

中等职业教育教材 ZHONGDENG ZHIYE JIAOYU JIAOCAI

数 学

(下)

杨六山 郭道明 主编



中原农民出版社

中 等 职 业 教 育 教 材

数 学

(下)

杨六山 郭道明 主编

中原农民出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学. 下/杨六山, 郭道明主编. —郑州: 中原农民出版社, 2007. 12

ISBN 978-7-80739-086-2

I. 数… II. ①杨… ②郭… III. 数学—高等学校: 技术学校—教材 IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 132066 号

出版社: 中原农民出版社

(地址: 郑州市经五路 66 号 电话: 0371—65751257

邮政编码: 450002)

发行单位: 河南省新华书店

承印单位: 南阳市盛源印务有限公司

开本: 787mm×1092mm 1/16

印张: 11.5

字数: 250 千字

印数: 1—1 640 册

版次: 2007 年 12 月第 1 版

印次: 2007 年 12 月第 1 次印刷

书号: ISBN 978-7-80739-086-2

定价: 21.50 元

本书如有印装质量问题, 由承印厂负责调换

中等职业教育教材

《数学》编委会

主 审:王胜利

副主审:范长海 杨六山 李 琪

委 员:(以姓氏笔画为序)

马质璞 王传凯 王胜利

江红英 李 琪 李进德

杨子林 杨六山 范长海

主 编:杨六山 郭道明

副主编:(以姓氏笔画为序)

丁文敏 王正昂 王世恒

王全庆 张 弘 周恩河

胡永才 徐海如

编 者:(以姓氏笔画为序)

丁文敏 王正昂 王世恒

王全庆 杨六山 张 弘

周恩河 胡永才 徐海如

郭道明

写在前面的话

为了贯彻《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》的精神,落实《面向 21 世纪教育振兴行动计划》中提出的职业教育课程改革和教材建设规划,结合我校教学改革的实际,基础部组织编写了这套校本教材。

这套教材是根据教育部最新颁布的德育课程、文化基础课程和我校文化课教学的实际需求编写而成,并经南阳农校教材编写委员会审定通过。新教材的编写全面贯彻了教育部职业教育教学改革的文件精神,以社会需要和学生自身能力培养为出发点,注重学生的创新能力和实践动手能力的培养。

这套教材的编写,是我校教材建设史上的一次有益而大胆的尝试,是我校科研兴校方针的结晶。它更贴近学生实际,贴近社会需要,真实地反映了我校文化课教学改革及教学水平的现状。由于时间仓促、创作水平有限,这套教材很可能存在着这样或那样的不足和缺点,希望各位同仁在教学的过程中加强调研,广泛征求学生和同行的意见,掌握第一手材料,进一步完善该系列教材。同时,也为以后校本教材的开发提供借鉴。

孙伟东

关于数学校本教材的编写

在校领导热切指导和关怀及全校教职工的支持下,经过全体数学教师的精心策划编写,数学校本教材和大家见面了。本书编写的指导思想和特点如下:

一、校本教材编写的基本观点

1. 适应社会对中等职业学校学生的知识、技能的需要,搞好素质教育,培养学生的数学素质,为学生终身学习和专业基础课及实用技术课的学习打好数学基础。

2. 适应数学教学内容和教学方法的改革,满足我校模块教学和就业的需要。

二、教材编写的指导思想

认真落实《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》和《面向 21 世纪教育振兴行动计划》的各项精神。

1. 贯彻“以生为本,能力为本”的教育思想,突出培养学生的创新精神和实践动手能力。

2. 以现代数学思想、方法作指导对教材基本内容进行创新编排,使学生能掌握《中等职业学校数学教学大纲》要求的基本教学内容和方法。

3. 教材内容的编写注重时代气息,注重数学与日常生活联系,注重数学应用。每章内容主次分明,适当增加了数学的应用内容。

三、编写原则

1. 依据部颁《中等职业学校数学教学大纲》和河南省颁发的《中等职业学校数学教学大纲》,结合我校学生文化基础和专业课需要进行编写。

2. 处理好知识与能力的关系,以培养学生分析问题和解决问题的能力;处理好数学课与专业课的关系,注重数学应用;同时为“终身学习”打好数学基础。

3. 突出基本数学思想和基本数学方法。重要的数学思想和方法要在不同的知识层面上反复循环,使学生真正掌握。

4. 严格执行国家有关的技术标准和其他规定。

四、主要特点

1. 注重基础。根据中等职业学校学生的文化素质和数学素养普遍偏低等特点组织数学教材编写。减少教学内容,增强兴趣性,注重基础知识教育;降低知识起点和难度,降低对理论、概念、定理等的理解,重视数学的实用性教育,注

