西安交大 考研

2009版

龚冬保教授数学考研

数学考研

考点精讲 方法精练

数学二

主编 龚冬保

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

(2009版)

数学考研

考点精讲方法精练

（数学二）

主编 龚冬保

编著 （高等数学）龚冬保 王寿生 褚维盘
（线性代数）崔荣泉
（概率统计）周家良

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书是专门针对考研复习编写的教材，内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点，本书建立了与普通教材不同的体系；针对考研的特点，突出基本功和综合运用、应试能力的训练，对于数学知识，着重于分析问题和解决问题的能力，全面而有重点地覆盖了所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材，也可用于考生自学，同时也可供就读本科的各专业的大学生参考。

作者在网上为本书读者免费答疑，具体方法请登录 kaoyan. xjtupress. com

图书在版编目(CIP)数据

数学考研考点精讲方法精练. 数学. 2/龚冬保主编；王寿生等编. —西安：西安交通大学出版社，2008. 3

ISBN 978-7-5605-2170-1

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①龚… ②王… Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021810 号

书　　名　数学考研考点精讲方法精练(数学二)

主　　编　龚冬保

责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社

(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)

网　　址　http://www. xjtupress. com

电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)

(029)82668315　82669096(总编办)

传　　真　(029)82668280

印　　刷　西安新视点印务有限责任公司

开　　本　787mm×1 092mm　1/16　印张 16. 25　字数 496 千字

版次印次　2008 年 3 月第 1 版　2008 年 3 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5605-2170-1/O・232

定　　价　28. 80 元

读者购书、书店添货如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。

订购热线：(029)82665248　(029)82665249

投稿热线：(029)82664954

读者信箱：jdlgy31@126. com

2009 版前言

每年我们都要将本书与当年的考研试卷对比，无论是考点，还是解题方法，极其类似的题都不少．尤其我们书上介绍的一些特殊的方法，在解考研题时，效果更为显著，如用泰勒公式求极限的方法，解 2008 试卷中两道极限题，就非常简便．

例 1（数学一、二）．求 $I_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$．

解 由泰勒公式：$\sin(\sin x)=\sin x-\dfrac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)$，和等价无穷小 $x\sim\sin x(x\to 0)$，可得

$$I_1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x-o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

例 2（数学三、四）．求 $I_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$．

解 $x\to 0$ 时 $\ln\dfrac{\sin x}{x}\sim\dfrac{\sin x-x}{x}$．

及由泰勒公式：$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$

故 $I_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$．

又如 2008 四份考卷共用的线性代数题，用我们书中介绍的方法解，也很简单．

例 3（数学一、二、三、四）设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a\end{bmatrix}$$

(1) 求证 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

(2) 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解时，求解 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{B}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$；

(3) 何时方程组有无穷多解？并求通解．

解 (1) 记 $|\boldsymbol{A}|=D_n$．按第一行展开得 $D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$．

而 $n=2$ 时 $D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$．$n=3$ 时 $D_3=\begin{vmatrix}2a & 1 & 0\\ a^2 & 2a & 1\\ 0 & a^2 & 2a\end{vmatrix}=4a^3$．

由数学归纳法及上面递推公式即可证得 $D_n=|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$．

(2) $a\neq 0$ 有唯一解．用克莱姆法则得

$$x_1=\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{D_{n-1}}{D_n}=\frac{n}{(n+1)a}\quad,\quad x_2=-a^2\frac{D_{n-2}}{D_n}=-\frac{n-1}{n+1}.$$

当 $k\geqslant3$ 时，方程是 $a^2x_{k-2}+2ax_{k-1}+x_k=0$ 故

$x_k=-a(2x_{k-1}+ax_{k-2})$. 由归纳法得 $x_k=\frac{n-k+1}{n+1}(-1)^{k-1}a^{k-2}$，所求解是

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{a},-n-1,(n-2)a,\cdots,(-1)^{n-1}a^{n-2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

(3) 当 $a=0$ 时，方程组化为：$\begin{cases}x_2=1\\x_3=x_4=\cdots=x_n=0\end{cases}$

故所求通解为 $\boldsymbol{X}=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

细心的读者可以发现，几乎每道试题的解题方法在我们书上都有.

