Dirichlet Characters and Their Applications

Dirichlet特征及其应用

徐哲峰　张文鹏　著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书主要介绍了 Dirichlet 特征以及 Dirichlet L 函数在一些数论函数算术性质研究方面的应用. 全书共分七章, 分别讨论了 L 函数的均值、一些特殊区间上特征和的高次均值、多项式特征和的恒等式、Dedekind 和与类 Dedekind 和的均值、带特征的指数和的四次均值计算公式等. 此外, 还利用特征和与 L 函数的关系式推广并证明了著名的欧拉数猜想, 并研究了 D.H.Lehmer 问题.

本书可供数学系高年级本科生、研究生, 数学工作者以及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

Dirichlet 特征及其应用/徐哲峰, 张文鹏著. —北京: 科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-021733-2

I.D… Ⅱ. ①徐… ②张… Ⅲ. 解析数论 Ⅳ. O156.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 056803 号

责任编辑: 王丽平 房 阳/责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静/封面设计: 王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 5 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2008 年 5 月第一次印刷 印张: 10 1/4
印数: 1—3 000 字数: 192 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前　言

Dirichlet 特征与 Dirichlet L 函数是经典解析数论中两个极其重要的概念, 在很多数论问题中起着非常重要的作用. 对于它们各种各样的算术性质的研究一直以来都属于解析数论研究的核心问题. 本书以 Dirichelt 特征以及 Dirichlet L 函数为线索, 注重分析、讨论二者之间的转化关系, 综合运用"分段"、"分类"、"转换"、"凑项"、"整合"等初等的技巧研究了一些数论函数的性质.

本书将特征和限定在一些特殊的区间上, 通过研究特征和与 L 函数的转化关系式, 获得了这些区间上特征和高次均值的渐近公式, 说明了以前所获得的关于特征和均值估计的结果是最佳的, 同时还利用这种关系式推广并证明了著名的欧拉数猜想. 这种从特殊到一般, 从容易到复杂的朴素的研究思路, 为一般区间上特征和高次均值渐近公式的研究提供了方法基础. 沿着这种思路, 本书讨论了多项式特征和值的计算问题, 构造了一类多项式, 给出了一些确切的计算公式. 此外, 本书还涉及了其他一些和式的算术性质研究. 这些研究内容都从一定程度上反映了 Dirichlet 特征与 Dirichlet L 函数在很多数论问题的实质性转化过程中起着非常重要的作用.

本书所阐述的内容是作者近年来所获得的一些研究成果. 全书力图体现朴素的思想、初等的技巧、崭新的角度这三者的有机结合的研究思路. 对于复杂的问题, 从一些简单的情形出发, 寻找规律; 对于经典的研究对象, 从崭新的角度去审视分析; 对于解析的对象, 试着使用初等的技巧去处理.

由于时间仓促, 加之作者水平有限, 书中谬误在所难免, 希望读者批评指正.

本书的写作得到西北大学研究生处老师们的大力支持, 作者对他们表示衷心的感谢. 本书得到西北大学研究生创新教育项目资助, 该项目是西北大学"211 工程"建设公共服务体系项目的子项目之一, 作者对此表示感谢.

作　者

2008 年 3 月

目 录

第 1 章　Dirichlet L 函数的均值恒等式

设 $q \geqslant 1$ 为整数, 一个不恒为零的算术函数 $\chi(n)$ 如果满足条件:

(1) 当 $(n,q)>1$ 时 $\chi(n)=0$;

(2) 对任意的 n 有 $\chi(n+q)=\chi(n)$;

(3) 对任意的 n,m 有 $\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$,

则称 $\chi(n)$ 为模 q_1 的 Dirichlet 特征.

Dirichlet L 函数 $L(s,\chi)$ 定义为

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

其中, s 是复数. 由于 Dirichlet L 函数的重要性, 对它的各种算术性质的研究非常广泛. 本章主要讨论如下形式的 Dirichlet L 函数的均值计算问题:

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=(-1)^m}} L(m,\chi)L(n,\overline{\chi}), \tag{1.1}$$

其中, m,n 为正整数.

1.1　$m\equiv n\equiv 0(\bmod\ 2)$ 的情形

这一部分利用广义 Dedekind 和 Bernoulli 多项式以及 Bernoulli 数的性质来研究当 $m\equiv n\equiv 0(\bmod\ 2)$ 时式 (1.1) 的计算问题.

