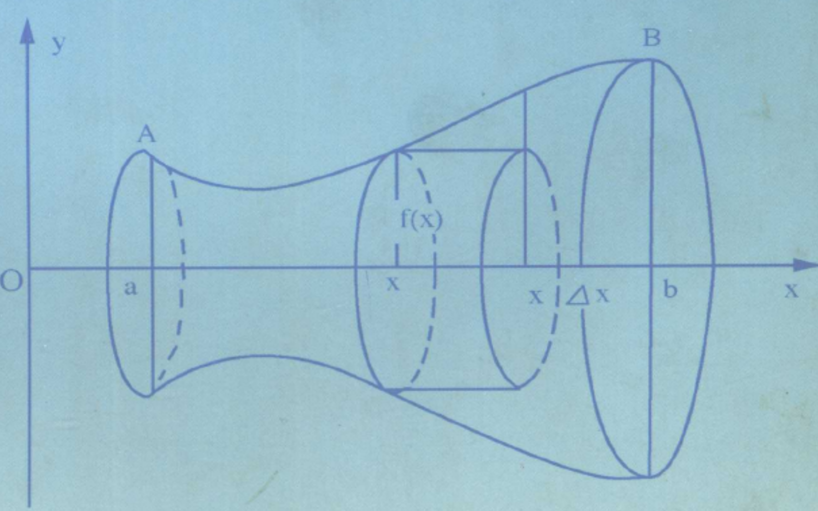
成人高等教育教材

微积分
学习指导与训练

北京市教育委员会



同 心 出 版 社

成人高等教育教材

微积分学习指导与训练

北京市教育委员会

主　编　于仲云

编　著　刘书田　冯翠莲

主　审　范培华

同　心　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导与训练/北京市教育委员会．一北京：同心出版社，1999.7
成人高等教育教材
ISBN 7-80593-389-8

Ⅰ．微…　Ⅱ．北…　Ⅲ．微积分-成人教育：高等教育-教学参考资料　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 19937 号

同心出版社出版
(北京市东单西裱褙胡同 34 号)
邮编：100734　电话：(010)65298830
北京华威冶金印刷厂　新华书店经销
1999 年 7 月第 1 版　1999 年 7 月第 1 次印刷
787×1092 毫米　16 开本　11.5 印张
字数：240 千字　印数：1—10000 册
定价：15.00 元

编者的话

《微积分》作为高等教育的公共必修课，因其基础性强，学习起来又有一定的难度，而且学生必须通过自己阅读、独立思考和做一定数量的习题，才能逐步达到学懂、学会、掌握和灵活应用的程度，因此，该门课程一直倍受重视。我们从当前成人高等教育的实际出发，特编写了这本《微积分学习指导与训练》，它是与《微积分》教材（根据北京市教委审定的教学大纲编写的）配套的辅导教材，是学生学习《微积分》课程时的必备读物。

本书具有以下特点：

(1)从内容、选题、顺序编排等各方面都紧密结合教材和配合教学，而又比教材更加广泛、更加深入和便于学生自学。

(2)归纳概括了主要概念、定理、法则和公式，并着重分析和作深入浅出的说明，以使读者深入理解、增强记忆和正确运用。

(3)选题广泛、全面，既有概念题、计算题，又有证明题、应用题。用“讲思路举例题”和“举题型讲方法”相结合的作法，使读者思路畅通，达到融会贯通、举一反三、触类旁通的境界。

(4)本书各章最后都给出了自测题及参考答案。学生独立做这些题目是必要的，这是检查自己所学知识、掌握知识、积累知识和增强解题能力的过程，对复习总结每章所学内容是非常有益的。

学生在学习《微积分》课程时，通过自学《微积分学习指导与训练》，可以达到正确理解、灵活运用基本概念、基本定理、计算法则和公式的目的；可以提高思维能力、逻辑推理能力和分析判断能力；可以掌握解题思路、解题方法和解题程序；可以提高解题技巧，并纠正在运算方法和运算过程中易犯的错误。