由于本书紧扣考试大纲，并注意分析了历年考试真题，因此在考点上，覆盖面全，其中2008年所考到的微积分基本定理及周期函数的积分性质的题，在我们书上均有详细的证明. 所以，本书是针对性很强的辅导考研的自学课本.

自2005年起，我们在网上义务答疑，为考研学子释疑解难，受到了读者的欢迎. 今年我们一如既往，继续在网上为同学们解答在使用我们所编辅导时遇到的问题.

本书自出版以来，受到广大读者关爱，使编者在每年考研之后，能与不少读者分享成功的喜悦，感到莫大的欣慰，在此表示由衷地感谢！

编　者

2008之春于西安交大

第 1 版前言

目前考研的数学辅导书很多，却没有一本专门指导考研复习使用的教材，广大考生很希望有这样的教材。为此，我们尝试编写了本教材，以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的《数学考试大纲》，全面系统地、有重点地、高效率地复习数学知识，取得好成绩。

复习是重复学习，不是重新学习。考研教材应与普通教材不同。首先，普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写，而考研教材不必受此拘束，可以从读者最熟悉的内容入手。比如高等数学部分，本书采取从微分法开始，以微分带积分，以积分促微分，使微积分紧密结合，深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次，普通教材着重一个一个地讲解知识单元，而考研教材则侧重于内容间的联系。如本书线性代数部分将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三，创立了一种新的体系，在逻辑顺序上更加符合考生的认识层次，更加适合于高效的复习。如概率论部分，先讲离散型随机变量的有关概率问题，再讲连续型随机变量的问题，再讲它们间的联系。第四，本书针对考研主要是考核解题能力的特点，安排了大量的例题，采用一题多解，一题多变的方式，侧重讲解题的思路、方法和技巧，培养读者灵活的分析能力和解决数学问题的能力。第五，根据编者多年辅导考研数学的经验，本书严格按《数学考试大纲》，从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点，又突出了重点，从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法，又突出了主要方法，特别考虑到考研试题中 70%左右的是基本题，本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大，对一些难题讲述，则侧重讲一道难题的思路，以及它与基本内容的联系，如何作到熟能生巧等等。第六，作为一本复习教材，本书还考虑要便于考生自学，因此，在许多题后附了不少注释，还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时，要一边看书一边自己动手推导，在读完一节后，最好将这一节书中的例题当作习题，自己独立做一遍，然后再作本章练习题，这样效果会更好。

本书既然是一本考研的复习教材，因此，书中对一些估计考生很熟悉的内容，一些定理的证明、公式的推导等略去不讲，如果想要知道相关的内容，可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎，更希望广大读者多提意见和建议，以使本书能改得更好，成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2006.3 修改于西安

目　录

第1章　一元函数微积分(一)

1.1　微积分的基本方法

本书为何从微、积分法开始，而不从函数、极限开始？这正是本书的特点. 我们认为，“复习”应当从你最熟悉、最容易提起回忆的内容入手，而不是从头再学一遍，这样效率会更高、效果会更好.

1.1.1　微积分的基本公式

定义 1.1　在某个区间 I 上，若 $F'(x)=f(x)$，便称函数 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数，而称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的不定积分(C 是任意常数).

不定积分记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

从运算的角度讲，不定积分是微分的逆运算. 因此，微积分运算的基础在于微分法. 利用熟悉的微分，来做不太熟悉的积分，是复习微积分运算基本功的好方法.

例 1.1　求 $\int \sin 3x\mathrm{d}x$.