定理 1.1　设 $q\geqslant 2$, $m\geqslant 1$ 与 $n\geqslant 1$ 为满足 $m\equiv n(\bmod\ 2)$ 的正整数. 令

$$\epsilon_{m,n}=\begin{cases}1, & m\equiv n\equiv 1(\bmod\ 2),\\ 0, & m\equiv n\equiv 0(\bmod\ 2),\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\phi(q)}\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=(-1)^m}} L(m,\chi)L(n,\overline{\chi})\\ =&\frac{(-1)^{\frac{m-n}{2}}(2\pi)^{m+n}}{2m!n!}\left(\sum_{l=0}^{m+n} r_{m,n,l}\phi_l(q)q^{l-m-n}-\frac{\epsilon_{m,n}}{q}B_mB_n\phi_{m+n-1}(q)\right),\end{aligned}$$

其中, $\phi_l(q)=\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^l}\right)$,

$$r_{m,n,l}=B_{m+n-l}\sum_{\substack{a=0\\ a+b\geqslant m+n-l}}^{m}\sum_{b=0}^{n}B_{m-a}B_{n-b}\frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{a+b+1}{m+n-l}}{a+b+1},$$

B_m 为第 m 个 Bernoulli 数且 $\binom{m}{a}=\dfrac{m!}{a!(m-a)!}$.

为完成定理的证明, 先给出广义 Dedekind 和 $s(m,n,q)$ 的定义

$$s(m,n,q)=\sum_{j=1}^{q-1}B_m\left(\frac{j}{q}\right)B_n\left(\frac{j}{q}\right),$$

其中, $B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_ix^{n-i}$ 表示 Bernoulli 多项式.

下来给出 $s(m,n,q)$ 和 Dirichlet L 函数之间的一个关系式.

引理 1.1　设 $q\geqslant 2$, $m>0$ 及 $n>0$ 为整数, 若 $m\equiv n(\bmod 2)$, 则

$$\frac{(2\pi\mathrm{i})^{m+n}q^{m+n-1}}{4m!n!}\left[s(m,n,q)+\frac{m!n!}{(2\pi\mathrm{i})^{m+n}}\left(\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^m}{r^m}\right)\left(\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{s^n}\right)\right]$$

$$=\sum_{d|q}\frac{d^{m+n}}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=(-1)^m=(-1)^n}}\overline{\chi}(-1)L(m,\chi)L(n,\overline{\chi}).$$

证明　对于满足 $0<x\leqslant 1$ 的任意实数 x, 有 (见文献 [1] 定理 12.19)

$$B_n(x)=-\frac{n!}{(2\pi\mathrm{i})^n}\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq 0}}^{+\infty}\frac{e(rx)}{r^n},$$

其中, $e(y)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}y}$. 则

$$\begin{aligned}s(m,n,q)&=\sum_{j=1}^{q-1}B_m\left(\frac{j}{q}\right)B_n\left(\frac{j}{q}\right)\\&=\frac{m!n!}{(2\pi\mathrm{i})^{m+n}}\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq 0}}^{+\infty}\sum_{\substack{s=-\infty\\ s\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{r^ms^n}\sum_{j=1}^{q-1}e\left(\frac{j(r+s)}{q}\right)\\&=\frac{m!n!}{(2\pi\mathrm{i})^{m+n}}\left[q\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq 0\\ r+s\equiv 0(\bmod q)}}^{+\infty}\sum_{\substack{s=-\infty\\ s\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{r^ms^n}-\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq 0}}^{+\infty}\sum_{\substack{s=-\infty\\ s\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{r^ms^n}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m!n!q}{(2\pi \mathrm{i})^{m+n}} \sum_{d|q} \sum_{\substack{r=-\infty \\ r\neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0 \\ r+s\equiv 0 (\bmod d) \\ (r,d)=1}}^{+\infty} \frac{1}{\left(r\cdot\frac{q}{d}\right)^m \left(s\cdot\frac{q}{d}\right)^n} \\
&\quad - \frac{m!n!}{(2\pi \mathrm{i})^{m+n}} \left(\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^m}{r^m}\right) \left(\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{s^n}\right) \\
&= \frac{m!n!}{(2\pi \mathrm{i})^{m+n} q^{m+n-1}} \sum_{d|q} \frac{d^{m+n}}{\phi(d)} \sum_{\chi \bmod d} \left(\sum_{\substack{r=-\infty \\ r\neq 0}}^{+\infty} \frac{\chi(r)}{r^m}\right) \left(\sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{+\infty} \frac{\overline{\chi}(-s)}{s^n}\right) \\
&\quad - \frac{m!n!}{(2\pi \mathrm{i})^{m+n}} \left(\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^m}{r^m}\right) \left(\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{s^n}\right) \\
&= \frac{4m!n!}{(2\pi \mathrm{i})^{m+n} q^{m+n-1}} \sum_{d|q} \frac{d^{m+n}}{\phi(d)} \sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi(-1)=(-1)^m=(-1)^n}} \overline{\chi}(-1) L(m,\chi) L(n,\overline{\chi}) \\
&\quad - \frac{m!n!}{(2\pi \mathrm{i})^{m+n}} \left(\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^m}{r^m}\right) \left(\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{s^n}\right).
\end{aligned}
$$

