应用数学

机械动力类

YINGYONGSHUXUE

YINGYONGSHUXUE

主　审　岳忠玉

总主编　胡红亮

主　编　李小光

西北大学出版社

应用数学

机械动力类

YINGYONGSHUXUE

主　审　岳忠玉
总主编　胡红亮
主　编　李小光

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学:机械动力类/胡红亮,李小光主编. —西安:西北大学出版社,2008.2

ISBN 978-7-5604-2414-9

Ⅰ.应… Ⅱ.①胡… ②李… Ⅲ.应用数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 012333 号

书　　名:应用数学(机械动力类)
总 主 编:胡红亮
主　　编:李小光
出版发行:西北大学出版社
通信地址:西安市太白北路 229 号　邮编:710069　电话:029—88303313
经　　销:新华书店经销
印　　刷:陕西信亚印务有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:5
字　　数:116 千字
版　　次:2008 年 2 月第 1 版　2008 年 2 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5604-2414-9
定　　价:10.00 元

前　言

这套《应用数学》教材是为适应高职高专教育培养高技能型人才的需要，更好地为专业教学和学习服务，在多年教学实践的基础上所形成的。

1985年，西安航空技术高等专科学校被原国家教育委员会批准和另外两所学校进行“四五套办”教学模式的试点，最早开始了高职高专教育的改革和建设工作。从那时起，数学课程组就围绕数学课程在高职高专教育中的地位和作用、数学课程的内容体系等问题充分调研，多次与专业教师讨论，在教学实践的基础上逐步构建起适应高职高专教育需要的数学课程内容体系，这套教材就是数学课程改革成果的结晶，可以说这套教材不是“编”出来的，而是在长期教学过程中“教”出来、“改”出来的。

这套《应用数学》教材力求贯彻“以应用为目的，以必需和够用为度”的原则，在编写过程中遵循以下要求：

1. 不拘泥于数学科学自身的系统性和逻辑性；
2. 对基础理论不追求严格的论证和推导，只作简要的说明；
3. 不追求过分复杂的计算和变换。

这套教材由胡红亮副教授任总主编，承担了全套教材的编写大纲和框架安排的工作，岳忠玉副教授担任全套书的主审工作。

本教材由李小光老师担任主编，承担了本教材内容的校对、统稿和定稿工作。本教材共有两章，主要内容包括：拉普拉斯变换(赵芳玲)和概率论初步(胡红亮)等。

限于编者的水平，书中难免存在缺欠和不足，诚挚希望读者批评指正，从而使编者更明确了解教材及教学中的短长，并加以改进。

编者

2008年元月

目　　录

第一章　拉普拉斯变换

拉普拉斯变换(简称拉氏变换)是在求解常系数线性微分方程中常采用的一种较简便的方法,它也在电路分析和工程控制理论中有着广泛的应用.本章将简要的介绍拉普拉斯变换的基本概念、主要性质、拉氏逆变换及一些应用.

§1.1　拉普拉斯变换的基本概念和性质

1.1.1　拉氏变换的概念

在数学中,有时为了将较复杂的运算转化为较简单的运算,常采用一种变换手段,如:对数变换、坐标变换等.拉氏变换正是通过对一类函数进行积分运算,转化成另一类函数,从而使得运算简化.

定义　设函数 $f(t)$,当 $t \geqslant 0$ 时有定义,若广义积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

在 s 的某个区域内收敛,则此积分就确定了一个以参数 s 为自变量(本章内只讨论 s 是实数)的函数,记作 $F(s)$,即

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{1-1}$$

称(1-1)式为函数 $f(t)$ 的**拉氏变换式**,记作

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$$

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的拉氏变换(或称为象函数),$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的拉氏逆变换(或称为象原函数),记作

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

注意:定义中,只要求 $f(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 时有定义,是因为 t 经常表示时间,故为研究方便,今后总假定当 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$.

例 1　求单位阶梯函数

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

的拉氏变换.

解　根据拉氏变换的定义,有

$$\mathscr{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-st}\mathrm{d}t$$

这个积分在 $s>0$ 时收敛,而且有

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

所以

$$\mathscr{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (s>0)$$

例 2 求指数函数 $f(t)=e^{at}(t\geqslant 0)$ 的拉氏变换(a 为实数).