解　这样想：$\cos 3x$ 求导能得到 $\sin 3x$，于是求导：$(\cos 3x)'=-3\sin 3x$，从而得 $\int \sin 3x\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

这就是我们说的用微分做积分题的方法，非但快，还不会出错，因为我们已经用求导验证了所得到的结果. 下一个例题更能看出将微积分联系起来的好处.

例 1.2　验证表 1.1 中的基本公式(13)′，即

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

解　做此题有一个巧妙方法

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \overset{①}{=} \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \overset{②}{=} \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{③}{=} \int \frac{\mathrm{d}(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \overset{④}{=} \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

这个方法是怎样得到的呢？原来它来自于求导的逆运算

$$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) \overset{④'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(x+\sqrt{x^2+a^2})' \overset{③'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$\overset{②'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\,\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} \overset{①'}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

上面求导的倒数第1步即等式 ①′ 与积分的第1步即等式 ① 倒过来看是一样的；同样 ②′ 与 ②、③′ 与 ③、④′ 与 ④ 是对应的. 即，将求导的流程倒过来做，便得出这个积分的方法.

通过微分方法做积分题，可以让我们取得复习微积分的主动权，可以自己编题，先做微分，再反过来从微分的结果做积分.

例 1.3　我们目的是练习分部积分法，因此，编出一个题：$x^2\mathrm{e}^{-x}$，求导得 $(x^2\mathrm{e}^{-x})'=(2x-x^2)\mathrm{e}^{-x}$；再求积分：

$$\int(2x-x^2)e^{-x}dx=-(2x-x^2)e^{-x}+2\int(1-x)e^{-x}dx=x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2(1-x)e^{-x}-2\int e^{-x}dx$$
$$=x^2e^{-x}+C.$$

因为是自己编的题，先求导，再积分，既练了微分，又练了积分，不用课本也不用老师、自编、自导、自演练，何乐而不为呢！我们提倡这样的复习方法：抓住内容间的联系，把书读薄，这样能够提高复习效率，增强复习效果.

为了练习微积分基本功，先要熟悉基本公式和运算法则，而且还是将微分和积分相对照更好.（见表 1.1 和表 1.2）.

表 1.1　微积分基本公式对照表

基本导数公式	对应的不定积分公式
① $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	①′ $\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)$
② $(\ln\lvert x\rvert)'=\frac{1}{x}$	②′ $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$
③ $(a^x)'=a^x\ln a\quad(a>0,a\neq1)$	③′ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\quad(a>0,a\neq1)$
④ $(\sin x)'=\cos x$	④′ $\int\cos x dx=\sin x+C$
⑤ $(\cos x)'=-\sin x$	⑤′ $\int\sin x dx=-\cos x+C$
⑥ $(\tan x)'=\sec^2 x$	⑥′ $\int\sec^2 x dx=\tan x+C$
⑦ $(\cot x)'=-\csc^2 x$	⑦′ $\int\csc^2 x dx=-\cot x+C$
⑧ $(\arcsin\frac{x}{a})'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$	⑧′ $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$
⑨ $(\arctan\frac{x}{a})'=\frac{a}{a^2+x^2}\quad(a>0)$	⑨′ $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$
⑩ $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$	⑩′ $\int\mathrm{ch}x dx=\mathrm{sh}x+C$
⑪ $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$	⑪′ $\int\mathrm{sh}x dx=\mathrm{ch}x+C$
⑫ $(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	⑫′ $\int\frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}=\mathrm{th}x+C$
⑬ $(\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert)'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\quad(a>0)$	⑬′ $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert+C\quad(a>0)$
⑭ $(\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert)'=\frac{2a}{a^2-x^2}\quad(a>0)$	⑭′ $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert+C\quad(a>0)$

对此表中 14 对公式，务必要记牢；以导数公式为基础，做到倒背如流.

