

GAODENG ZHIYE JISHU JIAOYU JIAOCAI

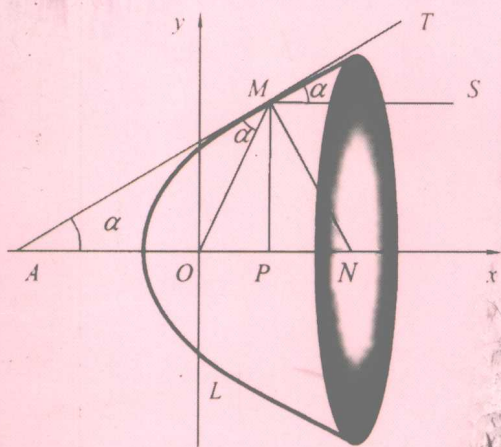
高等职业技术教育教材

SHU XUE

数学

第三册

王新芳 主编



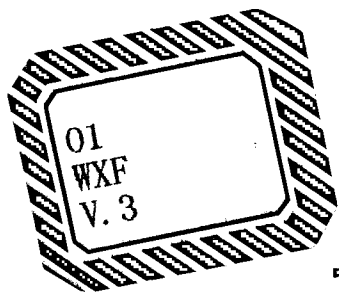
中国铁道出版社

高等职业技术教育教材

数 学

第三册

王新芳 主编



中国铁道出版社

2003年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本套教材是针对五年制高等职业技术教育数学课的要求编写的,遵循“加强基础,注重能力,突出应用,增加弹性,适度更新,兼顾体系”的原则定位数学内容,并在每章后附有本章小结和复习题。

本套教材共分三册,第一册是初等数学的代数部分,第二册是初等数学的部分代数和所有几何部分,第三册是高等数学的微积分和空间解析几何部分。本书为第三册,主要内容包括空间解析几何、极限与连续、导数、不定积分和积分、多元函数微积分介绍。

本套教材适合作为高等职业技术教育教材,其中第一、二册也可作为中等职业技术教育教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学. 第3册/王新芳主编. —北京:中国铁道出版社, 2002.8

高等职业技术教育教材

ISBN 7-113-04804-8

I. 数… II. 王… III. 高等数学—高等学校:技术学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 060962 号

书 名:高等职业技术教育教材

数学·第三册

作 者:王新芳 主编

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)

责任编辑:李小军

编辑部电话:市电(010)63583214 路电(021)73133

封面设计:马 利

印 刷:中国铁道出版社印刷厂

开 本:880×1230 1/32 印张:10.375 字数:310 千

版 本:2003年6月第1版 2003年6月第1次印刷

印 数:1~5 000 册

书 号:ISBN 7-113-04804-8/O·99

定 价:18.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

发行部电话:市电(010)-63545969
路电(021)-73169

“高等职业技术教育教材·数学”

编写委员会

主任委员：张义平

副主任委员：王英杰 王新芳

委 员：张义平 王英杰 王新芳 尤 磊

李 明 周 凯 岳 鸿 富伯亭

前 言

随着教育体制改革和社会对人才培养的需求,五年制的高等职业教育欣然兴起。数学作为现代科技发展的基础,随着科技的高速发展,知识结构的日益更新,其作用越来越突出,它的内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分,数学已成为一门必修公共课程。从全面提高素质的角度来说,数学是五年制高等职业教育的一门重要的基础课;从综合职业能力的要求来说,它又是进一步学习及参加社会生活、生产实践所必不可少的工具课。为此,我们根据五年制高等职业教育数学课的要求,遵循“加强基础,注重能力,突出应用,增加弹性,适度更新,兼顾体系”的原则编写了这套数学教材,以供使用和交流。

拓宽基础,以能力为本位是本教材的特点之一。新世纪是“知识经济”的时代,新知识、新技术、新思维层出不穷,每个人都需要树立终生教育和终生学习的远大目标。学生在校学习的内容毕竟是有限的,要想适应社会的进步、知识的更新,就必须具备良好的继续学习的知识基础和基本能力。因此,我们在编写中力求体现“拓宽基础,以能力为本位”的思想。

