$$

$$+ \frac{\omega q \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}}$$

式中， $q = F_0/m$ ， $p_1 = \sqrt{p^2 - n^2}$ ， $a = \arctg \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}$ 。因为  $p = \sqrt{k/m} = 20$  rad/s，

$\omega = 15$  rad/s， $F_0 = 24$  N， $n = c/2m = 130/(2 \times 20) = 3.25$ /s，故可得

$$x = a \exp(-3.25t) \cos(19.7t - \beta) + 6.0 \sin(15t - 29.1^\circ)$$

$$\dot{x} = a \exp(-3.25t) [-3.25 \cos(19.7t - \beta) - 19.7 \sin(19.7t - \beta)] + 90 \times \cos(15t - 29.1^\circ)$$

把初始条件代入，得

$$0 = a \cos \beta + 6.0 \sin(-29.1^\circ)$$

$$100 = a(-3.25 \cos \beta + 19.7 \sin \beta) + 90 \cos(29.1^\circ)$$

求解  $a$  和  $\beta$ ，得到  $\beta = 28.2^\circ$  和  $a = 3.31$  mm，故

$$x = 3.31 \exp(-3.25t) \cos(19.7t - 28.2^\circ) + 6.0 \sin(15t - 29.1^\circ)$$

如为全零初始条件，则可解得  $\beta = -46.4^\circ$ ， $a = 4.23$  mm，故

$$x = 4.23 \exp(-3.25t) \cos(19.7t + 46.4^\circ) + 6.0 \sin(15t - 29.1^\circ)$$

上式右边第一项的存在表明, 当系统无初位移、无初速度而受简谐激振后, 仍然要产生瞬态响应。这是由于, 只有当初始状态符合稳态响应在  $t=0$  时的位移及速度值时, 系统才不产生瞬态响应。本例中, 稳态解为

$$x = 6.0 \sin(15t - 29.1^\circ), \quad \dot{x} = 90 \cos(15t - 29.1^\circ)$$

把  $t=0$  代入上式得:  $x = -2.92 \text{mm}$ ,  $\dot{x} = 69.9 \text{mm/s}$ 。所以只有在初始条件为  $x_0 = -2.92 \text{mm}$  及  $\dot{x}_0 = 69.9 \text{mm/s}$  时, 系统才没有瞬态响应, 即一开始就进入稳态。

**例1.4** 试分析简谐激振情况下, 无阻尼系统自然频率与激振频率相近时, 系统的运动情况。

**解** 系统无阻尼时, 运动微分方程为

$$\ddot{x} + p^2 x = q \sin \omega t \quad (a)$$

它的全解为齐次解及特解之和

$$x = a \cos(p t - \beta) + \frac{q \sin \omega t}{p^2 - \omega^2}$$

常数  $a$  和  $\beta$  由起始条件确定。如取零初始条件:  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ , 则  $\beta = \pi/2$ ,  $a = -(\omega/p)q / (p^2 - \omega^2)$ 。方程简化为

$$x = \frac{q}{p^2 - \omega^2} (\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin p t) \quad (b)$$

(b) 式即为零初始条件下, 系统对激振力  $F_0 \sin \omega t$  的总响应。它表示两个不同频率简谐运动的组合。当  $p \approx \omega$  时, 此式分子和分母的值均很小, 为了分析这种情况下系统响应的特性, 要把 (b) 式改写为

$$x = \frac{q}{p^2 - \omega^2} (\sin \omega t - \sin p t + \frac{p - \omega}{p} \sin p t)$$

用三角函数和差公式, 并令  $p - \omega = 2\varepsilon$ , 则

$$x = -\frac{q}{2(p - \varepsilon)\varepsilon} [\cos(p - \varepsilon)t \cdot \sin \varepsilon t - \frac{\varepsilon}{p} \sin p t] \quad (c)$$

如  $\varepsilon$  很小, 上式可简化为

$$x \approx \frac{-q}{2p\varepsilon} [\cos p t \sin \varepsilon t] + \frac{q}{2p^2} \sin p t \quad (d)$$

