教育部高职高专规划教材

高等数学

（下）

MATHS

主编 陈 魁
胡金德

中国财政经济出版社

教育部高职高专规划教材

高等数学（下）

陈魁 胡金德 编著

中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/陈魁，胡金德编著. —北京：中国财政经济出版社，2008.1
教育部高职高专规划教材
ISBN 978-7-5005-9972-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①陈…②胡… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 078701 号

中国财政经济出版社出版
URL：http：//www. cfeph. cn
E-mail：jiaoyu @ cfeph. cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码：100036
发行处电话：88190616 88190655（传真）
三河市新世纪印务有限公司印刷 各地新华书店经销
787×960 毫米 16 开 25 印张 409 000 字
2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月河北第 1 次印刷
定价：26.00 元
ISBN 978-7-5005-9972-2/O·0061
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

依据教育部关于高职高专学生培养目标和高职高专规划教材的编写原则，我们编写了“高等数学（下）”教材．其内容分两部分：第一篇线性代数，第二篇概率论与数理统计．作者编写教材时，力求突出高职高专教育特色，本着打好基础、够用为度的原则选写教材内容，使深度难度符合高职高专层次的教学要求．教材着重于基本概念、基本方法以及实际应用的叙述，定理只要求记住条件、结论及应用范围，去除了繁琐的推理证明，易于学生理解和接受．我们还选编了一些有＊号的内容，学时不够时可以删去，由教师酌情处理．作者力求做到体系清晰，重点突出，语言叙述通俗流畅，易教、易学、易懂，激发学生的学习兴趣．学生应在教师的讲授和帮助下，认真学习教材的基本内容，着重于基本概念、基本方法的理解和掌握，着重于掌握和提高分析问题解决问题的能力．

本书中有大量的例题，这些例题中有基本概念的运用题，有基本方法的训练题，有一题多解的开扩思路题，也有较灵活的综合题，还有不少联系实际的应用题，这些例题给读者提供了多方面的解决问题的方法，对巩固概念，掌握方法，提高分析问题和解决问题的能力都会有所帮助．

书中又给出大量的习题，这些题目内容全面、类型多样，为了帮助读者更好地学习这些知识、掌握这些内容，大部分习题都给出了较详细的解答，有的还给出了不止一种解法，希望读者认真做题，对每道题都要先自己做，做出来后或实在做不出来时再看解答，通过与习题解答的比较，找出并深刻认识自己的问题或不足，真正提高自己的能力.

本书由两位作者完成. 第一篇线性代数由胡金德教授编写，第二篇概率论与数理统计由陈魁教授编写. 整个工作得到了中国财政经济出版社的大力支持和帮助，谨在此表示衷心的感谢. 本书的不足或错误之处，敬请读者、专家批评指正.

编者

2007 年 2 月于清华园

内容提要

本书共两篇. 第一篇线性代数，内容有行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值、特征向量、二次型. 第二篇概率论与数理统计，内容有随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念、参数估计、假设检验. 本书内容适度，叙述语言流畅，通俗易懂，便于学生学习. 本书供高职高专院校使用，也可供数学要求较低的大学本科各专业使用，还可供渴望吸取这方面基础知识的科研人员、工程技术人员和教师使用.

目录

第一篇　线性代数

第二篇　概率论与数理统计

第一篇　线性代数

第 1 章

行 列 式

在线性代数中,行列式是一个重要的工具,本章在二、三阶行列式的基础上,介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法及解 n 个未知量 n 个方程的线性方程组的克莱姆法则.

§1.1 二、三阶行列式

对二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2, & (2) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

利用加减消元法,由

$b_2(1) - b_1(2)$ 得 $(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_2c_1 - b_1c_2$,

$a_2(1) - a_1(2)$ 得 $(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2$.

当 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时,方程组(1.1)有惟一解

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

由此可以看出,当 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时,方程组(1.1)的解是一个分式,其分子、分母均是两两乘积的差,为了方便,也为了推广,引入记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{1.1.3}$$

称为**二阶行列式**. a,b,c,d 称为二阶行列式的元素,a,b 位于行列式的第一行,c,d 位于行列式的第二行,a,c 位于第一列,b,d 位于第二列,而 a,d 所在的线称为主对角线,b,c 所在的线称为副对角线. 该二阶行列式的值是主对角元素之积减去副对角元素之积.

例 1.1.1　计算行列式的$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$的值.

解　$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 7 - 3 \times 5 = -8.$

例 1.1.2　计算行列式$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$的值.