从教学内容的安排来看,教材尽量采取“具体→抽象→应用”的思路,强化学生能力的培养和科学的思维方法及辩证唯物主义思想的形成,培养基本的运算能力、空间想象能力、数形结合能力、创新思维能力和实际应用能力。因此,我们在教材中增大了生活及各专业实践中的应用例题和习题,积极引导用数学知识去解决实际问题,使数学真正体现出它的基础性和工具性,为生活、为其他专业课程服务的特点。

适应教育教学改革和学生不同选择的要求是本教材的又一特点。近期,教育部颁发的高考制度允许职业学校的学生参加普通高考,为高职的学生提供了一个极好的机会。这就要求高职的教材立即跟上,有所改变,有所提高,既要满足学生毕业后马上就业的教学要求,又要对准备参加升学考试的学生起指导作用。为此,本教材的第一、二册包括了所有的初等数学内

容,并且要求较高,题量较大,以满足学生参加再教育考试的需要。另外,教材中内容的多少,知识面的宽窄和练习、习题的难易还兼顾了不同层次学生的需要。

本套教材共分三册。第一册是初等数学的代数部分,第二册是初等数学的部分代数内容及所有的几何部分,第三册是高等数学的微积分和空间解析几何部分。建议学时约为290。主要供初中起点的高等职业技术教育的学生使用,第一、二册也可供工科专业的中等职业技术教育的学生使用。

本套教材由太原铁路机械学校的张义平担任编委会主任委员,太原铁路机械学校王新芳担任主编;山西省冶金工业学校富伯亭担任副主编。参加编写的人员有昆明铁路机械学校尤磊、太原铁路机械学校李明、太原铁路机械学校周凯和华北机电学校的岳鸿。其中,王新芳负责编写第一、二、五、六、七、十四章;尤磊负责编写第三、四章;李明负责编写第八、九章;周凯负责编写第十、十一、十二、十三章;岳鸿编写第十五、十六、十七章;富伯亭负责编写第十八、十九和第二十章。

在编写中我们努力博采众长,参考了苏州大学出版社出版的江苏省五年制高等职业教育试用教材《数学》,高等教育出版社出版的《高等数学》、全国高等教育自学考试教材《高等数学》、国家教委中等专业学校规划教材《数学》和普通高级中学课本《数学》,以及山西教育出版社出版的职业高级中学课本《数学》等内容。在此向这些教材的编者表示感谢。

尽管如此,由于时间仓促,我们能力有限,书中难免还存在缺点和错误,望能得到有关专家的指导和批评,不甚感激。

编 者

2002年4月

目 录

第十四章 空间解析几何	(1)
第一节 空间直角坐标系	(1)
第二节 方向余弦与方向数	(6)
第三节 平面及其方程	(15)
第四节 空间直线及其方程	(21)
第五节 空间曲面与曲线	(26)
阅读材料 二次曲线	(33)
本章内容小结	(38)
复习题十四	(42)
第十五章 极限与连续	(47)
第一节 初等函数	(47)
第二节 数列的极限	(59)
第三节 函数的极限	(64)
第四节 极限的四则运算	(69)
第五节 无穷小与无穷大	(73)
第六节 两个重要极限	(76)
第七节 函数的连续性	(79)
本章内容小结	(87)
复习题十五	(89)
第十六章 导数和微分	(94)
第一节 导数的概念	(94)
第二节 求导数的基本法则	(101)