这样就得到了引理 1.1.

注释 1.1 从引理 1.1 可以看出, 如果 $m \not\equiv n \pmod 2$ 则 $s(m,n,q)=0$.

下面将广义 Dedekind 和 $s(m,n,q)$ 表示成 Bernoulli 数的形式.

引理 1.2 对整数 $q \geqslant 2$, $m>0$ 及 $n>0$, 有

$$
s(m,n,q) = \sum_{c=0}^{m+n} B_c q^{1-c} \sum_{\substack{a=0 \\ a+b\geqslant c}}^{m} \sum_{b=0}^{n} B_{m-a} B_{n-b} \frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{a+b+1}{c}}{a+b+1} - B_m B_n.
$$

证明 利用 Bernoulli 数和 Bernoulli 多项式的性质可以得到

$$
\begin{aligned}
s(m,n,q) &= \sum_{j=1}^{q-1} B_m\left(\frac{j}{q}\right) B_n\left(\frac{j}{q}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{q-1} \left[\sum_{a=0}^{m} \binom{m}{a} B_{m-a} j^a q^{-a}\right] \left[\sum_{b=0}^{n} \binom{n}{b} B_{n-b} j^b q^{-b}\right] \\
&= \sum_{a=0}^{m} \sum_{b=0}^{n} \binom{m}{a}\binom{n}{b} B_{m-a} B_{n-b} q^{-a-b} \left(\sum_{j=1}^{q-1} j^{a+b}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{\substack{a=0\\a+b>0}}^{m}\sum_{b=0}^{n}\binom{m}{a}\binom{n}{b}B_{m-a}B_{n-b}q^{-a-b}\left(\sum_{j=1}^{q-1}j^{a+b}\right)+(q-1)B_mB_n\\
&=\sum_{\substack{a=0\\a+b>0}}^{m}\sum_{b=0}^{n}\binom{m}{a}\binom{n}{b}B_{m-a}B_{n-b}q^{-a-b}\left(\frac{1}{a+b+1}\sum_{c=0}^{a+b}\binom{a+b+1}{c}B_cq^{a+b+1-c}\right)\\
&\quad+(q-1)B_mB_n\\
&=\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=0}^{n}B_{m-a}B_{n-b}\frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}}{a+b+1}\sum_{c=0}^{a+b}\binom{a+b+1}{c}B_cq^{1-c}-B_mB_n\\
&=\sum_{c=0}^{m+n}B_cq^{1-c}\sum_{\substack{a=0\\a+b\geqslant c}}^{m}\sum_{b=0}^{n}B_{m-a}B_{n-b}\frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{a+b+1}{c}}{a+b+1}-B_mB_n.
\end{aligned}
$$

这样便证明了引理 1.2.