第一项表示周期为  $2\pi/p$ , 可变振幅等于  $q \sin \varepsilon t / 2p\varepsilon$  的振动。因为  $p$  比  $\varepsilon$  大得多, 又因为上式第二项的系数  $q/2p^2$  较第一项的系数  $q/2p\varepsilon$  小很多, 故略去其第二项后的 (d) 式所表示的响应曲线如图 1.6 所示, 其振幅作周期性变化, 这种现象称为拍, 拍的周期为  $\pi/\varepsilon$ 。在机械设备中, 拍的现象常使振动噪声的强度也作周期性变化。

对于  $p = \omega$  的极限情况, (c) 式变为

$$x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{-q}{2(p - \varepsilon)\varepsilon} \left[ \cos(p - \varepsilon)t \cdot \sin \varepsilon t - \frac{\varepsilon}{p} \sin p t \right] \right\}$$

$$= -\frac{q}{2p} t \cos pt + \frac{q}{2p^2} \sin pt \quad (e)$$

由第一项中的时间乘数可知, 在  $p = \omega$  时, 随着时间的增加, 系统的振动愈来愈强烈, 如图 1.7 所示, 即振幅愈来愈大。当然, 实际上因为总是有阻尼存在, 振幅不可能无限增长。

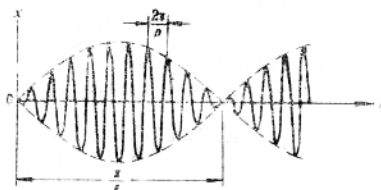


图 1.6

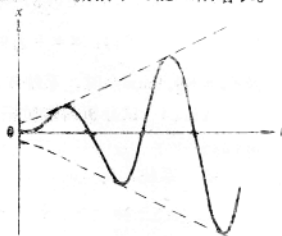


图 1.7

## § 1.2 稳态响应

如果不考虑瞬态, 只研究稳态响应, 则振动方程为

$$x = \frac{q \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}} \quad (1.21)$$

把分子和分母均除以  $p^2$ , 并令

$$\begin{aligned} q/p^2 &= x_0 \\ \omega/p &= \bar{p} \\ n/p &= \bar{n} \end{aligned} \quad (1.22)$$

则可改写为

$$x = \frac{x_0 \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(1 - \bar{p}^2)^2 + (2\bar{n}\bar{p})^2}} \quad (1.23)$$

这里,  $\bar{p}$  为激振频率与自然频率之比, 称为频率比。注意到  $q = F_0/m$  及  $p^2 = k/m$ , 则  $x_0$  显然是在激振力幅  $F_0$  作用下的静位移  $F_0/k$ 。所以从 (1.23) 式可知, 强迫振动的振幅为

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(1 - \bar{p}^2)^2 + (2\bar{n}\bar{p})^2}} \quad (1.24a)$$

$$\text{或} \quad A = B x_0 \quad (1.24b)$$

$$\text{式中} \quad B = [(1 - \bar{p}^2)^2 + (2\bar{n}\bar{p})^2]^{-1/2} \quad (1.25)$$

称为放大因数。于是, (1.23) 式可改写为

$$x = A \sin(\omega t - \alpha) \quad (1.26)$$

这样, 一个单自由度系统在谐和力作用下的输入输出关系如图 1.8 所示。

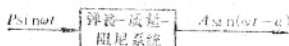


图 1.8

(1.26) 式中的振幅  $A$  和相位  $\alpha$  都是激振力频率  $\omega$  的函数，现在先来考察  $A$  和  $\omega$  的关系，或放大因数  $B$  和  $\bar{p}$  ( $\bar{p} = \omega/\rho$ ) 的关系 (参见 (1.25) 式)