重培养学生使用计算工具的能力;在编写过程中,体现“应知应会”原则。

2. 注重数学文化传授,努力培养学生的学习兴趣。

3. 按模块数学的要求组织教学内容,注重数学课与专业课的对接,加大使用弹性。

五、内容编排的体系

校本教材按四个模块(计算机类、机电类、经管类、农牧类)进行编排,并且各模块的数学教学内容相对自成体系,仍按数学教材的正常顺序进行编写,这样又不失一般数学教材的系统性。不同模块需要的内容以不同标记标出,并且课后的习题既要适合数学素质教育,同时也要适合专业需要,与专业衔接紧密。

根据不同专业的不同要求,具体讲授内容安排如下:

1. 计算机类专业讲授内容为:集合、逻辑联结词、不等式的解法、函数基础知识、数列、三角函数基础、立体几何基础(点、线、面关系及基本立体图形的有关知识)、解析几何、排列组合基础。

2. 经管类专业讲授内容为:集合,逻辑联结词,不等式的解法,函数基础知识,数列,三角函数基础(偏重用计算器求三角函数值),排列、组合与二项式定理,概率与统计初步。

3. 机电类专业讲授内容为:集合、逻辑联结词、不等式的解法、函数基础知识、三角函数基础、平面几何、立体几何、解析几何。

4. 农牧类专业讲授内容为:集合、不等式的解法、函数基础知识、立体几何基础、解析几何基础、概率与统计初步。

以上所列内容中,集合、逻辑联结词、不等式的解法、函数基础知识为各专业学生必学的数学基础,其他分模块所列的内容是各个模块专业课所必需的。

本书由河南省南阳农校的丁文敏、王正昂、王世恒、王全庆、杨六山、张弘、周恩河、郭道明,河南省工业职业技术学院的胡永才,以及河南省南阳师范学院的徐海如编写。

虽然数学校本教材编写完成了,但因时间仓促,水平有限,在使用的过程中仍需要大家的呵护和支持,期盼大家批评指正,请多提宝贵意见和建议。

河南省南阳农校数学教研室

目 录

第一章	解析几何	(1)
一	基础知识	(1)
1.1	有向线段	(1)
1.2	两点间的距离	(4)
1.3	线段的中点坐标	(5)
二	曲线和方程	(7)
1.4	曲线和方程	(7)
1.5	求曲线的方程	(9)
1.6	求曲线的交点	(11)
三	直线	(13)
1.7	直线的倾斜角和斜率	(14)
1.8	直线方程的几种形式	(16)
1.9	两条直线的位置关系	(22)
四	圆	(36)
1.10	圆的标准方程	(36)
1.11	圆的一般方程	(38)
1.12	直线与圆的位置关系	(40)
1.13	圆与圆的位置关系	(43)
五	椭圆、双曲线与抛物线	(47)
1.14	椭圆及其标准方程	(47)
1.15	椭圆的几何性质	(49)
1.16	双曲线及其标准方程	(52)
1.17	双曲线的几何性质	(53)
1.18	抛物线及其标准方程	(57)
1.19	抛物线的几何性质	(59)
六	坐标轴的平移(选学)	(66)
第二章	立体几何	(77)
一	平面几何知识	(78)
2.1	图形的认识	(78)
2.2	三角形综合知识	(79)

2.3	四边形和多边形	(80)
2.4	圆的综合知识	(81)
2.5	立体图形的展开	(84)
2.6	相似与全等	(88)
二	立体几何	(89)
2.7	平面和平面的基本性质	(89)
2.8	直线与直线的关系	(93)
2.9	直线与平面的位置关系	(99)
2.10	平面与平面的关系	(108)
2.11	几种常见的立体图形	(117)
第三章	排列、组合与二项式定理	(135)
3.1	分类计数原理和分步计数原理	(135)
3.2	排列	(139)
3.3	组合	(144)
3.4	组合数的两个性质	(147)
3.5	二项式定理	(151)
第四章	概率与统计初步	(157)
一	概率初步	(157)
4.1	概率基础知识	(157)
4.2	古典概率的简单计算	(159)
二	统计初步(选学)	(165)
4.3	总体和样本	(165)
4.4	频率分布、直方图与概率密度曲线	(167)
4.5	正态分布	(170)
招工考试题库		(173)

第一章 解析几何

解析几何是基础性数学学科之一,是在坐标系的基础上用代数的方法来研究图形性质的一门数学学科.