定理 1.1 的证明 现在来证明定理 1.1. 利用引理 1.1 和 Möbius 变换

$$
G(q)=\sum_{d|q}F(d)\Leftrightarrow F(q)=\sum_{d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)G(d),
$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{q^{m+n}}{\phi(q)}\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=(-1)^m=(-1)^n}}\overline{\chi}(-1)L(m,\chi)L(n,\overline{\chi})\\
&=\frac{(2\pi\mathrm{i})^{m+n}}{4m!n!}\sum_{d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)d^{m+n-1}s(m,n,d)\\
&\quad+\frac{1}{4}\left(\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^m}{r^m}\right)\left(\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{s^n}\right)\sum_{d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)d^{m+n-1}.
\end{aligned}
$$

利用引理 1.2 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)d^{m+n-1}s(m,n,d)\\
&=\sum_{d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)d^{m+n-1}\left[\sum_{c=0}^{m+n}B_cd^{1-c}\sum_{\substack{a=0\\a+b\geqslant c}}^{m}\sum_{b=0}^{n}B_{m-a}B_{n-b}\frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{a+b+1}{c}}{a+b+1}-B_mB_n\right]\\
&=\sum_{d|q}\mu\left(\frac{q}{d}\right)\sum_{c=0}^{m+n}B_cd^{m+n-c}\sum_{\substack{a=0\\a+b\geqslant c}}^{m}\sum_{b=0}^{n}B_{m-a}B_{n-b}\frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{a+b+1}{c}}{a+b+1}
\end{aligned}
$$

$$-B_m B_n \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d^{m+n-1}.$$

注意到 $\sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d^c = q^c \prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^c}\right) = q^c \phi_c(q)$, 所以

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=(-1)^m=(-1)^n}} \overline{\chi}(-1) L(m,\chi) L(n,\overline{\chi})$$

$$= \frac{(2\pi \mathrm{i})^{m+n}}{4m!n!} \sum_{c=0}^{m+n} B_c q^{-c} \phi_{m+n-c}(q) \sum_{\substack{a=0 \\ a+b\geqslant c}}^{m} \sum_{b=0}^{n} B_{m-a} B_{n-b} \frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{a+b+1}{c}}{a+b+1}$$

$$-\frac{(2\pi \mathrm{i})^{m+n}}{4m!n!q} B_m B_n \phi_{m+n-1}(q)$$

$$+\frac{1}{4q}\left(\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^m}{r^m}\right)\left(\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{s^n}\right) \phi_{m+n-1}(q).$$

现在令 $m \equiv n \pmod 2$, 注意到

$$(-1)^m\left(1+(-1)^m\right) = 1+(-1)^m,$$

$$\mathrm{i}^{m+n}(-1)^m = (-1)^{\frac{m-n}{2}}$$

以及对任意正整数 k, 有 $2\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!}B_{2k}$, 可以得到

$$\frac{2}{\phi(q)} \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=(-1)^m}} L(m,\chi) L(n,\overline{\chi})$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{m-n}{2}}(2\pi)^{m+n}}{2m!n!} \sum_{l=0}^{m+n} \phi_l(q) q^{l-m-n}$$

$$\times\left[B_{m+n-l} \sum_{\substack{a=0 \\ a+b\geqslant m+n-l}}^{m} \sum_{b=0}^{n} B_{m-a} B_{n-b} \frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{a+b+1}{m+n-l}}{a+b+1}\right]$$

$$-\frac{(-1)^{\frac{m-n}{2}}(2\pi)^{m+n}}{2m!n!q} B_m B_n \phi_{m+n-1}(q)$$

$$+\frac{1}{2q}\left(\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^m}{r^m}\right)\left(\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{s^n}\right) \phi_{m+n-1}(q)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{m-n}{2}}(2\pi)^{m+n}}{2m!n!}\left(\sum_{l=0}^{m+n} r_{m,n,l}\phi_l(q) q^{l-m-n} - \frac{\epsilon_{m,n}}{q} B_m B_n \phi_{m+n-1}(q)\right).$$

这样便完成了定理 1.1 的证明.

1.2 Dirichlet L 函数的另外一些均值恒等式

以上给出了式 (1.1) 在 $m \equiv n \equiv 0(\bmod 2)$ 时的计算公式. 这种方法对 $2 \nmid (n+m)$ 的情形却无法处理, 甚至在 $q=p$ 及 $m=1$ 这种相对比较简单的情况下也得不出具体的计算公式来.

下面利用一些特征和与 L 函数的关系式以及周期 Bernoulli 多项式 $\overline{B}_n(x)$ 的性质来研究式 (1.1) 在没有条件 $m \equiv n \equiv 0(\bmod 2)$ 限制时的计算问题, 其中, 周期 Bernoulli 多项式 $\overline{B}_n(x) = B_n(x-[x])$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 同样地, 先给出本节的主要结论.