由于紧扣微积分的联系，考虑到读者对微分熟悉，对积分较生疏，因此，我们以下主要先讲四种基本积分方法，读者应养成用微分检验积分结果的习惯.

表 1.2　微积分基本运算法则对照表

微分法(设 $F'(x)=f(x), G'(x)=g(x)$)	积分法
① 和的微分 $d[F(x)+G(x)]=f(x)dx+g(x)dx$	①′ 分项积分法 $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
② 复合微分法 $dF(u(x))=f(u)du=f(u(x))u'(x)dx$	②′ 第一类换元积分法 $\int f(u(x))u'(x)dx=\int f(u)du$
③ 复合微分法 $dF(x(t))=f(x)dx=f(x)\dot{x}(t)dt$	③′ 第二类换元积分法 $\int f(x)dx=\int f(x(t))\dot{x}(t)dt$
④ 乘积微分法 $d(uv)=udv+vdu$	④′ 分部积分法 $\int udv=uv-\int vdu$

1.1.2　分项积分法

例 1.4　$\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.$

例 1.5　$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx=x-\arctan x+C.$

例 1.6　$\int\tan^2 xdx=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C.$

1.1.3　第一类换元积分法(凑微分的积分法)

例 1.7　计算$\int\sin 2xdx$.

解 1　原式$=\frac{1}{2}\int\sin 2xd(2x)=\frac{-1}{2}\cos 2x+C.$

注　*这里，实际上是令 $2x=u$，但当对这样简单的复合求导逆运算熟悉时，不必写出新的积分元 u，大多数的第一类换元积分法都可以不写出 u，而是将被积表达式凑成微分形式，即如 $\sin 2xdx=d(-\frac{1}{2}\cos 2x)$，故也称凑微分法.*

解 2　原式$=2\int\sin x\cos xdx=2\int\sin xd(\sin x)=\int d\sin^2 x=\sin^2 x+C.$

解 3　原式$=2\int\cos x\sin xdx=-2\int\cos xd(\cos x)=-\cos^2 x+C.$

复合求导是最重要的微分法则，因此，**凑微分法是积分的最重要的方法**.

例 1.8　求$\int\frac{dx}{\cos x}$.

解 1　$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}dx=\int\frac{d(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}=\boxed{\ln|\tan x+\sec x|+C}$

解 2　$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\boxed{\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+C}$

解 3　$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\boxed{\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C}$

解 4 $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}=\int\frac{d(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}=\int\frac{\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}d(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$

$$=\boxed{\ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right|+C}$$

以上 4 个方框的结果都是计算$\int\frac{dx}{\cos x}$的公式,读者可用微分还原.

例 1.9 求$\int\frac{dx}{1+e^x}$.

解 1 $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{(1+e^x-e^x)dx}{1+e^x}=x-\ln(1+e^x)+C$

解 2 $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)}=\int(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x})e^x dx=x-\ln(1+e^x)+C$

解 3 $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=-\ln(1+e^{-x})+C$

1.1.4 第二类换元积分法

这一类是地道的换元法,第一类换元是凑微分,可以不作"换元",第二类是假设被积函数 $f(x)$ 的原函数不易看出,而令 $x=x(t)$. 这样

$\int f(x)dx=\int f(x(t))\dot{x}(t)dt$,使 $F(t)=f(x(t))\dot{x}(t)$ 比较简单. 通常,**这类换元一个最重要思路是有理化被积表达式.**

例 1.10 求$\int x\sqrt{1-2x}dx$.

解 令 $1-2x=t^2$. 则 $x=\frac{1}{2}(1-t^2)$,$dx=-tdt$.

$$原式=\frac{1}{2}\int(t^2-1)t^2dt=\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{6}t^3+C=\frac{1}{30}[3(1-2x)^{5/2}-5(1-2x)^{3/2}]+C$$

例 1.11 求$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

解 1 令 $x=a\sin t$,则 $dx=a\cos t dt$.

$$原式=a^2\int\cos^2 t dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C(可以当成基本公式).$$

解 2 (分部积分法).