解 根据拉氏变换的定义,有

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at}\cdot e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}dt$$

这个积分在 $s>a$ 时收敛,而且有

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}dt = \left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

所以

$$\mathscr{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (s>a)$$

例 3 求正弦函数 $f(t)=\sin\omega t$ 的拉氏变换.

解 根据拉氏变换的定义,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\sin\omega t] &= \int_0^{+\infty}\sin\omega t\cdot e^{-st}dt\\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s^2+\omega^2}(s\sin\omega t+\omega\cos\omega t)\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (s>0)\end{aligned}$$

同理可得:

$$\mathscr{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad (s>0)$$

1.1.2 拉氏变换的性质

拉氏变换有以下几个主要的性质,利用这些性质,可以求出一些较为复杂的函数的拉氏变换.

1. 线性性质

若 a_1,a_2 为任意常数,且 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s)$,$\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$,则

$$\mathscr{L}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)] = a_1\mathscr{L}[f_1(t)]+a_2\mathscr{L}[f_2(t)] \tag{1-2}$$

证明 根据拉氏变换的定义,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)] &= \int_0^{+\infty}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]e^{-st}dt\\ &= a_1\int_0^{+\infty}f_1(t)e^{-st}dt+a_2\int_0^{+\infty}f_2(t)e^{-st}dt\\ &= a_1\mathscr{L}[f_1(t)]+a_2\mathscr{L}[f_2(t)]\end{aligned}$$

即函数线性组合的拉氏变换等于各个函数拉氏变换的线性组合,此性质对有限多个函数

也成立.

同样,拉氏逆变换也有线性性质,即

$$\mathscr{L}^{-1}[a_1F_1(s)+a_2F_2(s)]=a_1\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+a_2\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)] \qquad (1-2)'$$

例 4 求函数 $f(t)=2-3e^{2t}+\cos t$ 的拉氏变换.

解

$$\mathscr{L}[2-3e^{2t}+\cos t]=2\mathscr{L}[1]-3\mathscr{L}[e^{2t}]+\mathscr{L}[\cos t]$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{3}{s-2}+\frac{s}{s^2+1}$$

2. 平移性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则有

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a) \quad (a \text{ 是常数}) \qquad (1-3)$$

$$\mathscr{L}[f(t-a)]=e^{-as}F(s) \quad (a\geqslant 0) \qquad (1-4)$$

证明 (1) 根据(1—1)式,有

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)\cdot e^{-st}\,dt$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-(s-a)t}\,dt$$

上式的右端只是在 $F(s)$ 中把 s 换成 $s-a$,所以

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$$

这个性质表明:象原函数乘以指数函数 e^{at} 的拉氏变换等于其象函数 $F(s)$ 作平移 a,因此(1—3)式叫做**第一平移性质**.

(2) 根据(1—1)式,有

$$\mathscr{L}[f(t-a)]=\int_0^{+\infty}f(t-a)\cdot e^{-st}\,dt$$

$$=\int_0^{a}f(t-a)\cdot e^{-st}\,dt+\int_a^{+\infty}(t-a)\cdot e^{-st}\,dt$$

由拉氏变换定义的条件,当 $t<a$ 时 $f(t-a)=0$,所以上式右端第一个积分为零,对于第二个积分,令 $t-a=u$,则

$$\mathscr{L}[f(t-a)]=\int_0^{+\infty}f(u)\cdot e^{-s(u+a)}\,du$$

$$=e^{-as}\int_0^{+\infty}f(u)\cdot e^{-su}\,du$$

$$=e^{-as}F(s)$$

函数 $f(t-a)$ 与 $f(t)$ 相比,$f(t)$ 是从 $t=0$ 开始有非零数值,而 $f(t-a)$ 是从 $t=a$ 开始才有非零数值,即时间滞后了 a. 从它们的图像来讲 $f(t-a)$ 的图像是由 $f(t)$ 的图像沿 t 轴向右平移 a 个单位而得到. 如图 1.1 所示. 因此(1—4)式叫做**第二平移性质**,也叫**延滞性质**. 这个性质表明,时间函数 $f(t)$ 延迟时间 a 的拉氏变换等于它的象函数 $F(s)$ 乘以指数函数因子 e^{-as}.