解　$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1.$

例 1.1.3　解方程$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解　$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & x^2 \end{vmatrix} = x^2 - 2x = x(x-2) = 0$,故原方程有解 $x=0, x=2$.

把二阶行列式用到方程组(1.1.1),我们称二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

为方程组(1.1.1)的系数行列式,则当 $D \neq 0$ 时,方程组(1.1.1)的解为

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y &= \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

其中 D_1 是把系数行列式 D 中 x 的系数用右端常数项替换后得到,D_2 是把 D

中 y 的系数用右端常数项替换后得到.

例 1.1.4 用行列式解下列线性方程组

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

解 由系数行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-2) = 5 \neq 0,$$

故题设方程组有惟一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10.$$

由(1.1.4)式,得方程组的解是

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{5}{5} = 1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-10}{5} = -2.$$

对三个未知量三个方程的线性方程组有完全类似的结果. 为了便于进一步推广,这里把未知量表示成 x_1, x_2, x_3,未知量的系数用带双下标的 a_{ij} 表示,其中第 1 个下标 i 表示该系数在第 i 个方程,第 2 个下标 j 表示它是未知量 x_j 的系数,例如 a_{23} 表第二个方程中未知量 x_3 的系数. 这样,一个三元一次方程组可以写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

利用加减消元法,消去 x_2, x_3 后,可以得到

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23})x_1 \\ &\quad = (b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{22}a_{31} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{32}a_{23}). \end{aligned}$$

同样消去 x_1, x_3 可以得到 x_2 的,消去 x_1, x_2 可以得到 x_3 的完全类似的表示式,为了方便记忆,这里引入三阶行列式,我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是一个**三阶行列式**,其值规定为

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.1.6)$$

按上述规定,三行列式共有3! =6 项,每项都是三个元素的乘积,这三个元素的第1下标与第2下标均无重复,故这三个元素取自不同的行、不同的列,且其中三项前面取正号,三项前面取负号.

三阶行列式的记忆方法称为**沙路法**,用图1-1表示,其中实线相连的三个元素的积取正号,虚线相连的三个元素的积取负号.

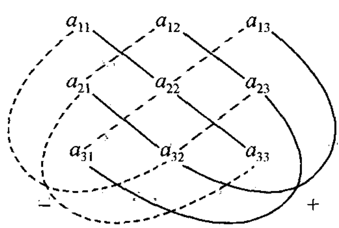

图1-1

例1.1.5 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$的值.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9+6\times3\times2+8\times7\times4- 8\times5\times2-6\times7\times9-1\times3\times4$

$= 45+36+224-80-378-12 = 305-470 = -165.$

例1.1.6 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$的值.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a+a+a-a^3-1-1 = -a^3+3a-2.$

类似地,对方程组(1.1.5),当其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组(1.1.5)有惟一解,且

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{1.1.7}$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.1.7 解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$\begin{aligned} D = &\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-3) \times 3 + 2 \times 1 \times 1 + 2 \times (-1) \times (-1) - (-1) \\ &\quad \times (-3) \times 1 - 2 \times 2 \times 3 - 1 \times 1 \times (-1) \\ &= -9 + 2 + 2 - 3 - 12 + 1 = -19 \neq 0, \end{aligned}$$

方程组有惟一解,其中

$$\begin{aligned} D_1 = &\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-3) \times 3 + 2 \times 1 \times 0 + (-1) \times 6 \times (-1) \\ &\quad - (-1) \times (-3) \times 0 - 2 \times 6 \times 3 - 1 \times (-1) \times 1 \\ &= -9 + 6 - 36 + 1 = -38, \end{aligned}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times 6\times 3+1\times 1\times 1+(-1)\times 2\times 0$$
$$-(-1)\times 6\times 1-1\times 2\times 3-1\times 0\times 1$$
$$=18+1+6-6=19,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$$
$$=1\times(-3)\times 0+2\times 6\times 1+1\times 2\times(-1)$$
$$-1\times(-3)\times 1-2\times 2\times 0-1\times(-1)\times 6$$
$$=12-2+3+6=19.$$

得
$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-1.$$

§1.2 n 阶行列式的定义

将二、三阶行列式推广到高阶行列式，有多种方法，这里我们采用数学归纳法，用低阶来定义高阶行列式，为此，我们先研究二、三阶行列式之间的联系，再把这种联系推广到 n 阶(n 是任意的正整数)行列式.

由三阶行列式的定义，整理得

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{32}-a_{23}a_{31})$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}. \tag{1.2.1}$$

由此可知，一个三阶行列式可以通过三个二阶行列式(1.2.1)来表示.

记