在平面几何中研究图形时,我们主要是运用演绎推理的方法,适当借助直观,从平面图形的一些最基本的性质出发,推出其他的性质.而在平面解析几何中,我们将借助于坐标系,用坐标表示点,用方程表示曲线(包括直线),将几何问题转化为研究方程的代数问题;通过研究方程的特征来研究曲线的性质,或发现新的几何事实.这种用代数的方法来研究图形性质的方法,通常称为解析法或坐标法,它能使数和形有机地结合起来,从而更有效地解决一些数学问题.

平面解析几何研究的主要问题是:

- (1) 根据平面曲线上的点所适合的条件,求曲线的方程;
- (2) 根据平面曲线的方程,研究曲线的性质.

解析几何产生于 17 世纪初期.当时,科学的发展和技术的进步要求人们用运动和变化的观点来研究和解决科学技术中不断出现的新问题.1637 年,法国数学家笛卡尔在他的著作《几何学》中最先提出了解析几何的基本思想.解析几何的创立推动了微积分的产生,使数学由常量数学发展为变量数学;它大大促进了数学的发展以及数学在物理等学科中的广泛应用.恩格斯对这一创见给予了高度的评价.

在这一章里,我们主要学习平面解析几何的基础知识.在坐标系中,把点和坐标、曲线和方程等联系起来,通过对直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线的研究,学习用代数方法(坐标法)研究几何问题,并利用曲线的方程讨论曲线的几何性质.这些知识的学习,将对学生将来从事机械制造、电子电工、计算机应用以及园林规划、美术设计等工作起到重要的奠基作用.

一 基础知识

§ 1.1 有向线段

我们知道,数轴是规定了原点、正方向和长度单位的直线.任意一条直线都可以规定两个相反的方向.如果把其中一个方向作为正方向,那么相反的方向就是负方向.规定了正方向的直线叫做有向直线.在图中,通常用箭头表示有向直线的正方向(图 1-1).

同样,一条线段也可以规定两个相反的方向.即把线段的一个端点作为起点,另一个端点作为终点.规定了方向(即规定了起点和终点)的线段叫做有向线段.表示有向线段时,要

把表示起点的字母写在前面,表示终点的字母写在后面.如图1-2中的线段,如果规定A为起点、B为终点,它的方向就是从A到B,记作 $\overline{AB}$;相反,如果规定B为起点、A为终点,它的方向就是从B到A,记作 $\overline{BA}$. $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 是方向相反的两条有向线段.

如果选定一条线段作为长度单位,我们就可以量得任意一条线段的长度.线段AB的长度就是有向线段 $\overline{AB}$ 的长度.有向线段 $\overline{AB}$ 的长度记作 $|\overline{AB}|$.显然,有向线段的长度与它的方向无关.如图1-3中, $|\overline{AB}|=5$, $|\overline{BA}|=5$, $|\overline{AB}|=|\overline{BA}|$.

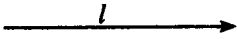


图 1-1

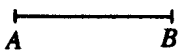


图 1-2

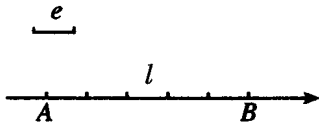


图 1-3

如果有向线段在有向直线 l 上或者与有向直线 l 平行,那么它的方向与 l 的正方向可能相同或者相反.例如,图1-3中 $\overline{AB}$ 与 l 的正方向相同, $\overline{BA}$ 与 l 的正方向相反.

根据有向线段 $\overline{AB}$ 与有向直线 l 的正方向相同或相反,分别在它的长度前面加上正号或负号,这样所得的数,叫做有向线段的数量(或数值).有向线段 $\overline{AB}$ 的数量用 AB 表示.如图1-3中 $AB=+5$ (在这里,正号同样可以省略,写成 $AB=5$), $BA=-5$,显然 $AB=-BA$.

