FOCUS 聚焦图书

文登数学系列

全国硕士研究生入学统一考试

2006

数学三

模拟考场15套

文登数学团队

陈文灯

黄先开

曹显兵

施明存

殷先军

技巧训练+全真模拟=高分的保证

紧扣大纲，名师汇编

题型汇萃，解析到位

世界图书出版公司

文登数学系列

全国硕士研究生入学统一考试

2006

数学三

模拟考场15套

文登数学团队

陈文灯
黄先开
曹显兵
施明存
殷先军

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

2006 版数学模拟考场. 3/陈文灯等编著. —北京:世界图书出版公司北京公司,2005.7

ISBN 7-5062-5553-7

Ⅰ.文… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 055436 号

数学三·模拟考场 15 套

编　　著:陈文灯　黄先开　曹显兵　施明存　殷先军

责任编辑:李根宾

装帧设计:郑子玥

出　　版:世界图书出版公司北京公司

发　　行:世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号　邮编:100010　电话:010－88861708)

销　　售:各地新华书店

印　　刷:北京忠信诚胶印厂

开　　本:787×1092 毫米　1/16

印　　张:15.375

字　　数:360 千字

版　　次:2005 年 7 月第 2 版　2005 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5553-7/H·499　　定价:16.80 元

服务热线:010－88861708

前　言

“得数学者得天下”，随着大家对数学重要性的理解逐步深入，考研数学也突显出信息量大、题量多、综合性强、难度大等特点。面对这种形势如何合理安排时间，发挥自己的潜能，高效地进行复习，是每个考研学子必须很好解决的问题。因此，我们建议同学们这样复习：

★ 牢记重要的概念、定理和公式。因为这样做可以使你应试时节省“追忆”、“推演”的时间，同时可使你少犯混淆定理、公式的错误。

★ 掌握一些题型的快速解法，提高解题速度。

★ 掌握重要的变量替换、辅助函数的作法技巧，重要题型的解题思路和方法。这可使你应试时很快找到解题的突破口和切入点。

“学而不思则罔，思而不学则怠”，本书旨在将《数学复习指南》中的理论概念转化为训练概念，进而转化为条理清晰的技巧训练与模拟演练概念。为此，我们通过对历年考研真题的深入研究和本人多年的辅导经验总结，精编了这15套难度与真题相当、技巧性较强、基本概念较丰富的多种题型的模拟训练试题。由于各种考研辅导书中选了大量的真题作为例题讲解，所以只有通过模拟试题的训练，才能更真实地检验自己的复习效果，真正起到查缺补漏的作用。

本书中每套试卷完全根据2006年全国硕士研究生入学统一考试样卷比例编写，对每套模拟试卷中的每道题给出了详尽的解析，包括**解题切入点提示、答案详解、知识点的链接及对解题技巧的评注**。

另外，对每套试卷，请读者严格掌握在3个小时内独立完成，然后再看答案解析中的解题过程。通过与答案对照，看看自己在哪些方面还存在不足，及时突破提高。

由于增添了新的思路、新的题型，难免有欠缺或错误的地方，请考研学子和数学同仁批评指正。

陈文灯　陈文灯印

2005年6月

目录

模拟考场（一）

考生注意:（1）本试卷共23大题,满分150分.

（2）根据国家标准,试卷中的正切函数,余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1) 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{(n+1)^b-n^b}=2006$,则常数 $a=$ ______, $b=$ ______.

(2) 设曲线 $x=\int_1^t \dfrac{\cos u}{u}du$, $y=\int_1^t \dfrac{\sin u}{u}du$,则自原点到此曲线右边第一条垂直于 x 轴的切线之间的弧长为______.

(3) 设 $y_1=e^x-e^{-x}\sin 2x$, $y_2=e^{-x}\cos 2x+e^x$ 是某二阶常系数非齐次线性方程的两个解,则该方程是______.