定理 1.2　设 $p \geqslant 5$ 为素数, n 为正整数. 如果 n 为偶数, 则

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=1}} L(1,\bar{\chi}\chi_4)L(n,\chi)$$

$$= -\frac{\pi\chi_4(p)(p-1)}{p}\left[\frac{\zeta(n)}{p^n}\left[\frac{p}{4}\right] + \frac{2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\pi^n}{n!}\sum_{r \leqslant \left[\frac{p}{4}\right]}\overline{B}_n\left(\frac{r}{p}\right)\right];$$

如果 n 为奇数, 则

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} (2+\bar{\chi}(2)-\bar{\chi}(4))L(1,\bar{\chi})L(n,\chi) = \frac{(2\mathrm{i}\pi)^{n+1}(p-1)}{2n!p}\sum_{r \leqslant \left[\frac{p}{4}\right]}\overline{B}_n\left(\frac{r}{p}\right),$$

其中, χ_4 表示模 4 的原特征, $\zeta(n)$ 为 Riemann Zeta 函数.

定理 1.3　设 $p \geqslant 3$ 为素数, n 为正整数. 如果 n 为偶数, 则

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=1}} (\bar{\chi}(2)-2)L(1,\bar{\chi})L(n,\chi)$$

$$= -\frac{\pi(p-1)}{2\mathrm{i}p}\left[\frac{\zeta(n)(p-1)}{p^n} + \frac{2^n(-1)^{\frac{n}{2}}\pi^n}{n!}\sum_{r \leqslant \frac{p-1}{2}}\overline{B}_n\left(\frac{r}{p}\right)\right];$$

如果 n 为奇数, 则

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} (\bar{\chi}(2)-2)L(1,\bar{\chi})L(n,\chi) = \frac{(2\mathrm{i})^n\pi^{n+1}(p-1)}{2\mathrm{i}n!p}\sum_{r \leqslant \frac{p-1}{2}}\overline{B}_n\left(\frac{r}{p}\right).$$

上述定理中,

$$\sum_{r \leqslant \left[\frac{p}{4}\right]}\overline{B}_n\left(\frac{r}{p}\right) \quad 和 \quad \sum_{r \leqslant \frac{p-1}{2}}\overline{B}_n\left(\frac{r}{p}\right)$$

利用 Bernoulli 多项式的显式表示式是容易计算出来的. 特别地, 对于 $n=1,2,3$ 的情形, 注意到

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2},\quad B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},\quad B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$$

能够得到如下的一些恒等式:

推论 1.1 设 $p\geqslant 5$ 为素数, 则

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=1}} L(1,\bar{\chi}\chi_4)L(2,\chi)=\begin{cases}\dfrac{\pi^3(p-1)^2}{64p}\left(1-\dfrac{14}{3p}-\dfrac{5}{3p^2}\right), & p\equiv 1(\bmod 4),\\ -\dfrac{\pi^3(p-3)}{64}\left(1-\dfrac{3}{p}-\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{3}{p^3}\right), & p\equiv 3(\bmod 4),\end{cases}$$

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=-1}} (2+\bar{\chi}(2)-\bar{\chi}(4))|L(1,\chi)|^2=\begin{cases}\dfrac{3\pi^2(p-1)}{16}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^2, & p\equiv 1(\bmod 4),\\ \dfrac{3\pi^2(p-3)}{16}\left(1-\dfrac{4}{3p}+\dfrac{1}{3p^2}\right), & p\equiv 3(\bmod 4)\end{cases}$$

以及

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=-1}} (2+\bar{\chi}(2)-\bar{\chi}(4))L(1,\bar{\chi})L(3,\chi)\\ =&\begin{cases}\dfrac{3\pi^4(p+3)(p-1)^2}{256p^2}\left(1-\dfrac{2}{3p}-\dfrac{1}{3p^2}\right), & p\equiv 1(\bmod 4),\\ \dfrac{3\pi^4(p-3)}{256}\left(1+\dfrac{2}{3p}-\dfrac{4}{3p^2}-\dfrac{2}{3p^3}+\dfrac{1}{3p^4}\right), & p\equiv 3(\bmod 4).\end{cases}\end{aligned}$$