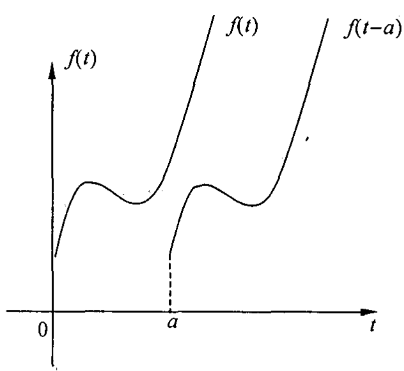

图 1.1

同样,有:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t) \quad (a \text{ 是常数}) \tag{1-3$'$}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t-a) \quad (a \geqslant 0) \tag{1-4$'$}$$

例 5 求 $\mathscr{L}[e^{-at}\sin\omega t]$

解 利用公式(1-3)及例 3 的结果,得

$$\mathscr{L}[e^{-at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

例 6 求函数 $u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 & t \geqslant \tau \end{cases}$ 的拉氏变换.

解 利用公式(1-4)及例 1 的结果,得 $\mathscr{L}[u(t-\tau)] = \frac{1}{s}e^{-\tau s}$

例 7 求如图 1.2 所示的阶梯函数 $f(t)$ 的拉氏变换.

解 利用单位阶梯函数,可将这个阶梯函数表示为

$$f(t) = A[u(t) + u(t-\tau) + u(t-2\tau) + \cdots]$$

上式两端取拉氏变换,并根据拉氏变换的线性性质及平移性质.得

$$\mathscr{L}[f(t)] = A(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-\tau s} + \frac{1}{s}e^{-2\tau s} + \cdots)$$

$$= \frac{A}{s}(1 + e^{-\tau s} + e^{-2\tau s} + \cdots)$$

当 $s > 0$ 时,有 $|e^{-\tau s}| < 1$,所以,上式右端的等比数列收敛,其和为 $\frac{1}{1-e^{-\tau s}}$,从而

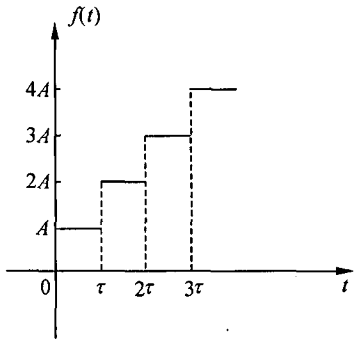

图 1.2

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-\tau s}} \quad s > 0$$

更一般地有,若

$$f(t) = \begin{cases} C_1 & 0 \leqslant t < a_1 \\ C_2 & a_1 \leqslant t < a_2 \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \\ C_n & a_{n-1} \leqslant t \end{cases}$$

其中 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$, c_i 为常数($i = 1,2,3,\cdots,n$),则 $f(t)$ 可用单位阶梯函数表示成

$$f(t) = C_1u(t) + (C_2 - C_1)u(t-a_1) + (C_3 - C_2)u(t-a_2) + \cdots + (C_n - C_{n-1})u(t-a_{n-1})$$

从而,它的拉氏变换可以根据拉氏变换的线性性质和平移性质很容易求出.

3. 微分性质

若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$,则有

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \tag{1-5}$$

证明 由拉氏变换的定义及分部积分法,得

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st} df(t)$$
$$= [f(t)e^{-st}]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$
$$= 0 - f(0) + s\mathscr{L}[f(t)]$$
$$= sF(s) - f(0)$$

即一个函数求导后取拉氏变换等于这个函数的拉氏变换乘以参数 s,再减去函数的初值.

应用上述结果,在适当条件下,可以推出

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f''(t)] &= s\mathscr{L}[f'(t)] - f'(0)\\ &= s\{s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)\} - f'(0)\\ &= s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)\\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

同理

$$\mathscr{L}[f'''(t)] = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

以此类推

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad (1-6)$$

由此可以看出,$f(t)$ 各阶导数的拉氏变换可以由 s 的乘方与象函数 $F(s)$ 的代数式表示出来;特别是当初值 $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ 时,有更简单的结果