第三节	隐函数与由参数方程确定的函数的导数	(106)
第四节	高阶导数	(111)
第五节	函数的微分	(113)
	本章内容小结	(118)
	复习题十六	(121)
第十七章	导数的应用	(126)
第一节	拉格朗日中值定理 罗比达法则	(126)
第二节	函数的单调性及其极值	(130)
第三节	函数的最大值和最小值	(136)
第四节	曲线的凹凸性、拐点和曲率	(141)
第五节	函数图象的描绘	(147)
	本章内容小结	(151)
	复习题十七	(153)
第十八章	不定积分	(158)
第一节	不定积分的运算和性质	(158)
第二节	换元积分法	(165)
第三节	分部积分法	(178)
第四节	积分表的使用方法	(182)
第五节	可分离变量微分方程	(183)
第六节	一阶线性微分方程	(190)
	本章内容小结	(193)
	复习题十八	(198)
第十九章	定积分	(203)
第一节	定积分的概念与性质	(203)
第二节	牛顿-莱布尼兹公式	(211)
第三节	定积分的换元积分法与分部积分法	(215)
第四节	广义积分	(221)
第五节	定积分在几何上的应用	(226)

第六节 定积分在物理上的应用	(237)
本章内容小结	(245)
复习题十九	(248)
第二十章 多元函数微积分	(253)
第一节 多元函数及其极限与连续	(253)
第二节 偏导数与全微分	(261)
第三节 复合函数求导法则	(271)
第四节 多元函数的极值和最大值、最小值	(278)
第五节 二重积分的概念	(283)
第六节 二重积分的计算方法	(289)
本章内容小结	(302)
复习题二十	(305)
附 录 简易积分表	(312)
参考文献	(322)

第十四章 空间解析几何

在平面解析几何里,我们通过平面直角坐标系,建立了平面上的点与有序实数对之间的一一对应关系,把平面中的几何图象用图象上点的坐标所满足的代数方程表示,使几何问题可以用代数的方法来解决.空间解析几何与平面解析几何相仿,同样可以通过建立空间直角坐标系,建立空间点与三元实数组之间的一一对应关系,把空间的几何图形用图形中的点的坐标所满足的代数方程来表示,用代数方程的性质来研究空间几何问题.

本章首先介绍空间直角坐标系,然后在空间直角坐标系中研究空间的点、线、面等几何问题.

第一节 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条相互垂直且有相同单位长度的数轴,这三条数轴分别称 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴),统称为坐标轴,定点 O 叫坐标原点.每两个坐标轴决定的平面称为坐标平面,分别记作 xOy 平面、

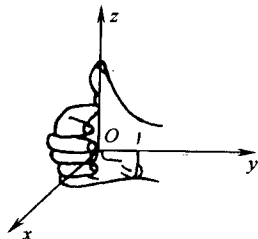


图 14-1

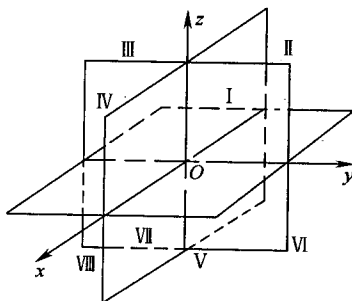


图 14-2

yOz 平面、 zOx 平面. 对空间直角坐标系坐标轴的正向作如下规定: 要符合右手法则, 如图 14-1, 以右手握住 z 轴, 让右手的四指从 x 轴正向以 90° 的角度转向 y 轴正向时, 自然伸出的大拇指方向就是 z 轴正向. 这种坐标系叫做右手坐标系. 在右手坐标系中, 从后到前的方向为 x 轴的正向, 从左到右的方向为 y 轴的正向, 从下到上的方向为 z 轴的正向.

在空间直角坐标系中, 三个坐标平面将空间分为八个部分, 每一部分称为一个卦限. 八个卦限的编号如图 14-2 所示.