推论 1.2 设 $p\geqslant 3$ 为素数. 则有恒等式

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=1}} (\bar{\chi}(2)-2)L(1,\bar{\chi})L(2,\chi)=\frac{i\pi^3}{12}\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}\right),$$

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=-1}} (\bar{\chi}(2)-2)|L(1,\chi)|^2=-\frac{\pi^2 p}{8}\left(1-\frac{1}{p}\right)^3$$

以及

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=-1}} (\bar{\chi}(2)-2)L(1,\bar{\chi})L(3,\chi)=-\frac{\pi^4(p-1)^3(p+1)^2}{96p^4}.$$

先给出一些引理作为定理证明的准备.

如下的这个引理给出了 Dirichelt L 函数与一种特征和之间的关系式.

引理 1.3 设 χ 为模 m 的原特征并且满足 $\chi(-1)=-1$, 则

$$\frac{1}{m}\sum_{b=1}^{m} b\chi(b)=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\tau(\chi)L(1,\bar{\chi}),$$

其中, $\tau(\chi)=\sum\limits_{a=1}^{m}\chi(a)e\left(\dfrac{a}{q}\right)$ 是高斯和, $e(y)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}y}$.

证明 由于 χ 是模 m 的原特征, 于是有

$$L(1-s,\chi)=\frac{m^{s-1}\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\{\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}s}{2}}+\chi(-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}s}{2}}\}\tau(\chi)L(s,\bar{\chi})$$

(见文献 [1] 定理 12.11). 又由于 $\chi\neq\chi_0$, 故

$$L(0,\chi)=-\frac{1}{m}\sum_{b=1}^{m} b\chi(b)$$

(见文献 [1] 定理 12.20). 取 $s=1$, 则有

$$\frac{1}{m}\sum_{b=1}^{m} b\chi(b)=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\tau(\chi)L(1,\bar{\chi}).$$

这样就证明了引理 1.3.

设整数 $q>4$, 令

$$S\left(\frac{q}{4},\chi\right):=\sum_{a\leqslant\frac{q}{4}}\chi(a).$$

下面的几个引理建立了这种特征和与 Dirichlet L 函数之间的一些关系式.

引理 1.4 设 $q\geqslant 5$ 为奇整数, χ 为模 q 的原特征且满足 $\chi(-1)=1$, 则下述等式成立:

$$S\left(\frac{q}{4},\chi\right)=-\frac{\mathrm{i}\bar{\chi}(4)}{2\pi}\tau(\chi\chi_4)L(1,\bar{\chi}\chi_4),$$

其中, χ_4 表示模为 4 的原特征.

证明 首先假定 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$. 由于 χ_4 为模 4 的原特征, 所以有 $\chi_4(1)=\chi_4(-3)=1$ 和 $\chi_4(3)=\chi_4(-1)=-1$. 这样有

$$\sum_{a=1}^{4q} a\chi(a)\chi_4(a)=\sum_{a=0}^{q-1}(4a+1)\chi(4a+1)-\sum_{a=0}^{q-1}(4a+3)\chi(4a+3). \tag{1.2}$$

注意到 $\sum_{a=0}^{q-1}\chi(a)=0$, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=0}^{q-1}(4a+1)\chi(4a+1)\\
&=4\chi(4)\sum_{a=0}^{q-1}a\chi(a+\bar{4})=4\chi(4)\sum_{a=0}^{q-1}(a+\bar{4})\chi(a+\bar{4})\\
&=4\chi(4)\sum_{a=0}^{\frac{q-1}{4}}(a+\bar{4})\chi(a+\bar{4})+4\chi(4)\sum_{a=\frac{q-1}{4}+1}^{q-1}(a+\bar{4})\chi(a+\bar{4}),
\end{aligned}\tag{1.3}$$