本书可作为参加高等教育自学考试的学生学习《高等数学》课程的辅导教材，也可作为高等院校和高等技术院校师生讲授和学习《高等数学》课程时的参考书和辅导教材。

本书由北京大学范培华教授主审，并提出有益的建议。本书在编写过程中还参考了有关著作，在此，一并表示诚挚谢意。

编者

1999.6

目　录

第一章　函数　极限　连续

第二章　导数与微分

第三章　中值定理　导数应用

第四章　不定积分

第五章　定积分

第六章　二元函数微积分学简介

北京市成人高等院校财经类专业
《微积分》水平测试试题及参考答案

第一章　函数　极限　连续

Ⅰ　教学要求与说明

1．理解函数概念；会求函数的定义域和函数值．

2．了解函数的简单性质，会判断函数的奇偶性．

3．了解反函数概念，会求已知函数的反函数．

4．记住基本初等函数的主要性质及其图形，理解初等函数的意义．

5．了解复合函数的意义，熟练掌握将初等函数按基本初等函数的复合和四则运算形式分解．

6．了解数列极限、函数极限概念．

7．了解无穷小量、无穷大量的意义；了解无穷小量与变量极限的关系；会对无穷小量进行比较．

8．熟练掌握用极限的四则运算法则和两个重要极限求函数的极限．

9．理解函数连续性概念，会判定函数在点 x_0 处连续与间断，会讨论分段函数在其定义域上的连续性．

10．记住初等函数在其有定义的区间上是连续函数这一结论．

11．知道闭区间上连续函数的性质．

12．会求曲线的水平渐近线和铅垂渐近线．

本章的重点是函数概念、极限概念和连续概念；极限的运算法则和两个重要极限．

本章的难点是将初等函数按基本初等函数的复合和四则运算形式分解；判定函数在一点的连续性．

Ⅱ　解题思路与方法

一、函数概念

（一）内容要点

1．函数定义

以 x 为自变量，y 为因变量的函数记作

$$y=f(x),x\in D,y\in Z$$

其中，f 是对应法则，D 是函数的定义域，Z 是函数的值域．由于 f 和 D 是确定函数的两个要素，通常表示函数时，不写出值域 Z.

在理解函数定义时，应掌握以下三个问题：确定函数的定义域；判断两个函数是否相同；正确运用函数记号，会求函数值．

(1) 确定函数的定义域

确定函数的定义域就是求用解析表达式给出的函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 的取值范围．

(2) 判断两个函数相同

由于对应法则 f 和定义域 D 是确定两个函数的要素，因此，两个函数，当其定义域 D 和对应法则 f 都相同时，才表示同一函数．

(3) 求函数值

当函数 $y=f(x)$ 用解析表达式表示时，将表达式中的 x 代以 x_0，便得到该函数在自变量取 x_0 时的函数值，记作

$$f(x_0) \text{ 或 } y_{|x}=x_0$$

对分段函数求函数值 $f(x_0)$ 时，要依据 x_0 所在区间，用 $f(x)$ 相对应的表达式来求．

2. 反函数

已知函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若其值域是 Z，它的反函数记作

$$x=f^{-1}(y),y\in Z$$

习惯上，函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z$.

实际上，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数．

(1) 求反函数的程序

首先，由已知函数式 $y=f(x)$ 中解出 x，得到关系式 $x=f^{-1}(y)$；

其次，将关系式 $x=f^{-1}(y)$ 中之字母 x 与 y 互换，得到所求的反函数．

(2) 求函数的值域

已知函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域就是函数 $y=f(x)$ 的值域．

(二) 例　题

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{81-x^2}}{\ln|x-5|}$　　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\arccos\dfrac{2x-1}{7}$

解　(1) 这是分式．分子、分母分别讨论：

对 $\sqrt{81-x^2}$，因偶次根的根底式应非负，所以有 $81-x^2\geqslant 0$，即 $-9\leqslant x\leqslant 9$　或写成区间 $[-9,9]$

对分母 $\ln|x-5|$，因对数符号下的式子应为正，且分母不能为零，所以有

$$\begin{cases} x-5\neq 0 \\ |x-5|\neq 1 (\text{因 } \ln 1=0) \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x\neq 5 \\ x\neq 4, x\neq 6 \end{cases}$$

写成区间为 $(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$.