(4) 设三阶实对称矩阵 **A** 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. λ_1,λ_2 所对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,a,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(a,a+1,1)^T$,则 λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=$ ______.

(5) 已知(X,Y)的联合分布函数为 $F(x,y)$, $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别为关于X,Y的边缘分布函数,则用 $F(x,y)$, $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 表示概率 $\boldsymbol{P}\{X>x_0,Y>y_0\}$ 为______.

(6) 设随机变量 $X\sim N(0,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$,是取自总体X的简单随机样本,已知统计量

$$F=a\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{X_5+X_6+\cdots+X_{10}}$$

服从分布 $F(4,b)$,则 $a=$ ______, $b=$ ______.

得分	评卷人

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的单调增加的奇函数, $F(x)=\int_0^x(2t-x)f(x-t)dt$,则 $F(x)$ 是

(A) 单调增加的非奇非偶函数.　　(B) 单调减少的非奇非偶函数.

(C) 单调增加的奇函数.　　(D) 单调减少的奇函数.　　【　】

(8) 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$,则在下列条件中使 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的是

(A) $x_1<x_2$, $y_1<y_2$.　　(B) $x_1<x_2$, $y_1>y_2$.

(C) $x_1>x_2$, $y_1<y_2$.　　(D) $x_1>x_2$, $y_1>y_2$.　　【　】

(9) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则使 $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)dxdy = 4\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 成立的充分条件是

(A) $f(-x,-y) = f(x,y)$.

(B) $f(-x,-y) = -f(x,y)$.

(C) $f(-x,y) = f(x,-y) = -f(x,y)$.

(D) $f(-x,y) = f(x,-y) = f(x,y)$. 【 】

(10) 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内连续，在 $x = x_0$ 处可导，则函数 $f(x)|f(x)|$ 在 $x = x_0$ 处

(A) 可导，且导数为 $2f(x_0)f'(x_0)$. (B) 可导，且导数为 $2f(x_0)|f'(x_0)|$.

(C) 可导，且导数为 $2|f(x_0)|f'(x_0)$. (D) 不可导. 【 】

(11) 若 $\dfrac{x^2+ax+b}{(1+x)^2(1+x^2)}$ 的原函数 $f(x)$ 的表达式中不包含对数函数，则常数 a,b 的取值为

(A) $a=1$，b 任意. (B) a 任意，$b=2$.

(C) a 任意，$b=1$. (D) $a=0,b=2$. 【 】

(12) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$，记向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，Ⅲ：$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$. 如果向量组 Ⅲ 线性相关，则

(A) 向量组 Ⅰ 线性相关.

(B) 向量组 Ⅱ 线性相关.

(C) 向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 都线性相关.

(D) 向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 至少有一个线性相关. 【 】

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，则在下列方程组中以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 为基础解系的是

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. (B) $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$. (C) $\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{0}$. (D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 【 】

(14) 设两事件 A，B，已知 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则必有

(A) A 与 B 独立. (B) $A\supset B$. (C) $A=B$. (D) A 与 B 对立. 【 】

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）.

得分	评卷人

(15)（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式 $f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程.

得分	评卷人

(16)(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 满足条件:(1) $a \leqslant f(x) \leqslant b$,(2) $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$,$x,y \in [a,b]$,$0<k<1$. 取 $x_0 \in [a,b]$,构造序列:$\{f_n(x_0)\}$:$f_1(x_0)=f(x_0)$,$f_{n+1}(x_0)=f[f_n(x_0)]$,$n=1,2,\cdots$.

证明:(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_{n+1}(x_0)-f_n(x_0)]$ 绝对收敛;(2) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$ 存在.