其中, $4\cdot\bar{4}\equiv 1(\bmod q)$. 由于 $\dfrac{3q+1}{4}$ 是一个整数且 $\bar{4}=\dfrac{3q+1}{4}$, 所以有

$$0\leqslant a+\bar{4}\leqslant q,\quad a\leqslant\frac{q-1}{4}$$

和

$$q<a+\bar{4}\leqslant 2q-1,\quad a>\frac{q-1}{4}.$$

因此得到

$$\begin{aligned}
&4\chi(4)\sum_{a=0}^{\frac{q-1}{4}}(a+\bar{4})\chi(a+\bar{4})+4\chi(4)\sum_{a=\frac{q-1}{4}+1}^{q-1}(a+\bar{4})\chi(a+\bar{4})\\
&=4\chi(4)\sum_{a=0}^{\frac{q-1}{4}}(a+\bar{4})\chi(a+\bar{4})+4\chi(4)\sum_{a=\frac{q-1}{4}+1}^{q-1}(a+\bar{4}-q)\chi(a+\bar{4}-q)\\
&\quad+4\chi(4)\sum_{a=\frac{q-1}{4}+1}^{q-1}q\chi(a+\bar{4})\\
&=4\chi(4)\sum_{a=1}^{q-1}a\chi(a)+4\chi(4)q\sum_{a=\frac{q-1}{4}+1}^{q-1}\chi(a+\bar{4}).
\end{aligned}\tag{1.4}$$

注意到 $\chi(-1)=1$, 有 (见文献 [1] 定理 12.20)

$$\sum_{a=1}^{q-1}a\chi(a)=0.$$

现在结合式 (1.3) 与式 (1.4), 可以得到

$$\sum_{a=0}^{q-1}(4a+1)\chi(4a+1)=4\chi(4)q\sum_{a=\frac{q-1}{4}+1}^{q-1}\chi(a+\bar{4})$$

$$= -4\chi(4)q\sum_{a=0}^{\frac{q-1}{4}}\chi\left(a+\frac{3q+1}{4}\right) = -4\chi(4)q\sum_{a=0}^{\frac{q-1}{4}}\chi\left(a-\frac{q-1}{4}\right)$$

$$= -4\chi(4)q\sum_{a=0}^{\frac{q-1}{4}}\chi\left(\frac{q-1}{4}-a\right) = -4\chi(4)q\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}\chi(a). \tag{1.5}$$

用同样的方法还可以得到

$$\sum_{a=0}^{q-1}(4a+3)\chi(4a+3) = 4\chi(4)q\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}\chi(a). \tag{1.6}$$

从式 (1.2), 式 (1.5) 及式 (1.6) 可以得到

$$\sum_{a=1}^{4q}a\chi(a)\chi_4(a) = -8\chi(4)q\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}\chi(a). \tag{1.7}$$

同样地, 对于 $q\equiv 3(\bmod 4)$ 也可以得到

$$\sum_{a=1}^{4q}a\chi(a)\chi_4(a) = -8\chi(4)q\sum_{a=1}^{\frac{q-3}{4}}\chi(a). \tag{1.8}$$

将式 (1.7) 与式 (1.8) 结合起来便有

$$\sum_{a=1}^{4q}a\chi(a)\chi_4(a) = -8\chi(4)qS\left(\frac{q}{4},\chi\right). \tag{1.9}$$

注意到 χ 为模 q 的原特征, χ_4 为模 4 的原特征而且 $(q,2)=1$, 所以 $\chi\chi_4$ 为模 $4q$ 的原特征. 又由于

$$\chi\chi_4(-1) = \chi(-1)\chi_4(-1) = -1,$$

结合式 (1.9) 和引理 1.3 便有

$$S\left(\frac{q}{4},\chi\right) = -\frac{\mathrm{i}\bar{\chi}(4)}{2\pi}\tau(\chi\chi_4)L(1,\bar{\chi}\chi_4).$$

这样便证明了引理 1.4.

引理 1.5　设 $q\geqslant 3$ 为奇整数, 则对任意非主特征 $\chi \bmod q$ 有

$$\sum_{a=1}^{q}a\chi(a) = \frac{\chi(2)q}{1-2\chi(2)}\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{2}}\chi(a).$$

证明 利用 Dirichlet 特征的性质, 有

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{q}2a\chi(2a)&=\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{2}}2a\chi(2a)+\sum_{a=\frac{q+1}{2}}^{q}2a\chi(2a)\\&=\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{2}}2a\chi(2a)+\sum_{a=1}^{\frac{q+1}{2}}(2a-1)\chi(q+2a-1)+q\sum_{a=1}^{\frac{q+1}{2}}\chi(2a-1)\\&=\sum_{a=1}^{q}a\chi(a)+q\sum_{a=1}^{\frac{q+1}{2}}\chi(2a-1).\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{a=1}^{\frac{q+1}{2}}\chi(2a-1)+\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{2}}\chi(2a)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)=0,$$

有

$$(1-2\chi(2))\sum_{a=1}^{q}a\chi(a)=\sum_{a=1}^{q}a\chi(a)-\sum_{a=1}^{q}2a\chi(2a)=q\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{2}}\chi(2a)=\chi(2)q\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{2}}\chi(a),$$

即

$$\sum_{a=1}^{q}a\chi(a)=\frac{\chi(2)q}{1-2\chi(2)}\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{2}}\chi(a).$$

这样就证明了引理 1.5.