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) \quad (n = 1,2,\cdots)$$

例 8 利用微分性质求 $\mathscr{L}[\cos\omega t]$

解 令 $f(t) = \cos\omega t$,则

$$f'(t) = -\omega\sin\omega t$$
$$f''(t) = -\omega^2\sin\omega t$$

且 $f(0) = 1, f'(0) = 0$ 由(1-5)式,得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f''(t)] &= \mathscr{L}[-\omega^2\cos\omega t]\\ &= s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)\\ &= s^2\mathscr{L}[\cos\omega t] - s\end{aligned}$$

即
$$\mathscr{L}[-\omega^2\cos\omega t] = s^2\mathscr{L}[\cos\omega t] - s$$

移项化简,得

$$\mathscr{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

4. 积分性质

若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$,则

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \qquad (1-7)$$

即一个函数积分后再取拉氏变换,等于这个函数的拉氏变换除以参数 s.

从拉氏变换的微分、积分性质可以看出,经过拉氏变换后,象原函数领域的微积分运算转化成了象函数领域里的乘除运算.

例 9 利用积分性质求 $f(t) = t^n$(n 为正整数) 的拉氏变换.

解 因为

$$t^n = n\int_0^t t^{n-1}\mathrm{d}t$$

所以

$$\mathscr{L}[t^n] = n\mathscr{L}\left[\int_0^t t^{n-1}\mathrm{d}t\right] = \frac{n}{s}\mathscr{L}[t^{n-1}]$$

从而有递推公式

$$\mathscr{L}[t^n] = \frac{n}{s}\mathscr{L}[t^{n-1}]$$

于是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[t^n] &= \frac{n}{s}\mathscr{L}[t^{n-1}]\\ &= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\mathscr{L}[t^{n-2}]\\ &= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdot\mathscr{L}[t^{n-3}]\\ &= \cdots\cdots\\ &= \frac{n!}{s^n}\mathscr{L}[t^0]\\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}\quad (s>0)\end{aligned}$$

例 10 求下列函数的拉氏变换：

(1) $f(t) = (t-1)^2$； (2) $f(t) = \sin t\cos t$；

(3) $f(t) = \begin{cases}0 & 0\leqslant t<2\\ 1 & 2\leqslant t<4\\ 0 & t\geqslant 4\end{cases}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)] &= \mathscr{L}[t^2-2t+1]\\ &= \mathscr{L}[t^2]-2\mathscr{L}[t]+\mathscr{L}[1]\\ &= \frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\\ &= \frac{1}{s^3}(s^2-2s+2)\end{aligned}$$

(2) 因为 $\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$，所以

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\sin t\cos t] &= \frac{1}{2}\mathscr{L}[\sin 2t]\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2} = \frac{1}{s^2+4}\end{aligned}$$

(3) **解法 1** 根据拉氏变换的定义，得：

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^2 0\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_0^4 \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_4^{+\infty} 0\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{s}(e^{-2s} - e^{-4s})$$

解法 2　利用单位阶梯函数可将 $f(t)$ 表示为：

$$f(t) = u(t-2) - u(t-4)$$

于是：

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[u(t-2)] - \mathscr{L}[u(t-4)]$$

$$= \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

$$= \frac{1}{s}(e^{-2s} - e^{-4s})$$

表 1.1　拉氏变换性质表

设 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$，则有
1. $\mathscr{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1\mathscr{L}[f_1(t)] + a_2\mathscr{L}[f_2(t)]$
2. $\mathscr{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$　(a 是常数)
3. $\mathscr{L}[f(t-a)] = e^{-as}F(s)$　($a \geqslant 0$)
4. $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$
5. $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
6. $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s}F(s)$
7. $\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$　($s > 0$)
8. $\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
9. $\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$　($n = 1,2\cdots$)
10. $\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(s)\mathrm{d}s$
11. 如果 $f(t)$ 的周期 $T > 0$，即 $f(t+T) = f(t)$，则 $\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$

习题 1－1

1. 利用定义求下列各函数的拉氏变换：

(1) $f(t) = t$；　　　(2) $f(t) = \cos\omega t$；

(3) $f(t) = \begin{cases} E & 0 \leqslant t < t_0 \\ 0 & t_0 \leqslant t \end{cases}$　(t_0 为常数).