得分	评卷人

(17)(本题满分 8 分)

对一切实数 t,$f(t)$ 连续,且 $f(t)>0$,$f(-t)=f(t)$,对于函数 $F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\mathrm{d}t\,(-a \leqslant x \leqslant a)$,回答下列问题:

(1) 证明 $F'(x)$ 单调增加;

(2) 当 x 为何值时,$F(x)$ 取得最小值;

(3) 若 $F(x)$ 的最小值可表示为 $f(a)-a^2-1$,求 $f(t)$.

得分	评卷人

(18)(本题满分9分)

设$f(x)$在$[0,1]$上可导,且$f(1)=0,\int_0^1 xf'(x)dx=1$.

证明:至少存在$\xi\in(0,1)$,使$f'(\xi)=2$.

得分	评卷人

(19)(本题满分8分)

证明:不等式$0<\frac{x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}-1<\frac{1}{3(x^2-1)}$,当$x>1$时成立.

得分	评卷人

(20)(本题满分 13 分)

已知 2 维非零向量 $\boldsymbol{x}$ 不是 2 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量.

(1) 证明:$\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 线性无关.

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{x}=0$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值并讨论 $\mathbf{A}$ 可否相似对角化.

得分	评卷人

(21)(本题满分 13 分)

设二维随机变量(X,Y) 服从区域:$-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$ 上的均匀分布,求二次曲面 $x_1^2+2x_2^2+Yx_3^2+2x_1x_2+2Xx_1x_3=1$ 为椭球面的概率.

得分	评卷人

(22)(本题满分 13 分)

一条自动生产线连续生产n件产品不出故障的概率为$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}(n=0,1,2,\cdots)$,假设产品为优质品的概率为$p(0<p<1)$,如果各件产品是否为优质品相互独立.

(1)求生产线在两次故障间生产k件优质品的概率.

(2)若已知在某两次故障间该生产线生产了k件优质品,求它共生产m件产品的概率.

得分	评卷人

(23)(本题满分 13 分)

设Y_1,Y_2,Y_3独立,且都服从参数为p的0-1分布. 令$X_k=\begin{cases}1, Y_1+Y_2+Y_3=k\\-1, Y_1+Y_2+Y_3\neq k\end{cases}, k=1,2.$

求:(1)(X_1,X_2)的联合分布律. (2)p为何值时,$E(X_1X_2)$最小.

模拟考场（二）

考生注意：(1) 本试卷共 23 大题，满分 150 分.

(2) 根据国家标准，试卷中的正切函数，余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处有 $\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{e^x}f(t)dt}{\ln(1+x^2)}=$ ________.

(2) 设函数 f,g 均可微，$z=f(xy,\ln x+g(xy))$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ____________.

(3) 设 $D:x^2+y^2\leqslant a^2,y\geqslant 0$，则 $\iint\limits_D|x|\,dxdy=$ ________.

(4) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$，且有 $\boldsymbol{A}^3+p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{E}=0$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则微分方程 $y'''+py'+qy=0$ 的通解为____________.

(5) 设某仪器有 3 只独立工作的同型号电子元件，其使用寿命 X(单位：小时) 均服从同一指数分布 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，则该仪器在使用的最初 200 小时内，至少有 1 只电子元件损坏的概率为____________.

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自 X 的样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $D(S^2)=$ ____________.

得分	评卷人

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$，则当 $f(0)=0$ 时，

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.　　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.　　(D) 不能判定 $f(0)$ 是否为 $f(x)$ 的极值.

【　　】

(8) 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数，则下列函数中也是以 T 为周期的是

(A) $\int_0^x f(t)dt$.　　(B) $\int_{-x}^0 f(t)dt$.

(C) $\int_0^x f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt.$　　(D) $\int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 f(t)dt$　　【　】

(9) 设函数$f(x)$在$[-1,1]$上有定义,在$x=0$处可导,则$f'(0)=0$是级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$收敛的

(A) 充分条件.　　(B) 必要条件.