二、空间直角坐标系中点的坐标

设 M 为空间中的已知点, 过 M 作三个平面分别垂直 x 轴、 y 轴、 z 轴于 P 、 Q 、 R (如图 14-3), 点 P 、 Q 、 R 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标分别为 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$. 于是, 空间点 M 确定了唯一一个有序三元实数组 (x, y, z) ; 反之, 已知一个有序三元实数组 (x, y, z) , 我们可以在 x 轴取坐标为 x 的点 P , 在 y 轴取坐标为 y 的点 Q , 在 z 轴取坐标为 z 的点 R . 然后通过点 P 、 Q 、 R 分别作 x 轴、 y 轴、 z 轴的垂直平面, 这三个平面的交点 M , 便是由有序数组 $(x, y,$

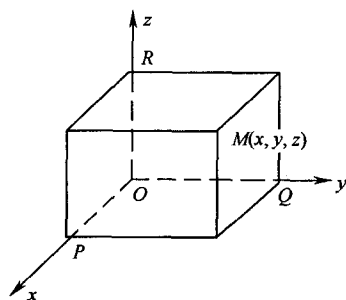


图 14-3

$z)$ 所确定的唯一的点. 因此, 空间中所有点与全体有序三元实数组之间建立了一一对应关系. 所以, 把数组 (x, y, z) 叫点 M 的坐标, 并记为 $M(x, y, z)$, 依次称 x, y, z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标. 八个卦限内的点的坐标 (x, y, z) 的符号分别如下表所示:

卦 限	x (横坐标)	y (纵坐标)	z (竖坐标)
I	+	+	+
II	-	+	+
III	-	-	+
IV	+	-	+
V	+	+	-

续上表

卦限	x (横坐标)	y (纵坐标)	z (竖坐标)
VI	-	+	-
VII	-	-	-
VIII	+	-	-

显然,原点的坐标为 $(0,0,0)$, x 轴、 y 轴、 z 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0)$ 、 $(0,y,0)$ 、 $(0,0,z)$,坐标平面 xOy 、 yOz 、 xOz 上点的坐标分别为 $(x,y,0)$ 、 $(0,y,z)$ 、 $(x,0,z)$.

例1 分别写出点 $(1,2,3)$ 关于 x 轴、 y 轴、 z 轴和坐标平面 xOy 、 yOz 、 xOz 及原点的对称点的坐标.

解:点 $(1,2,3)$ 分别关于 x 轴、 y 轴、 z 轴对称的点的坐标为 $(1,-2,-3)$ 、 $(-1,2,-3)$ 、 $(-1,-2,3)$;

点 $(1,2,3)$ 分别关于坐标平面 xOy 、 yOz 、 xOz 对称的点的坐标为 $(1,2,-3)$ 、 $(-1,2,3)$ 、 $(1,-2,3)$;

点 $(1,2,3)$ 关于原点对称的点的坐标为 $(-1,-2,-3)$.

三、空间两点之间的距离

已知空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$,求 M_1 和 M_2 之间的距离 d .

过 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体,如图14-4,则

$$\begin{aligned} d^2 &= M_1M_2^2 = M_1N^2 + NM_2^2 \\ &= P_1P_2^2 + Q_1Q_2^2 + R_1R_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \end{aligned}$$

所以

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (14-1)$$

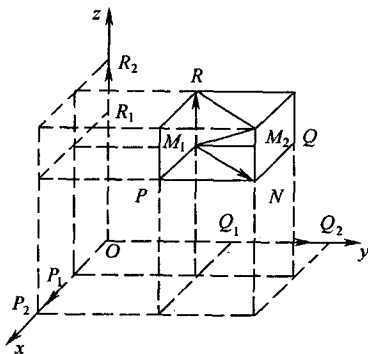


图 14-4

该公式称为空间两点间距离公式,如图 14-4 所示.特别地,空间任意点 $M(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离为 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

例 2 求证以 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(3, 1, 5)$ 、 $C(2, 4, 3)$ 三点为顶点的三角形为直角三角形.

证明: 因为

$$AB^2 = (3-1)^2 + (1-2)^2 + (5-3)^2 = 9,$$

$$BC^2 = (2-3)^2 + (4-1)^2 + (3-5)^2 = 14,$$

$$AC^2 = (1-2)^2 + (2-4)^2 + (3-3)^2 = 5,$$

$$\text{所以 } BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

即 三角形 ABC 为直角三角形.

例 3 在 x 轴上求一点 P , 使它与点 $Q(4, 1, 2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.