2. 证明：若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$，则当 $a > 0$ 时，有

$$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

3. 求下列各函数的拉氏变换：

(1) $5e^{-3t}$；

(2) t^3+6t^2-3；

(3) $5\cos 2t-3\sin 2t$；

(4) $\sin 2t\cos 2t$；

(5) $\sin(2t-\frac{\pi}{4})$；

(6) $8\cos^2 3t$；

(7) $1+t^2e^{-2t}$；

(8) $\sin 5t\cos 3t$；

(9) $e^{3t}\sin 4t$；

(10) $\sin^3 t$；

(11) $2u(t-1)+3u(t-2)$；

(12) $f(t)=\begin{cases}3 & 0\leqslant t<2\\ -1 & 2\leqslant t<4\\ 0 & 4\leqslant t\end{cases}$.

4. 利用微分性质求下列各函数的拉氏变换：

(1) $f(t)=2e^{3t}$；

(2) $f(t)=\sin\omega t$.

5. 利用拉氏变换性质表中的性质 9，求下列各函数的拉氏变换

(1) $\mathscr{L}[t\sin at]$；

(2) $\mathscr{L}[te^t\sin t]$；

(3) $\mathscr{L}[t^2\cos 2t]$.

§1.2 拉氏逆变换的求法

上一节我们主要讨论了由已知函数 $f(t)$ 求它的象函数 $F(s)$，但在实际应用中常会碰到与此相反的问题，即已知象函数 $F(s)$ 求它的象原函数 $f(t)$，这就是拉氏逆变换的问题.

1.2.1 常用函数的拉氏变换表

下面把一些常用函数的拉氏变换编制成对照表，供运算时查用.

表 1.2 常用函数的拉氏变换表

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n\quad(n=1,2,\cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
7	$t\cdot e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
8	$t^ne^{at}\quad(n=1,2\cdots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
9	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
10	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
11	$\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$
12	$\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
13	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
14	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
15	$\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
16	$\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
17	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$
18	$\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
19	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
20	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$

1. 单位脉冲函数$\delta(t)$

在许多实际问题中,常会遇到具有冲击性质的量. 例如,在电学中,要研究线性电路中受其脉冲电动势作用后所产生的电流;在力学中,要研究机械系统受冲击力作用后的运动情况等等. 研究此类问题就会产生我们要介绍的脉冲函数.

在原来电流为零的电路中,某一瞬时(设为 $t=0$) 进入一单位电量的脉冲,现在要确定电路上的电流 $i(t)$,以 $q(t)$ 表示上述电路中的电量,则

$$q(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$$

由于电流强度是电量对时间的变化率,即

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$$

所以,当 $t\neq 0$ 时,$i(t)=0$;当 $t=0$ 时

$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)=\infty$$

上式说明,在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够用来表示上述电路中的电流强度. 为此,必须引进一个新的函数.

定义　设

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon} & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\\ 0 & t>\varepsilon\end{cases}$$

当 ε 变化时，函数 $\delta_\varepsilon(t)$ 为一函数序列，而 $\varepsilon\to 0$ 时的极限，即

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)$$

称为**单位脉冲函数或狄拉克函数**，简记为 $\delta-$ 函数.

$\delta-$ 函数是一个广义函数，它没有通常意义下的“函数值”，所以，它不能用通常意义下的“值对应关系”来定义. $\delta_\varepsilon(t)$ 的图形如图 1.3 所示. 显然，对于任何 $\varepsilon>0$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}t=1$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t=1$$

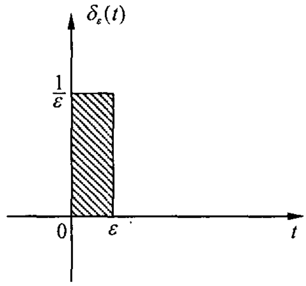

图 1.3

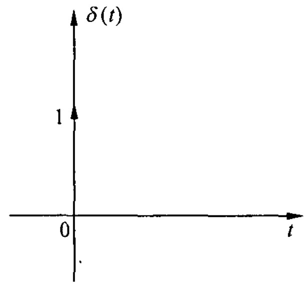

图 1.4

在工程中常将 $\delta-$ 函数用一个长度为 1 的有向线段来表示如图 1.4，该线段的长度表示 $\delta-$ 函数的积分，称为它的**脉冲强度**.