因为数轴是直线,数轴上任意一点 P 的坐标 x ,实际上是以原点 O 为起点、 P 为终点的有向线段 $\overline{OP}$ 的数量,即 $OP=x$.例如,图1-4中点A、B的坐标分别是有向线段 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 的数量,即 $OA=-2$, $OB=3$.

对于数轴上的任意一条有向线段,它的数量与它的起点、终点的坐标有什么关系呢?下面我们来研究这个问题.

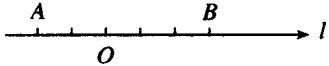


图 1-4

如图1-4中, $AB=5$, $\overline{AB}$ 的起点A的坐标 $x_1=-2$,终点B的坐标 $x_2=3$, $x_2-x_1=3-(-2)=5$

因而

$$AB = x_2 - x_1.$$

事实上,这个公式对于数轴上的任何一条有向线段都成立.设 $\overline{AB}$ 是数轴上的有向线段,点A、B的坐标分别为 x_1 、 x_2 ,O是数轴的原点.当A、B两点与原点O都不重合时,它们的位置关系有六种不同的情形.图1-4所示只是其中的一种情形.这时, $|AO|+|OB|=|AB|$.

而 $|AO|=-OA$, $|OB|=OB$, $|AB|=AB$,所以

$$-OA + OB = AB,$$

$$\text{即 } AB = OB - OA.$$

又 $OA = x_1$, $OB = x_2$, 于是

$$AB = x_2 - x_1.$$

同样可以证明,对于其他五种情况,这个公式也成立.容易验证,当点A或点B与原点O重合时,这个公式同样成立.因此,对于数轴上任何一条有向线段 $\overline{AB}$,它的数量AB和它的起点坐标 x_1 、终点坐标 x_2 之间都有如下关系:

$$AB = x_2 - x_1$$

求平行于 x 轴(或 y 轴)的有向线段 $\overline{AB}$ 的数量时,可先将 $\overline{AB}$ 投影到 x 轴(或 y 轴)上(图1-5).根据上面的公式, $AB = A_1B_1 = x_2 - x_1$ (或 $AB = A_1B_1 = y_2 - y_1$).

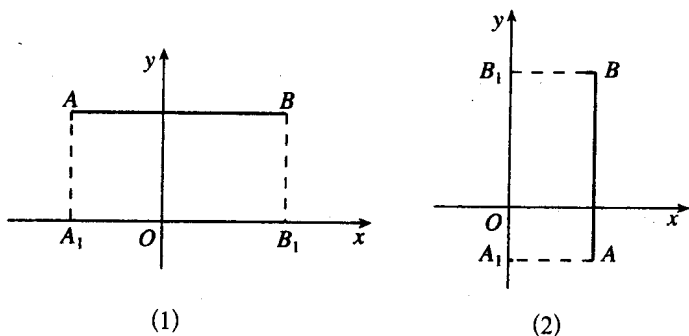


图 1-5

显然,数轴上(或与数轴平行)的有向线段 $\overline{AB}$ 的长度,即A、B两点间的距离,可按如下公式计算:

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

例 已知数轴上三点A、B、C的坐标分别是4、-2、-6,求 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 的数量和长度(图1-6).

解: $AB = (-2) - 4 = -6,$

$$|AB| = |-6| = 6;$$

$$BC = -6 - (-2) = -4,$$

$$|BC| = |-4| = 4;$$

$$CA = 4 - (-6) = 10,$$

$$|CA| = |10| = 10.$$

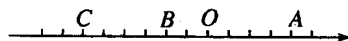


图 1-6

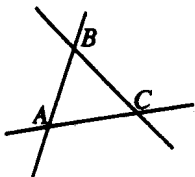
练习

1. 填空:

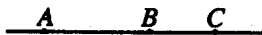
(1) 已知A、B两点,则经过A、B的直线有_____条,经过A、B的有向直线有_____条;

(2) 设三条直线两两相交于A、B、C,则图中的有向直线共有_____条;

(3) 设A、B、C是同一条直线上的三点,则图中共有_____条有向直线,_____条有向线段.