引理 1.6 设 $q>4$ 为一个奇数, χ 为模 q 的原特征且满足 $\chi(-1)=-1$. 则有

$$S\left(\frac{q}{4},\chi\right)=\frac{2+\bar{\chi}(2)-\bar{\chi}(4)}{2\mathrm{i}\pi}\tau(\chi)L(1,\bar{\chi}).$$

注释 1.2 对任意偶原特征 χ, 由引理 1.4 知

$$S\left(\frac{q}{4},\chi\right)=-\frac{\mathrm{i}\bar{\chi}(4)}{2\pi}\tau(\chi\chi_4)L(1,\bar{\chi}\chi_4),$$

由于 $\tau(\chi\chi_4)L(1,\bar{\chi}\chi_4)\neq 0$, 所以对所有偶原特征都有

$$S\left(\frac{q}{4},\chi\right)\neq 0.$$

而对于奇原特征, 由引理 1.6 知道当且仅当 $\chi(2)=-1$ 时,

$$S\left(\frac{q}{4},\chi\right)=0.$$

例如, 若 p 是一个素数, 仅当 $p\equiv 3 \pmod 8$, 实特征和

$$\sum_{a=1}^{\left[\frac{p-1}{4}\right]}\left(\frac{a}{p}\right)=0,$$

其中, $\left(\frac{a}{p}\right)$ 为 Legendre 符号. 也就是说, 当 $p\equiv 3 \pmod 8$ 时在区间 $\left[1,\frac{p-1}{4}\right]$ 上二次剩余与二次非剩余个数相等.

证明 同样将 q 分两种情况考虑: $q\equiv 1 \pmod 4$ 和 $q\equiv 3 \pmod 4$. 先假定 $q\equiv 1 \pmod 4$.

利用 Dirichlet 特征的简单性质, 有

$$\begin{aligned}
4\chi(4)\sum_{a=1}^{q-1}a\chi(a)=&\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}4a\chi(4a)+\sum_{a=\frac{q+3}{4}}^{\frac{2q-2}{4}}4a\chi(4a)\\
&+\sum_{a=\frac{2q+2}{4}}^{\frac{3q-3}{4}}4a\chi(4a)+\sum_{a=\frac{3q+1}{4}}^{q-1}4a\chi(4a)\\
=&\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}4a\chi(4a)+\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}(4a+q-1)\chi(4a-1)\\
&+\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}(4a+2q-2)\chi(4a-2)+\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}(4a+3q-3)\chi(4a-3)\\
=&\sum_{a=1}^{q-1}a\chi(a)+\chi(4)q\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}\chi(a-\bar{4})\\
&+2\chi(4)q\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}\chi(a-2\cdot\bar{4})+3\chi(4)q\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}\chi(a-3\cdot\bar{4}).
\end{aligned}\tag{1.10}$$

注意到 $\bar{4}\equiv\frac{3q+1}{4} \pmod q$, 结合式 (1.10), 有

$$\begin{aligned}
4\chi(4)\sum_{a=1}^{q-1}a\chi(a)=&\sum_{a=1}^{q-1}a\chi(a)-\chi(4)q\sum_{a=\frac{2q+2}{4}}^{\frac{3q-3}{4}}\chi(a)\\
&-2\chi(4)q\sum_{a=\frac{q+3}{4}}^{\frac{2q-2}{4}}\chi(a)-3\chi(4)q\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}\chi(a)\\
=&\sum_{a=1}^{q-1}a\chi(a)-\chi(4)q\sum_{a=\frac{q+3}{4}}^{\frac{2q-2}{4}}\chi(a)-3\chi(4)q\sum_{a=1}^{\frac{q-1}{4}}\chi(a)
\end{aligned}$$