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-I+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(移项,解出 I)$$

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

解 3 (主要也是分部积分法).

$$I=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-I\quad(移项)$$

故
$$I=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例 1.12 求$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

解 1 （第一类换元）.

$$原式 = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

解 2 原式$=-2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}}=-2\arcsin\sqrt{1-x}+C=2\arccos\sqrt{1-x}+C.$

注 遇到函数，首先要想到定义域. 本题被积函数的定义域是(0,1)，故我们只是在(0,1)内求它的原函数.

解 3 （直接用公式）.

$$原式 = \int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin(2x-1)+C.$$

解 4（换元积分法） 令 $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t$

$$原式 = \int \mathrm{d}t = t+C = \arcsin(2x-1)+C.$$

解 5 由 $0<x<1$ 知，可令 $x=\sin^2 t, 1-x=\cos^2 t, \mathrm{d}x=2\sin t\cos t\mathrm{d}t.$

$$原式 = 2\int \mathrm{d}t = 2t+C = 2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

解 6（有理化变换）考虑被积函数.

由
$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}},$$

令 $\frac{x}{1-x}=t^2$， 则 $x=\frac{t^2}{1+t^2}, \mathrm{d}x=\frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$

$$原式 = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\arctan t+C = 2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$$

1.1.5 分部积分法

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

将被积函数是 $u(x)v'(x)$ 的积分，化为 $v(x)u'(x)$ 的积分. 要求表达式 $v(x)u'(x)$ 不比 $u(x)v'(x)$ 更复杂.

例 1.13 求 $\int \ln x\mathrm{d}x.$

解 原式 $= x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$

例 1.14 求 $\int x^2 \arcsin x\mathrm{d}x.$

解
$$\begin{aligned}原式 &= \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{6}\int \frac{x^2\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{6}\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2) - \frac{1}{6}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2) \\ &= \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.\end{aligned}$$

例 1.15 求 $\int x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$

解 1 原式$=x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C.$

解 2 （待定系数法）. 设 $(x^2+bx+c)\mathrm{e}^x$ 是要求的一个原函数.

则 $[(x^2+bx+c)\mathrm{e}^x]' = [x^2+(b+2)x+(b+c)]\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x.$

故　$b=-2, c=-b=2$. 即　$\int x^2 e^x dx=(x^2-2x+2)e^x+C$.

以上分部积分法的作用(第一个作用)可以称作是**依次化简被积函数直至求出原函数**. 分部积分的第二个作用是产生**递推公式**.

例 1.16　求$\int \sin^4 x dx$.

解　记$\int \sin^n x dx=I_n$

$$I_4=-\sin^3 x\cos x+3\int \sin^2 x\cos^2 x dx$$

$$=-\sin^3 x\cos x+3\int \sin^2 x dx-3\int \sin^4 x dx \quad (\text{将 } 3I_4 \text{ 移到等号左边}).$$

$$I_4=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{4}I_2.$$

$$I_2=\int \sin^2 x dx=-\sin x\cos x+\int dx-I_2 \quad (\text{将 } I_2 \text{ 移到等号左边}).$$

$$I_2=-\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}I_0=-\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}x+C$$

从而
$$I_4=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{4}x+C.$$

读者可以推导一般的　$I_n=\int \sin^n x dx$ 和 $I_n=\int \cos^n x dx$ 的递推公式.

例 1.17　求 $I_2=\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

解　我们采用**倒推的方法**. 由

$$I_1=\int \frac{dx}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}+2\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}=\frac{x}{1+x^2}+2I_1-2I_2.$$

故　$I_2=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}I_1=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$

分部积分的第三个主要作用是产生**循环公式**而得出积分结果.

例 1.18　求 $I=\int e^x\cos x dx$.