(i)  $\bar{p} \rightarrow 0$  时,  $B \rightarrow 1$  (与阻尼无关), 这相当于静载情况。

(ii)  $\bar{p}$  很大时,  $B \rightarrow 0$  (与阻尼无关)。也就是说, 激振频率较之自然频率高得多时,  $A \rightarrow 0$ 。这是因为, 质量  $m$  的物体在激振力非常快速地交替时, 将来不及跟着作快速的交变位移, 从而趋于在平衡位置不动。

(iii)  $\bar{p} \rightarrow 1$  时, 若  $\bar{n} = 0$ , 则  $B$  趋于无限大。这意味着激振频率与自然频率相同时, 若无阻尼, 则振幅在理论上会变成无限大, 这就是无阻尼共振情况 (参见例 1.4)。若  $\bar{n} > 0$ , 则  $B$  不可能趋于无限大。当然, 在  $\bar{p} = 1$  时,  $B$  之值将是相当大的。

图 1.9 表示不同  $\bar{n}$  值时的  $B-\bar{p}$  曲线, 称为幅频特性曲线。由图可见, 阻尼只在共振邻近的区域才有显著影响。

(iv) 由  $B-\bar{p}$  曲线可见, 若  $\bar{n} > 0$ , 则系统发生最大响应 (即  $B-\bar{p}$  曲线的峰点) 所对应的激振频率并不在  $\bar{p} = 1$  处, 而小在  $\bar{p}$  稍是于 1 之处, 该峰值处之  $\bar{p}$  可据  $dB/d\bar{p} = 0$  的条件求出为

$$\bar{p} = \sqrt{1 - 2\bar{n}^2} \quad (1.27)$$

故峰值处的频率即为

$$\omega_p = \rho \sqrt{1 - 2\bar{n}^2} \quad (1.28)$$

(1.27) 式代入 (1.25) 式, 得  $B$  的峰值为

$$B_p = \frac{1}{2\bar{n}\sqrt{1 - \bar{n}^2}} \quad (1.29)$$

至此, 我们已经讨论了三种不同的频率:

(i) 无阻尼自然频率  $p_1^2 = k/m$ 。

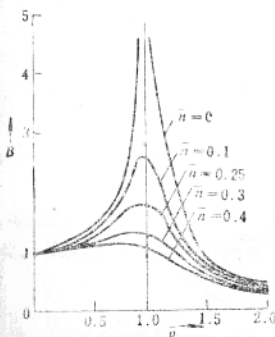


图 1.9

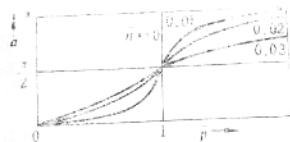


图 1.10

(ii) 有阻尼自然频率  $p_1^2 = p^2 - \bar{n}^2$ 。

(iii) 强迫振动时相应于最大振幅的频率  $\omega_0^2 = p^2 (1 - 2\bar{n}^2)$ 。

当然, 在  $\bar{n} = 0$  时, 这些频率相同。

再考察 $\alpha$ 和 $\omega$ 的关系,或 $\alpha$ 和 $\bar{p}$ 的关系。把(1.19)式写为

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\bar{n}\bar{p}}{1-\bar{p}^2} \quad (1.30)$$

图1.10为不同 $\bar{n}$ 值时的 $\alpha-\bar{p}$ 曲线,称为相频特性曲线。由图可知:

(i) 在 $\bar{n}=0$ 情况下, $\alpha$ 只能有两个值。当 $\bar{p}<1$ 时, $\alpha=0$ ,即强迫振动与激振力同相。当 $\bar{p}>1$ 时, $\alpha=\pi$ ,即强迫振动的位移相位落后于激振力相位,即相差为半周。在 $\bar{p}=1$ 处, $\alpha$ 从0跳变至 $\pi$ 。

(ii) 在 $\bar{n}>0$ ,即具有阻尼的情况下, $\alpha$ 随着 $\bar{p}$ 而连续变化。在 $\bar{p}=1$ 处,恒有 $\alpha=\pi/2$ ,即强迫振动的位移落后于激振力四分之一周,或强迫振动的速度与激振力同相。