分子、分母自变量取值范围的公共部分为所求的定义域，即函数的定义域是 $[-9,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,9]$.

(2) 该函数是两项和．每项各自讨论：

对第一项$\frac{1}{1-x^2}$,应有 $1-x^2\neq 0$,x 的取值范围是 $x\neq\pm 1$,即

$$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

对第二项 $\arccos\frac{2x-1}{7}$,因反余弦符号下的式子必须在区间$[-1,1]$上取值,所以有

$$-1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1 \qquad -7\leqslant 2x-1\leqslant 7 \qquad -3\leqslant x\leqslant 4$$

写成区间则为$[-3,4]$,两项 x 取值的公共部分为$[-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,4]$,这就是所求的定义域.

例 2 判断下列各对函数是否相同,并说明理由:

(1)$y=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$

(2)$y=\sqrt{(1-x)(2+x)}$ 与 $y=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{2+x}$

(3)$y=\ln(x^2-3x+2)$ 与 $y=\ln(x-1)+\ln(x-2)$

(4)$y=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 与 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

(5)$y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$

解 (1) 按根式乘积性质,有

$$\sqrt{x(x-1)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$$

函数 $y=\sqrt{x(x-1)}$ 的定义域是

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x-1\geqslant 0\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x\leqslant 0\\ x-1\leqslant 0\end{cases} \quad 即\ x\geqslant 1\ 或\ x\leqslant 0.$$

函数 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$ 的定义域,显然是 $x\geqslant 1$.

两个函数的定义域不同,故二者不同.

(2) 按根式乘积性质,有

$$\sqrt{(1-x)(2+x)}=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{2+x}$$

可以求出,两个函数的定义域都是$[-2,1]$. 故二者相同.

(3) 按对数性质,有

$$\ln(x^2-3x+2)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$$

等式左端的函数

$$\ln(x^2-3x+2)=\ln[(x-1)(x-2)]$$

其定义域是$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$;而等式右端的函数

$$\ln(x-1)+\ln(x-2)$$

的定义域是$(2,+\infty)$.

两个函数的定义域不同,故二者不同. 事实上,等式

$$\ln(x^2-3x+2)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$$

仅在区间$(2,+\infty)$内成立.

(4) 按对数性质,有

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

可以求出，两个函数的定义域都是$(-1,1)$，故二者相同．

(5) 两个函数的定义域相同，都是$(-\infty,+\infty)$；但对应法则不同．因为

$$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$$

故二者不同．

例 3 求函数 $y=f(x)=\dfrac{1-3x}{1+x^2}$ 在 $x=-2$，$x=0$，$x=2$ 处的函数值．

解 函数 $y=f(x)$ 在 $x=-2$ 处的函数值可表示为

$$f(-2) \text{ 或 } y_{|x=-2}$$

为求函数在 $x=-2$ 处的函数值，须将 -2 代换解析表示式$\dfrac{1-3x}{1+x^2}$中的 x，进行运算，可得函数值

$$f(-2)=\frac{1-3\times(-2)}{1+(-2)^2}=\frac{7}{5}$$

或
$$y_{|x=-2}=\frac{1-3x}{1+x^2}\bigg|_{x=-2}=\frac{1-3\times(-2)}{1+(-2)^2}=\frac{7}{5}$$

同样，将 0 代换表示式$\dfrac{1-3x}{1+x^2}$中的 x，得函数值

$$f(0)=\frac{1-3\times 0}{1+0^2}=1$$

或
$$y_{|x=0}=\frac{1-3x}{1+x^2}\bigg|_{x=0}=\frac{1-3\times 0}{1+0^2}=1$$

将 2 代换$\dfrac{1-3x}{1+x^2}$中的 x，得

$$f(2)=\frac{1-3\times 2}{1+2^2}=-1$$

例 4 设 $f(x)=x^2+ax+b$，其中 a，b 为待定常数

(1) 已知 $f(-3)=f(2)=0$，求这个函数；

(2) 求 $f(-x)$，$f(\dfrac{1}{x})$，$f(x_0+h)-f(x_0)$.