(第1题(2))



(第1题(3))

2. 已知数轴上三点 A, B, C 的坐标分别是 $-1, 2, 3$, 求 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 的数量和长度.
3. 数轴上有四点 A, B, C, D , 已知点 A, B 的坐标分别是 $2, 5, AC = 1, BD = -6$. 求点 C 和点 D 的坐标.
4. 已知数轴上有向线段 $\overline{AB}$ 的长度是 6 , 点 A 的坐标是 2 , 求点 B 的坐标.

§ 1.2 两点间的距离

根据数轴上任意两点间的距离公式, 我们就可以来求平面直角坐标系中任意两点之间的距离.

设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 是坐标平面内的任意两点(图 1-7), 过 P_1, P_2 分别作 x 轴、 y 轴的垂线 P_1M_1, P_1N_1 和 P_2M_2, P_2N_2 , 垂足分别是 $M_1(x_1, 0), N_1(0, y_1), M_2(x_2, 0), N_2(0, y_2)$, 并设直线 P_1N_1 和 P_2M_2 相交于点 Q . 则在 $\text{Rt}\triangle P_1QP_2$ 中, 根据勾股定理, 得

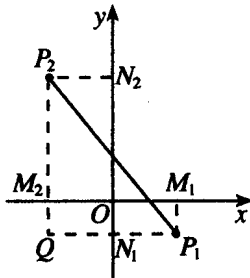


图 1-7

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1Q|^2 + |QP_2|^2. \\ \because |P_1Q| &= |M_1M_2| = |x_2 - x_1|, \\ |QP_2| &= |N_1N_2| = |y_2 - y_1|, \\ \therefore |P_1P_2|^2 &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \end{aligned}$$

于是得到 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 两点间的距离公式:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

例 1 求 $P_1(-3, 5)$ 和 $P_2(1, 2)$ 两点间的距离.

解: $|P_1P_2| = \sqrt{[1 - (-3)]^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

例 2 已知点 P 在 x 轴上, 它与点 $A(1, -3)$ 的距离等于 5 . 求点 P 的坐标.

解: 设点 P 的坐标为 $(x, 0)$, 根据题意知 $|AP| = 5$.

由两点间的距离公式, 得

$$\sqrt{(x-1)^2 + [0 - (-3)]^2} = 5,$$

$$\text{即 } \sqrt{(x-1)^2 + 9} = 5,$$

$$\text{两边平方, 得 } (x-1)^2 + 9 = 25,$$

$$\text{因此 } x-1 = \pm 4,$$

$$\text{所以 } x_1 = 5, x_2 = -3.$$

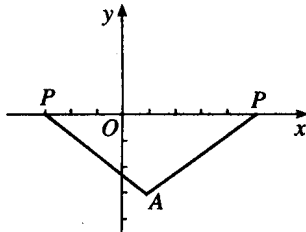


图 1-8

经检验,这两个值都是原方程的根.

因此,点 P 的坐标是 $(5,0)$ 或 $(-3,0)$ (图 1-8).

例 3 已知三角形的顶点 $A(-a,0)$ 、 $B(a,0)$ 和 $C(0,\sqrt{3}a)$ ($a>0$), 求证 $\triangle ABC$ 是等边三角形 (图 1-9).

证明:由两点间的距离公式,得

$$|AB| = \sqrt{[a - (-a)]^2 + (0-0)^2} = 2a,$$

$$|BC| = \sqrt{(0-a)^2 + (\sqrt{3}a-0)^2} = 2a,$$

$$|CA| = \sqrt{(-a-0)^2 + (0-\sqrt{3}a)^2} = 2a,$$

$$\therefore |AB| = |BC| = |CA|.$$

即 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

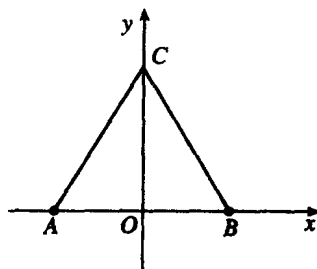


图 1-9

练习

1. 求下列两点间的距离:

(1) $(6,0), (-2,0)$;

(2) $(0,-4), (0,-1)$;

(3) $(6,0), (0,-2)$;

(4) $(2,1), (5,-1)$.

2. 已知点 $A(a,-5)$ 和点 $B(0,10)$ 的距离是 17, 求 a 的值.