解: 设 x 轴上点 P 的坐标为 $(x, 0, 0)$, 由两点间距离公式得

$$d^2 = (4-x)^2 + (1-0)^2 + (2-0)^2,$$

$$\text{即得 } x^2 - 8x - 9 = 0,$$

$$x = 9 \text{ 或者 } x = -1,$$

故所求的点为 $P_1(9, 0, 0)$ 或 $P_2(-1, 0, 0)$.

例 4 z 轴上求一点, 使它与 $A(-4, 1, 7)$ 、 $B(3, 5, -2)$ 两点的距离相等.

解: 因所求的点在 z 轴上, 所以可设该点的坐标为 $M(0, 0, z)$, 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

$$\text{即 } \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-5)^2 + (z+2)^2}$$

$$\text{两边去根号, 解得 } z = \frac{14}{9},$$

故所求点的坐标为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$.

四、球面方程

作为空间两点间的距离公式 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ 的一个简单运用是求球面的方程. 根据空间两点间的距离公式, 可以求得以 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 为中心, $r (r > 0)$ 为半径的球面方程为:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

其中 (x, y, z) 是球面上任意点的坐标.特别地,中心在原点, $r(r > 0)$ 为半径的球面方程是:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

例 5 求中心在 $(1, 1, 0)$,半径为 2 的球面方程,并验证点 $(1, 1, -2)$ 在球面上.

解: 设 (x, y, z) 是球面上任意点的坐标,中心在 $(1, 1, 0)$,半径为 2 的球面方程为:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 0)^2 = 4.$$

将点 $(1, 1, -2)$ 的坐标代入方程 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$ 中,方程成立,即点 $(1, 1, -2)$ 在所求的球面上.

习 题 14-1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

A $(1, -2, 3)$; B $(2, 3, -4)$; C $(2, -3, -4)$; D $(-2, -3, 1)$.

2. 当 $P(x, y, z)$ 处于以下位置时,指出它的坐标所具有的特点:

(1) $P(x, y, z)$ 在平面 xOz 上;

(2) $P(x, y, z)$ 在 Ox 轴上;

(3) $P(x, y, z)$ 在与平面 xOz 平行且距离为 2 的平面上;

(4) $P(x, y, z)$ 在与 Oz 轴垂直且与原点距离为 5 的平面上.

3. 在空间直角坐标系中作出下列各点:

(1) A $(1, 2, 3)$; (2) B $(2, 0, 0)$; (3) C $(3, 0, 2)$; (4) D $(2, -1, 1)$

4. 求在 y 轴上求与两点 A $(-4, 1, 7)$ 和 B $(3, 5, -2)$ 等距离的点.

5. 在 yOz 平面上,求与三个已知点 A $(3, 1, 2)$ 、B $(4, -2, -2)$ 、C $(2, 4, 3)$ 等距离的点.

6. 求点 M $(2, -3, -1)$ (1) 关于各坐标平面; (2) 关于各坐标轴; (3) 关于坐标原点对称的点的坐标.

7. 一立方体一个顶点在原点,三条棱分别在三条坐标轴的正半轴上,棱长为 a ,写出它的八个顶点的坐标.

8. 写出球面方程:

(1) 球心在 $(1, -1, 2)$, 半径为 5;

(2)球心在原点,半径为 4.

讨 论 题

1. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴、各坐标平面的距离.
2. 在平面直角坐标系和空间直角坐标系中,一切 $x=b$ (b 为常数) 的点构成的图形分别是什么?
3. 自点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标平面和坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.
4. 过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点分别有什么特点?

第二节 方向余弦与方向数

前面我们已经学习了平面向量的概念及其运算,下面我们进一步讨论空间向量的一些运算和性质.

一、空间向量的坐标

设沿 x 轴、 y 轴、 z 轴分别取单位向量 i, j, k , 并把它们称为基本单位向量.