解 (1) 求这个函数，就是确定 $f(x)$ 的表示式 x^2+ax+b 中未知的常数 a 和 b. 由 $f(-3)=0$，$f(2)=0$，即将 $x=-3$，$x=2$ 分别代入 $f(x)$ 的表示式中，得方程组

$$\begin{cases}(-3)^2+a(-3)+b=0\\ 2^2+a\times 2+b=0\end{cases}$$

解之，得 $a=1$，$b=-6$. 所以所求函数为 $f(x)=x^2+x-6$

(2) 为求 $f(-x)$，须用 $-x$ 代换 x^2+x-6 中的 x，得

$$f(-x)=(-x)^2+(-x)-6=x^2-x-6$$

用$\dfrac{1}{x}$代换 x^2+x-6 中的 x，得

$$f(\frac{1}{x})=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x}-6=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-6$$

同理 $$f(x_0+h)-f(x_0)=[(x_0+h)^2+(x_0+h)-6]-(x_0{}^2+x_0-6)=(2x_0+1)h+h^2$$

例 5 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f(f(x)),f(f(f(x)))$.

解 按求函数值的思路,为求 $f(f(x))$,须用 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 代换 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 中的 x. 于是

$$f(f(x))=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$$

将 $f(f(x))$ 的表示式代换 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 中的 x,得

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{1-f(f(x))}=\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$$

例 6 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x & -1\leqslant x<0\\ 1 & x=0\\ 2+x^2 & 0<x\leqslant 1\end{cases}$,(1) 求函数的定义域;(2) 求 $f(-1),f\left(-\dfrac{1}{2}\right),f(0),f\left(\dfrac{1}{3}\right),f(1)$;(3) 画出函数的图形.

解 这是分段函数,该函数用三个数学式子表示:当 $x\in[-1,0)$ 时,$f(x)=2x$;当 $x=0$ 时,$f(x)=1$;当 $x\in(0,1]$ 时,$f(x)=2+x^2$.

(1) 由已知分段函数的表示式知,自变量 x 的取值范围有三部分:$x\in[-1,0)$,$x=0$ 和 $x\in(0,1]$. 因此,该函数的定义域是这三个部分之总和,即区间$[-1,1]$.

(2) 由于 $-1\in[-1,0)$,$-\dfrac{1}{2}\in[-1,0)$,应由区间$[-1,0)$ 上相对应的表达式 $f(x)=2x$ 来求 $f(-1)$ 和 $f(-\dfrac{1}{2})$:

$$f(-1)=2\times(-1)=-2$$

$$f(-\frac{1}{2})=2\times(-\frac{1}{2})=-1$$

由于$x=0$时,相对应的表达式$f(x)=1$,故$f(0)=1$.

由于$\dfrac{1}{3}\in(0,1]$,$1\in(0,1]$,应用区间$(0,1]$上相对应的表达式 $f(x)=2+x^2$ 来求 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 和 $f(1)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{19}{9}$$

$$f(1)=2+1^2=3$$

(3) 函数的图形如图 1-1 所示.

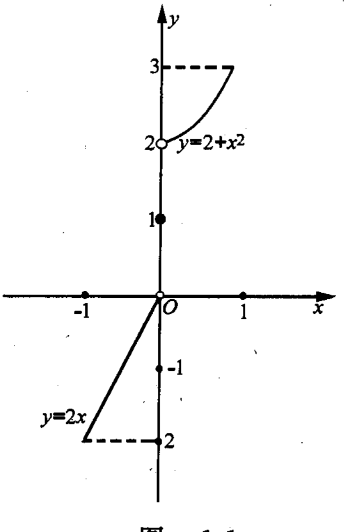


图 1-1

例 7 求下列函数的反函数：

(1) $y=f(x)=x^3+2$

(2) $y=f(x)=2^{x-1}$

解 (1) 由已知关系式 $y=x^3+2$ 解出 x，得

$$x=\sqrt[3]{y-2}\text{（这是 }x=f^{-1}(y)\text{）}$$

将字母 x 与 y 互换得所求的反函数

$$y=\sqrt[3]{x-2}\text{（这是 }y=f^{-1}(x)\text{）}$$

(2) 因指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数．由此，对已知关系式两端取以 2 为底的对数，得

$$\log_2 y=(x-1)\log_2 2\quad(\log_2 2=1)$$

即
$$x=1+\log_2 y$$

按习惯写法，所求反函数为 $y=1+\log_2 x$

例 8 已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，且 $f(x)=\ln(1-x)$，求 $y=g(x)$．