3. 在 y 轴上有一点 P , 它与点 $A(4,-6)$ 的距离是 5, 求点 P 的坐标.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点是 $A(1,5)$ 、 $B(1,1)$ 、 $C(6,3)$, 求证 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

§ 1.3 线段的中点坐标

已知坐标平面内一条有向线段 $\overline{P_1P_2}$, 两个端点的坐标分别为 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$. 当点 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的中点时, 点 P 在 $\overline{P_1P_2}$ 上, 并把 $\overline{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$, 且 $|P_1P| = |PP_2|$.

即

$$\frac{P_1P}{PP_2} = 1.$$

下面来求中点 P 的坐标 (x, y) .

如图 1-10 所示, 过点 P_1 、 P 、 P_2 分别作 x 轴的垂线 P_1M_1 、 PM 、 P_2M_2 , 则垂足分别为 $M_1(x_1, 0)$ 、 $M(x, 0)$ 、 $M_2(x_2, 0)$. 根据平行线分线段成比例定理, 得

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|},$$

$$\text{即 } \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = 1.$$

其中 $M_1M = x - x_1$, $MM_2 = x_2 - x$,

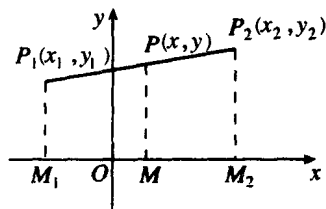


图 1-10

则 $\frac{x-x_1}{x_2-x} = 1$.

所以 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

同理可以求得 $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

因此,已知两点 P_1, P_2 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 时,有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的中点 P 的坐标是

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, y = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

例1 求连结 $M(3, 5), N(-1, -9)$ 两点的线段的中点坐标.

解:根据线段的中点坐标公式,得

$$x = \frac{3+(-1)}{2} = 1,$$

$$y = \frac{5+(-9)}{2} = -2.$$

因此,所求线段的中点坐标为 $(1, -2)$.

例2 已知有向线段 $\overline{AB}$, 它的中点坐标是 $(4, 2)$, 端点 A 的坐标是 $(-2, 3)$, 求另一个端点 B 的坐标.

解:设点 B 的坐标为 (x, y) , 由中点坐标公式知

$$4 = \frac{-2+x}{2}, 2 = \frac{3+y}{2}.$$

解之,得 $x = 10, y = 1$.

所以,端点 B 的坐标为 $(10, 1)$.

练习

1. 求连结下列两点的线段的中点坐标:

(1) $(3, 2), (7, 4)$;

(2) $(-3, 1), (2, 7)$;

(3) $(2, 8), (0, -2)$;

(4) $(-1, 2), (2, 5)$.

2. 设 $P(3, 2)$ 是连结两点 $P_1(2, y), P_2(x, 6)$ 的线段的中点, 求 x 和 y .

3. 已知两点 $A(3, -1), B(2, 1)$, 求点 A 关于点 B 的对称点的坐标.

习题 1.1

1. 已知数轴上 A, B 两点的坐标 x_1, x_2 分别取下列数值, 求 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的数量与长度:

(1) $x_1 = 8, x_2 = 6$;

(2) $x_1 = 5, x_2 = -3$;

(3) $x_1 = -4, x_2 = 0$;

(4) $x_1 = -9, x_2 = -11$.

2. 已知 A, B 是数轴上的两点, 点 B 的坐标是 x_2 , 根据下列条件求点 A 的坐标 x_1 :

(1) $x_2 = 3, AB = 5$;

(2) $x_2 = -5, BA = -3$;

$$(3) x_2 = 0, |AB| = 2; \quad (4) x_2 = -5, |AB| = 2.$$

3. 已知点 $P(x, 2)$ 、 $Q(-2, -3)$ 、 $M(1, 1)$, 且 $|PQ| = |PM|$, 求 x .

4. 已知点 M 的横坐标是 7, 点 M 到点 $N(-1, 5)$ 的距离等于 10, 求点 M 的纵坐标.

5. 三角形的三个顶点是 $A(2, 1)$ 、 $B(-2, 3)$ 、 $C(0, -1)$, 求这个三角形三条中线的长度.

6. 已知三点 $A(x, 5)$ 、 $B(-2, y)$ 、 $C(1, 1)$, 且点 C 平分线段 AB , 求 x, y .