设向量 $r = \overrightarrow{OM}$, 起点为原点, 终点为 $M(x, y, z)$, 过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴, 与这三条轴的交点分别为 P, Q, R . 显然, 过点 M 垂直于 x 轴和垂直于 y 轴的两个平面的交线 MM' 垂直于 xOy 平面, 这里 M' 是这条交线在 xOy 平面上的垂足, 如图 14-5. 由向量加法的多边形法则, 我们有:

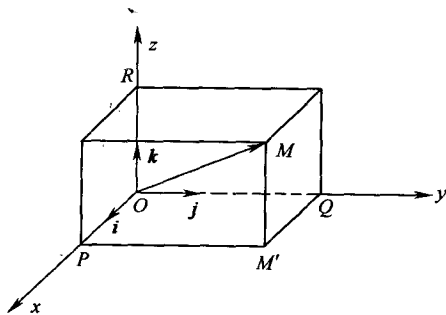


图 14-5

$$r = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = xi + yj + zk.$$

显然, 向量 r 与其终点 M 之间构成一一对应关系, 即 r 与三元有序数组 x, y, z 之间存在一一对应, 因此向量 r 由有序数组 x, y, z 唯一确定, 我们把这个有序数组叫做向量 r 的坐标, 并记为: $r = \{x, y, z\}$.

利用向量 $r = \overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式 $r = \{x, y, z\}$, 我们容易得到空间一般向量的坐标表达式:

设已知空间的两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$; 作以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为起点, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 如图 14-6. 连接 $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$,

$$\text{有 } \overrightarrow{OM_1} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} = \{x_1, y_1, z_1\},$$

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} = \{x_2, y_2, z_2\},$$

于是 $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$.

$$= (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

记 $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$.

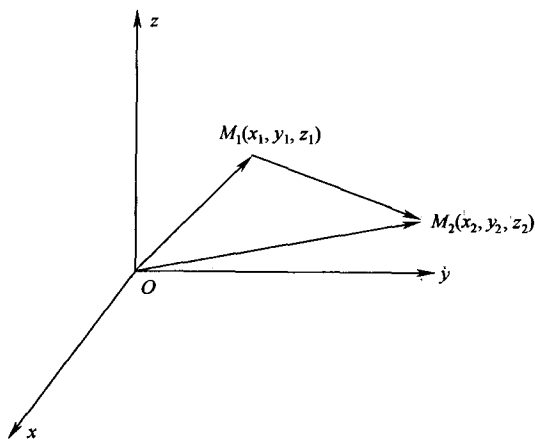


图 14-6

则 $\overrightarrow{M_1M_2} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

我们称 a_x, a_y, a_z 为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标.

综上所述,空间任一向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标等于它的终点 M_2 坐标与始点 M_1 对应坐标的差.

二、空间向量的线性运算

利用向量的坐标很容易进行向量的线性运算. 设:

$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \{a_x, a_y, a_z\} + \{b_x, b_y, b_z\} \\ &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) + (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ &= (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k} \\ &= \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}; \end{aligned}$$

同理,有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \{a_x, a_y, a_z\} - \{b_x, b_y, b_z\} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}; \\ \lambda\mathbf{a} &= \lambda\{a_x, a_y, a_z\} = \lambda(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}. \end{aligned}$$

这里 λ 是任意实数.

显然, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 的充要条件是 $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$.

例 1 已知 $\mathbf{a} = \{2, -1, -3\}$, $\mathbf{b} = \{2, 1, -4\}$, 求 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

解: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{2+2, -1+1, -3-4\} = \{4, 0, -7\}$;

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \{2-2, -1-1, -3-(-4)\} = \{0, -2, 1\};$$

$$3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = \{6, -3, -9\} - \{4, 2, -8\} = \{2, -5, -1\}.$$

三、向量的方向角与方向余弦

我们知道,向量是由长度(也叫模)和方向确定的,如果非零向量 \mathbf{a} 的坐标为 $\{a_x, a_y, a_z\}$, 那么,它的长度和方向也可以用其坐标来表示.

向量 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, 作向量 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}$, 则

$\overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, a_z\}$, 点 M 的坐标为 $\{a_x, a_y, a_z\}$,

因此向量的模为: $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.