解 在同一直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称．由此知，这是求 $y=f(x)$ 的反函数．

设 $y=\ln(1-x)$，由此式解出 x（写出指数式），得

$$1-x=e^y\qquad x=1-e^y$$

于是，所求函数 $y=g(x)=1-e^x$．

例 9 设 $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$，求 $f^{-1}(3)$．

分析 按反函数定义，若 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$，则有 $x=f^{-1}(f(x))$．由此式知，当 $f(x)=3$ 时，所对应的 x 即为所求．

解 对 $y=f(x)$，因 $x=f^{-1}(f(x))$．所以将 3 代入已知式

$$f(x)=\frac{4x}{x-1}$$

中之左端，所求 x 的值即为 $f^{-1}(3)$．于是

$$3=\frac{4x}{x-1}$$

可得 $x=-3$，所以

$$f^{-1}(3)=-3$$

例 10 求函数 $y=2+3\sin x$ 的值域．

解 先求已知函数的反函数，再求反函数的定义域．

易求得已知函数的反函数是 $x=\arcsin\dfrac{y-2}{3}$ （这是 $x=f^{-1}(y)$）而该函数的定义域是$[-1,5]$．故所求的值域是$[-1,5]$．

本例，也可直接观察确定函数的值域．

由于 $\sin x$ 的值域是$[-1,1]$，自然 $3\sin x$ 的值域就是$[-3,3]$，所以 $2+3\sin x$ 的值域就是$[-1,5]$．

二、函数的奇偶性

（一）内容要点

1. 函数奇偶性定义

设函数 $f(x)$ 定义在以原点为对称的区间 D 上，对 $x \in D$，若 $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数或偶函数．

2. 奇偶函数的性质

(1) 奇函数与奇函数之和仍为奇函数；

(2) 偶函数与偶函数之和仍为偶函数；

(3) 奇函数与偶函数之积为奇函数；

(4) 奇函数与奇函数之积为偶函数；

(5) 偶函数与偶函数之积为偶函数．

判定函数的奇偶性，一般是根据奇偶性的定义；对给定的函数 $f(x)$，先计算 $f(-x)$，然后与 $f(x)$ 对照：

若 $f(-x) = f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数；

若 $f(-x) = -f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数；

否则，则 $f(x)$ 为非奇非偶函数．

有时，也用奇偶函数的性质判定函数的奇偶性．

（二）例　题

例 1　判定下列函数的奇偶性：

(1)$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$　　(2)$f(x) = 1 + \sin x$　　(3)$f(x) = \log_a(\sqrt{x^2+1} + x)$

解　用奇偶函数的定义判定．

(1) 已知函数的定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

因

$$f(-x) = e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}} = f(x)$$

所以 $f(x)$ 为偶函数．

(2) 已知函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$. 因

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x$$

又　　$f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$

所以 $f(x) = 1 + \sin x$ 是非奇非偶函数．

(3) 已知函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$. 因

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a[\sqrt{(-x)^2+1} + (-x)] \\ &= \log_a(\sqrt{x^2+1} - x) \end{aligned}$$

$$=\log_a \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\log_a \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=-\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

所以，所给函数是奇函数．

例2 设 $a>0$，且 $a\neq 1$，若 $\varphi(x)$ 是奇函数，则 $F(x)=\varphi(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$ 是(　　).

A. 奇函数　B. 偶函数　C. 非奇非偶函数　D. 奇偶性与 a 的值有关

解 设 $f(x)=\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{1-a^x}{2(a^x+1)}$，则所给函数可看作是两个函数的乘积．先判定 $f(x)$ 的奇偶性．因

$$f(-x)=\frac{1-a^{-x}}{2(a^{-x}+1)}=\frac{a^x-1}{2(1+a^x)}=-f(x)$$

可知 $f(x)$ 是奇函数．由奇偶函数的性质知，$F(x)=\varphi(x)\cdot f(x)$ 为偶函数．选 B.