(iii) 当激振频率远离共振频率时,小阻尼对 $\alpha$ 的影响不大。在 $\bar{p}<<1$ 时, $\alpha$ 接近于零,而在 $\bar{p}>>1$ 时, $\alpha$ 接近于 $\pi$ 。

### § 1.3 能量耗散.等效粘滞阻尼.结构阻尼

实际系统在运动过程中总要受到阻尼力的作用。实际阻尼的机制是很复杂的,上面讨论中所假定的粘滞型阻尼只是一种数学模型,但任何性质的阻尼都要在运动过程中消耗能量。现在来考察稳态谐振动中的能量耗散,此时,在一周内的能量耗散应等于激振力在一周内所做的功。

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} |F_0 \sin \omega t \cdot \dot{x}| dt \quad (1.31)$$

据(1.2)式,有

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t - \alpha) \quad (1.32)$$

代入(1.31)式,得

$$\Delta W = F_0 A \omega \int_0^{2\pi/\omega} |(\sin \omega t)(\cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha)| dt$$

积分得出

$$\Delta W = \pi F_0 A \sin \alpha \quad (1.33)$$

从(1.19)及(1.24)等式,容易得出

$$\sin \alpha = \frac{2n\omega}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}} = A c \omega / F_0$$

于是

$$\Delta W = \pi c \omega A^2 \quad (1.34)$$

所以在粘滞阻尼情况下,一周所耗能量与频率 $\omega$ 及振幅平方 $A^2$ 成正比。

$\Delta W$ 之值也可以通过阻尼力耗散的功来求得,若以 $P$ 表示阻尼力,则 $P = c\dot{x} = cA\omega \times \cos(\omega t - \alpha)$ ,故有

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} P \dot{x} dt = cA^2 \omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t - \alpha) dt = \pi c \omega A^2$$

与(1.34)式结果同。若以 $P$ 为纵轴,  $x = A \sin(\omega t - \alpha)$ 为横轴作 $P-x$ 图, 则可得到一个椭圆(如图1.11), 显然椭圆的面积  $\pi c \omega A^2$  就是粘滞阻尼在一周内所耗散的功。

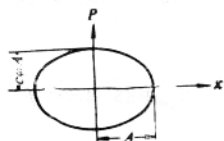


图 1.11

为了得到一个便于处理的数学模型, 我们以能量耗散为准, 把各种实际的阻尼抽象为等价的粘滞型阻尼, 这就是所谓等效粘滞阻尼。例如, 实验显示, 很多材料在振动变形的过程中, 由于材料内摩擦所引起的能量损耗大致与应变幅值的平方成正比, 而与振动频率的关系不大, 这种阻尼称为结构阻尼, 也叫做滞变阻尼。这是一种与粘滞阻尼不同类型的阻尼, 然而我们可以令这种阻尼所耗散的能量与它的等效粘滞阻尼所耗散的能量相等, 这样来求得它的等效粘滞阻尼系数  $c_{eq}$ , 因为位移振幅与应变幅度成正比, 所以结构阻尼引起每周耗散的功为

$$\Delta W_s = sA^2 \quad (1.35)$$

$s$  为一比例系数。若令(1.35)式与(1.34)式相等, 即可得出

$$c_{eq} = \frac{s}{\pi \omega} = \frac{h}{\omega} \quad (1.36)$$

式中,  $h = s/\pi$ 。应指出, (1.35)式所表示的能量损耗也只是一种近似假定, 实际的  $\Delta W_s$  可能与  $A$  的二次至三次方成正比。并且, 当  $A$  不变时, 随着频率的升高, 实验显示  $\Delta W_s$  之值略有降低。

材料结构阻尼的机制是很复杂的。在交变应力作用下, 材料内部微观结构发生的塑性滑移和流动。磁-力效应和位错运动等将导致应力-应变滞回线, 回线包围的面积就代表循环一周内的能量损耗。因粘弹性材料具有较大的阻尼, 近些年来常用于振动控制方面。这种材料的本构关系较金属复杂得多, 工作历史及温度条件等均能明显影响其力学性能。