解　$I=e^x\cos x+\int e^x\sin x dx=e^x\cos x+e^x\sin x-I$ (将 I 移到等号左边)

$$I=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C.$$

例 1.19　求 $I=\int \sqrt{a^2+x^2}dx \quad (a>0)$.

解 1　$I=x\sqrt{a^2+x^2}-\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=x\sqrt{a^2+x^2}-I+a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ (移项)

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

解 2　$I=\int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+x\sqrt{a^2+x^2}-I$ (移项)

$I=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C$ (此结果也可当公式用).

与微分四则运算及复合求导对照的积分法主要就是四种:① **分项积分法**;② **凑微分法**;③ **换元法**;④ **分部积分法**.

有理函数的积分主要是用**分项积分**. 其关键是化一个分式为部分分式,而化一个分式为部分分式的关键

是将分母分解因式.三角有理函数从理论上讲用万能变换:即设 $\tan\frac{x}{2}=t$,可将三角有理函数化为有理函数的积分.但一般做题用万能变换往往十分麻烦,要利用三角函数间的关系灵活去做题,也往往要综合运用以上四种基本的积分方法.

例 1.20 求 $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$.

解 本题中 $\frac{x+5}{x^2-6x+13}$ 已是部分分式了,请注意以下分部积分技巧:

由 $(x^2-6x+13)'=2x-6$,化 $x+5=\frac{1}{2}(2x-6)+8$.于是

原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+\int\frac{8}{(x-3)^2+4}\mathrm{d}(x-3)=\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+13|+4\arctan\frac{x-3}{2}+C.$

例 1.21(2000,二)① 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$,求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\mathrm{e}^t$,得 $f(t)=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$,则 $f(x)=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$.

原式 $=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$

例 1.22(2000,四) 求 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 1 原式 $=2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$

解 2 令 $x=\sin^2 t$.则

原式 $=2\int t\cos t\mathrm{d}t=2t\sin t-2\int\sin t\mathrm{d}t=2t\sin t+2\cos t+C=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$

例 1.23(2001,一) 求 $\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

解 1 原式 $=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$

$=-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x)+C.$

解 2 令 $\mathrm{e}^x=\tan t$.则 $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\tan t$.

原式 $=\int\frac{t}{\tan^3 t}\mathrm{d}\tan t=-\frac{1}{2}\frac{t}{\tan^2 t}+\frac{1}{2}\int\cot^2 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tan^2 t}-\int\csc^2 t\mathrm{d}t+\int\mathrm{d}t)$

$=-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tan^2 t}+\cot t+t+C)=-\frac{1}{2}(\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x+C).$

例 1.24(2001,二) 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 令 $x=\tan t$.则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$.

原式 $=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t}=\arctan\sin t+C=\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

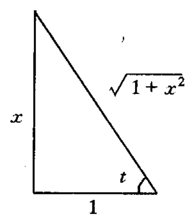

图 1.1

注 以上我们用到由 $x=\tan t$,得 $\sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 可用画小直角三角形(见图 1.1)方法求得.这种方法方便.

例 1.21 ~ 例 1.24 的 4 道例题对我们有如下启发:**不定积分题在考研试题中常**

① (2000,二)表示 2000 年数学二的试题.下同.

常出现，但没有很难的题.

例 1.25 计算 $I=\int \cos^m x\cos(m+2)x\mathrm{d}x$.

解 $I=\int \cos^m x[\cos(m+1)x\cos x-\sin(m+1)x\sin x]\mathrm{d}x$

$$=\int \cos^{m+1}x\cos(m+1)x\mathrm{d}x+\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin(m+1)x-\int \cos^{m+1}x\cos(m+1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin(m+1)x+C.$$

注 本题关键是将 $\cos(m+2)x=\cos[(m+1)x+x]$ 展开，再分部积分. 这个技巧来源于对函数 $f(x)=\cos^n x\sin nx$ 求导的逆运算，并令 $n=m+1$ 的计算，读者不妨一试.