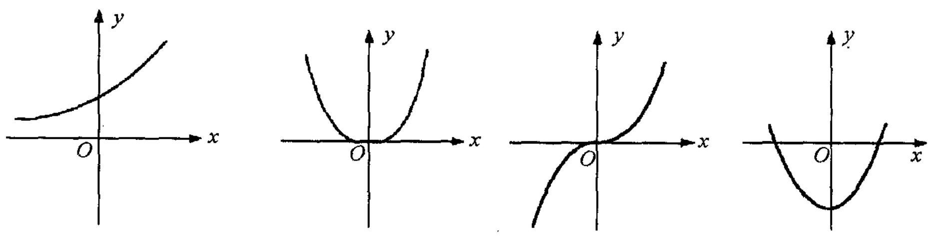
(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.　　【　】

(10) 由$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}(0<t<\frac{\pi}{2})$所确定的函数$y=y(x)$的图形在$(0,1)$内

(A) 单调下降且向下凹.　　(B) 单调下降且向上凹.

(C) 单调上升且向下凹.　　(D) 单调上升且向上凹.　　【　】

(11) 设$f(x)$二阶可导,如果函数$y=f(x)$有极值,且曲线$y=f(x)$有拐点,则曲线$y=f'(x)$的图形可能为



(A)　　(B)　　(C)　　(D)　　【　】

(12) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是四维非零列向量组,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵,已知方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系为$k(1,0,2,0)^T$,则方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$.　　【　】

(13) 设$M_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$为$xoy$面上n个不同的点,令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$,则点$M_1,M_2,\cdots,M_n(n\geqslant 3)$在同一条直线上的充要条件是

(A) 秩$(\boldsymbol{A})=1$.　　(B) 秩$(\boldsymbol{A})=2$.

(C) 秩$(\boldsymbol{A})=3$.　　(D) 秩$(\boldsymbol{A})<3$.　　【　】

(14) 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,其分布函数为$F(x)$,随机变量$Y=F(X)$,则$P\{Y\leqslant\frac{1}{2}\}$的值

(A) 与参数μ和σ有关.

(B) 与参数μ有关,但与σ无关.

(C) 与参数σ有关,但与μ无关.

(D) 与参数μ和σ均无关.　　【　】

三、解答题(本题共9小题,满分94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

得分	评卷人

(15)(本题满分8分)

设函数$f(x,y)$可微,且$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y}$, $f(0,\dfrac{\pi}{2})=1$,求$f(x,y)$.

得分	评卷人

(16)(本题满分8分)

设$f(x)$在$[0,+\infty]$上连续,且$\int_0^1 f(x)dx<-\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证明:至少$\exists\xi\in(0,+\infty)$,使$f(\xi)+\xi=0$.

得分	评卷人

(17)(本题满分 9 分)

设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1$,且$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}, n=2,3,\cdots$,

证明:当$|x|<\frac{1}{2}$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$收敛,并求其和函数.

得分	评卷人

(18)(本题满分 8 分)

设$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$,其中$f(x)$具有连续的一阶导数,$f(0)=0$,求常数$A$使$F(x)$连续,并讨论$F'(x)$的连续性.

得分	评卷人

(19)(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的二阶连续可微函数,且满足 $f(x) + 3f'(x+\pi) = \sin x$,求 $f(x)$.

得分	评卷人

(20)(本题满分 13 分)

设三阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为0,1,1,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征向量,且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明:$\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}$.

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解.

得分	评卷人

(21)(本题满分 13 分)

已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可经正交线性变换 $(x,y,z)^T=Q(x',y',z')^T$ 化为椭圆柱面方程 $y'^2+4z'^2=4$，求 a,b 的值和正交矩阵 Q.

得分	评卷人

(22)(本题满分 13 分)

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立且都服从参数为 p 的0—1分布，已知矩阵 $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}$ 为正定矩阵的概率为 $\frac{1}{8}$.

求:(1) 参数 p 的值;　　(2) 随机变量 $Y=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{vmatrix}$ 的分布律.