例3 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x & -\pi\leqslant x<0\\ \cos x+x & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$，证明 $f(x)$ 是偶函数．

证一 用定义证明．为便于理解，已知函数可写作

$$f(x)=\begin{cases}\cos x-x & -\pi\leqslant x<0\\ 1 & x=0\\ \cos x+x & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$$

由于

$$f(-x)=\begin{cases}\cos(-x)-(-x) & -\pi\leqslant(-x)<0\\ 1 & -x=0\\ \cos(-x)+(-x) & 0<(-x)\leqslant\pi\end{cases}$$

即

$$f(-x)=\begin{cases}\cos x+x & 0<x\leqslant\pi\\ 1 & x=0\\ \cos x-x & -\pi\leqslant x<0\end{cases}$$

可知 $f(-x)=f(x)$，所以该函数是偶函数．

证二 用奇偶函数的性质证明．

设 $g(x)=\cos x, x\in[-\pi,\pi]$，$\varphi(x)=|x|, x\in[-\pi,\pi]$，则 $f(x)=g(x)+\varphi(x)$，$x\in[-\pi,\pi]$. 因 $g(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是偶函数，而两个偶函数之和是偶函数，故 $f(x)$ 是偶函数．

三、初等函数的构成与分解

(一) 内容要点

1. 基本初等函数

基本初等函数是指下列六类函数：

常量函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数．

2. 复合函数

已知两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，将 $\varphi(x)$ 代换 $f(u)$ 中之 u，得到的函数 $y=f(\varphi(x))$，称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数．通常称 f 为外层函数，φ 为内层函数，u 为中间变量．

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合而成的函数，统称为初等函数．

初等函数是微积分研究的主要对象．这里，读者需要掌握两方面的问题：

(1) 由基本初等函数构成初等函数；

(2) 将初等函数分解成由基本初等函数复合和四则运算而成的形式．

我们强调指出，对初等函数进行导数运算（第二章将要学习的内容）时，必须熟练掌握上述第二方面的问题．

（二）例　题

例 1　已知函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=1-x^2$，试构成复合函数 $y=f(\varphi(x))$．

解　按复合函数定义，将 $\varphi(x)=1-x^2$ 代换 $f(u)=\sqrt{u}$ 中之 u，得复合函数

$$y=f(\varphi(x))=\sqrt{1-x^2}$$

例 2　已知函数 $y=f(u)=\log_a u$，$u=\varphi(v)=\sqrt{v}$，$v=\psi(x)=\sin x$ 试构成复合函数 $y=f(\varphi(\psi(x)))$．

解　首先将 $\psi(x)=\sin x$ 代换 $\varphi(v)=\sqrt{v}$ 中之 v，得

$$\varphi(\psi(x))=\sqrt{\sin x}$$

其次，将 $\varphi(\psi(x))=\sqrt{\sin x}$ 代换 $f(u)=\log_a u$ 中之 u，得到所求的复合函数

$$y=f(\varphi(\psi(x)))=\log_a\sqrt{\sin x}$$

说明　不是任何两个函数都能构成复合函数．例如，两个函数

$$y=f(u)=\ln u\qquad u=\varphi(x)=\sin x-1$$

将 $\varphi(x)=\sin x$ 代换 $f(u)=\ln u$ 中之 u，得

$$y=f(\varphi(x))=\ln(\sin x-1)$$

但该函数无意义．因为对 $\ln u$ 而言，须 $u>0$，而 $\sin x-1\leqslant 0$，所以 $\ln(\sin x-1)$ 对任何 x 值都无意义．

例 3　下列函数由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$　　(2) $y=\ln\cos x^2$

解　(1) 由内层函数向外层函数分解，就是按由自变量 x 确定因变量 y 的运算顺序进行．

对给定的 x，先计算幂函数 $\frac{1}{x}$，令 $v=\frac{1}{x}$；再由 v 计算正切函数 $\tan v$，令 $u=\tan v$；最后由 u 计算指数函数 e^u，得 $y=e^u$．

于是，函数 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$ 由下列基本初等函数复合而成：