1.1.6 定积分与微分的联系

1.1.6.1 定积分的概念与性质

定义 1.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义. 经以下三步：

(1) 分割 对区间 $[a,b]$ 进行任意分割：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 记 $\Delta_k=[x_{k-1},x_k]$，以 Δx_k 表示此区间长即 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$.

(2) 求和 在每个 Δ_k 上任意取一点 ξ_k，作 $f(\xi_k)\Delta x_k(k=1,2,\cdots,n)$，及取和

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k}$$

(3) 取极限 记 $\lambda=\max\limits_{k=1,2,\cdots,n}\Delta x_k$， $\boxed{I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k}$

若这个和式极限存在，且与分割、取点无关，就称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分. 记为 $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k}$

由定义可见，定积分与不定积分截然不同，**定积分作为一种和式的极限是独立于导数和微分的；而不定积分作为导数和微分的逆运算，则完全要依赖导数和微分.**

注意 定积分中的极限既不单纯是函数的极限，更不是数列的极限，加上定义中"任意分割"、"任意取点"两个任意性，更使其显得"神秘". 好在高等数学并不去深究这一概念，只要正确理解它，并掌握其一些基本的性质.

可积的必要条件. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

因此，无界函数的广义积分，不可能用"和式极限"来定义.

可积的充分条件. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，或分段连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定积分的基本性质

1. 线性性

设 $f(x)$、$g(x)$ 皆可积，则其线性组合 $c_1f(x)+c_2g(x)$ 可积，且

$$\boxed{\int_a^b[c_1f(x)+c_2g(x)]\mathrm{d}x=c_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+c_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

2. 对区间的可加性

首先，定义 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

则对任意的 a、b、c，有

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x}$$

这里，不论 a、b、c 的大小顺序如何，只要 $f(x)$ 在上述相应的区间是可积的，以上式子便成立.

3. 估值性质

在 $[a,b]$ 区间上，若 $g(x) \leqslant f(x)$ 皆可积，则

$$\boxed{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

特别设 $m \leqslant f(x) \leqslant M$. 则有

$$\boxed{m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)}$$

4. 积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别表示 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小、最大值，由估值公式知

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

由连续函数的介值定理，得

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$\boxed{f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

这就是积分中值定理.

注 1 连续函数在区间的平均值及中值定理的实际意义.

我们知道，n 个数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的算术平均值为

$$\overline{f} = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n}$$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则可积. 将区间 $[a,b]$ n 等分，第 k 个分点为 $x_k = a + \frac{b-a}{n}k\ (k = 0,1,2,\cdots,n)$. 每个小区间长 $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$. 故 $\overline{f}_n = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$ 为 n 个离散数的平均值. 而 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n}$. 即 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\overline{f}_n$ 为平均值的极限.

定义 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值. 值得注意是，连续函数在某区间的平均值的概念，在一般教材中没讲到，但在考研中经常出现.

中值定理是说，在 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$，至少有一点 $\xi \in [a,b]$，使 $f(\xi)$ 取到其平均值. 因此，积分中值定理也可称为“平均值定理”，这就是它的实际意义.

注 2 用微分中值定理证明积分中值定理.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在原函数 $F'(x) = f(x)$. 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a). \quad \xi \in (a,b)$$

从这个证明可以看出微分中值定理与积分中值定理间的微妙关系. 且在积分中值定理中也可用 $\xi \in (a,b)$ 开区间.

1.1.6.2 变上限积分所确定的函数与牛顿-莱布尼茨公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则在任意 $[a,x]$ $(x \in [a,b])$ 上可积，从而 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $[a,b]$ 上的函数，即由变上限的积分所确定的函数. 可以证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界可积，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $f(x)$ 连续，则 $F(x)$ 可导，且 $F'(x) = f(x)$. 后者称为微积分基本定理.

微积分基本定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且