由拉氏变换的定义，$\delta(t)$ 的拉氏变换为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\delta(t)]&=\int_0^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\varepsilon}(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon})\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}(\lim_{\varepsilon\to 0}0)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon})\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]_0^{\varepsilon}\\&=\frac{1}{s}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-s\varepsilon}}{\varepsilon}\\&=\frac{1}{s}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1-\mathrm{e}^{-s\varepsilon})'}{(\varepsilon)'}\quad\text{(利用罗比达法则)}\\&=\frac{1}{s}\lim_{\varepsilon\to 0}s\mathrm{e}^{-s\varepsilon}=1\end{aligned}$$

即

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$$

1.2.2 拉氏逆变换的求法

1. 基本拉氏逆变换的求法

对于一些简单的象函数，直接查表 1.2 便可得到其象原函数.

例 1 求下列象函数的逆变换.

(1) $F(s) = \dfrac{1}{s+2}$； (2) $F(s) = \dfrac{1}{(s-3)^3}$；

(3) $F(s) = \dfrac{5-2s}{s^2}$； (4) $F(s) = \dfrac{4s-3}{s^2+4}$.

解 (1) 由表 1.2 的变换 5 知

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = \mathrm{e}^{-2t}$$

(2) 由表 1.2 的变换 8 及(8－2)′式，得

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^3}\right] = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2!}{(s-3)^3}\right] = \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{3t}$$

(3) 由表 1.2 的变换 2、3 及(1－2)′式，得

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5-2s}{s^2}\right] = 5\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$
$$= 5t - 2u(t)$$

(4) 由表 1.2 的变换 9、10 及(1－2)′式，得

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4s-3}{s^2+4}\right] = 4\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] - \frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]$$
$$= 4\cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t$$

例 2 求 $F(s) = \dfrac{3s-4}{s^2-4s+5}$ 的逆变换.

解

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3s-4}{s^2-4s+5}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3(s-2)+2}{(s-2)^2+1}\right]$$
$$= 3\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+1}\right] + 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+1}\right]$$
$$= 3\mathrm{e}^{2t}\cos t + 2\mathrm{e}^{2t}\sin t \quad \text{(表 1.2 的变换 15、16)}$$
$$= \mathrm{e}^{2t}(3\cos t + 2\sin t)$$

例 3 求 $F(s) = \dfrac{2s-5}{s^2-5s+6}$ 的逆变换.

解

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s-5}{s^2-5s+6}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)+(s-3)}{(s-2)(s-3)}\right]$$
$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-2}\right]$$
$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$= e^{3t} + e^{2t} \quad (\text{表 1.2 的变换 5})$$

从以上例子可以看出，如果象函数较复杂，不能从表中直接查找到，可先把象函数分解成若干项简单的象函数之和. 然后利用拉氏逆变换的性质，并逐项查拉氏变换表求出象原函数. 因此，分解象函数这一步很重要，下面介绍用部分分式法来分解象函数.

2. 用部分分式法解象原函数

在大多数实际问题中，象函数往往是一有理真分式，即分子和分母均为多项式，且分子的次数小于分母.

所谓部分分式法就是把一个有理真分式分解为若干项最简分式之和的方法. 下面举例说明分解的具体方法步骤.

例 4 求 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$ 的逆变换.

解 先把 $F(s)$ 分解为两个最简分式之和

$$\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

其中 A、B 是待定的系数，上式两端都乘以 $(s+1)(P+2)$，得

$$s+3=A(s+2)+B(s+1)$$

整理得

$$s+3=(A+B)s+2A+2B$$

比较两端系数，得

$$\begin{cases}A+B=1\\2A+2B=3\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$$

所以

$$F(s)=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

于是

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right]\\&=2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]\\&=2e^{-t}-e^{-2t}\end{aligned}$$

例 5 求 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^3+4s^2+4s}$ 的逆变换.

解 先把 $F(s)$ 分解为

$$\frac{s+3}{s^3+4s^2+4s}=\frac{s+3}{s(s+2)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2}$$

其中 A、B、C 是待定的系数(注意，因为 $s+2$ 是二重因子，所以要分解成一次和二次两项；如果三重因子，就要分成一次、二次、三次三项，以此类推)，由上式得