再次指出, 等效粘滞阻尼系数只是用一周内能量消耗相同的条件求出的。所以, 如果结构阻尼用它的等效粘滞阻尼来取代(通常就是这样处理的), 就等于假定了系统在谐和激振力作用下的响应也是谐和的。

按(1.36)式, 结构阻尼情况下的阻尼力为

$$P_s = c_{eq} \dot{x} = hA \cos(\omega t - \alpha)$$

$A$  和  $\alpha$  为结构阻尼系统稳态时的振幅和初相位。  $P_s$  的幅值等于  $hA$ , 即仅与位移幅值有关, 而与频率无关。考虑到弹性恢复力的幅值为  $kA$ , 所以通常把  $h$  写成  $k$  与一个无量纲因子  $\eta$  相乘, 即

$$h = \eta k \quad (1.37)$$

$\eta$  称为结构阻尼因子, 或称为损耗因子。于是(1.36)式可写为

$$c_{eq} = \frac{\eta k}{\omega} \quad (1.38)$$

据(1.14)式的定义, 得到等效粘滞阻尼比为



$$n_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_{cr}} = \frac{\eta k / \omega}{2mp} = \frac{\bar{p}}{2\omega} \eta \quad (1.39)$$

以之代入(1.24a)式, 可求出结构阻尼情况下稳态响应的振幅

$$A = \frac{x_s}{\sqrt{(1 - \omega^2/\bar{p}^2)^2 + \eta^2}} \quad (1.40)$$

结构阻尼时的对数减缩率可据(1.13b)式写出, 为

$$d = \frac{2\pi n_{eq}}{\sqrt{1 - \bar{n}_{eq}^2}}$$

如果 $\bar{n}_{eq}$ 很小, 则

$$d \approx 2\pi \bar{n}_{eq} = 2\pi \frac{c_{eq}}{c_{cr}} \quad (1.41)$$

此处因为是自由振动, 故由(1.36)式,  $c_{eq}$ 应等于 $h/p$ , 从而

$$d \approx 2\pi \frac{h/p}{2mp} = \frac{\pi h}{k} \quad (1.42)$$

利用上式使我们能够从实测的衰减振动曲线求出表示滞变阻尼的系数 $h$ 之值。

例1.5 低粘度流体阻力常近似地表为与速度的平方成正比, 求其等效粘滞阻尼系数, 并求稳态响应的振幅。

解 设此种阻力之大小为 $c_v \dot{x}^2$ ,  $c_v$ 为常数。则一周内能量消耗为

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} c_v \dot{x}^2 |\dot{x}| dt = c_v \int_0^{2\pi/\omega} |\dot{x}|^3 dt$$

以 $x = A \sin(\omega t - \alpha)$ 代入得

$$\Delta W = 4c_v A^3 \omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^3(\omega t - \alpha) d(\omega t) = \frac{8}{3} c_v \omega^2 A^3$$

与(1.34)式比较, 可知

$$c_{eq} = \frac{8}{3\pi} \omega c_v A$$

代入稳态响应振幅的式子, 得

$$A = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - \bar{p}^2)^2 + (8c_v A \bar{p}^2 / 3\pi m)^2}}$$

由此解出

$$A = \frac{3\pi m}{8c_v \bar{p}^2} \left\{ \sqrt{\frac{(1 - \bar{p}^2)^4}{(1 - \bar{p}^2)^2 + \left(\frac{8c_v \bar{p}^2 F_0}{3\pi km}\right)^2} - \frac{(1 - \bar{p}^2)^2}{2}} \right\}^{1/2}$$

例1.6 某阻尼材料的计算模型为一线性弹簧和阻尼器的并联系统(如图1.12a), 质量不计。图中, 有交叉记号的方块表示结构阻尼。若系统在外力作用下发生 $x = A \sin \omega t$ 的运动, 求此外力 $F(t)$ 。并用 $x-F$ 图显示一周内的能量消耗。

解 运动微分方程为