二 曲线和方程

§ 1.4 曲线和方程

在函数一章, 我们已经学习了函数的图象, 知道一次函数 $y = kx + b$ 的图象是一条直线, 二次函数 $y = ax^2$ 的图象是一条抛物线等. 这些函数的解析式都可以看成是含有未知数 x, y 的二元方程, 这些函数的图象都是平面内的直线或曲线. 在坐标平面内, 任意给定一条直线或曲线是否总可以用一个含有 x, y 的方程来表示呢?

我们先看这样一个例子, 设 l 是两坐标轴所成的角位于第一、第三象限的平分线, 则 l 就是纵坐标和横坐标相等的点的轨迹. l 上任意一点 M 的坐标 (x, y) 都满足关系式 $y = x$, 即方程 $x - y = 0$. 这时, l 上任意一点的坐标 (x_0, y_0) 都是方程 $x - y = 0$ 的解; 反过来, 如果 (x_1, y_1) 是方程 $x - y = 0$ 的解, 即 $x_1 = y_1$, 那么以这个解为坐标的点 $M_1(x_1, y_1)$ 一定在这条平分线 l 上 (图 1-11).

又如, 函数 $y = ax^2$ 的图象是关于 y 轴对称的抛物线. 这条抛物线是所有以方程 $y = ax^2$ (即 $ax^2 - y = 0$) 的解为坐标的点组成的. 这就是说, 如果 $M(x_0, y_0)$ 是抛物线上的点, 那么 (x_0, y_0) 一定是这个方程 $ax^2 - y = 0$ 的解; 反过来, 如果 (x_1, y_1) 是方程 $ax^2 - y = 0$ 的解, 那么以它为坐标的点一定在这条抛物线上. 这样, 我们就说 $y = ax^2$ (即 $ax^2 - y = 0$) 是这条抛物线的方程 (图 1-12).

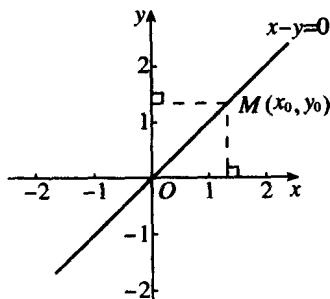


图 1-11

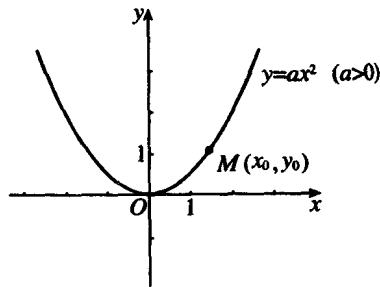


图 1-12

平面曲线可以看作是适合某种条件的点的集合或点的轨迹. 条件不同的点的集合构成不同的曲线. 一般地, 在平面直角坐标系中, 曲线 C 上的点 M 可以用它的坐标 (x, y) 来表示,

点所适合的条件可以用含有 x, y 的二元方程 $f(x, y) = 0$ 来表示. 这样, 就建立起了曲线 C 和方程 $f(x, y) = 0$ 之间的对应关系:

(1) 曲线 C 上任意一点的坐标都是方程 $f(x, y) = 0$ 的解;

(2) 以方程 $f(x, y) = 0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上.

那么, 这个方程叫做曲线的方程, 这条曲线叫做方程的曲线(图形).

由此可知, 如果曲线 C 的方程是 $f(x, y) = 0$, 那么点 $M(x_0, y_0)$ 在曲线 C 上的充要条件是 $f(x_0, y_0) = 0$.

例 1 证明: 以原点为圆心、半径等于 5 的圆的方程是 $x^2 + y^2 = 25$, 并判断 $M_1(3, -4)$ 、 $M_2(-2\sqrt{5}, 2)$ 是否在这个圆上.

证明: (1) 设 $M(x_0, y_0)$ 是圆上任意一点, 因为点 M 到原点的距离等于 5, 所以

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 5.$$

也就是

$$x_0^2 + y_0^2 = 25.$$

(2) 设 (x_0, y_0) 是方程 $x^2 + y^2 = 25$ 的解, 那么

$$x_0^2 + y_0^2 = 25.$$

两边开方取算术平方根, 得

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 5.$$

即点 $M(x_0, y_0)$ 到原点的距离等于 5, 点 $M(x_0, y_0)$ 是这个圆上的点.

由 (1)、(2) 可知, $x^2 + y^2 = 25$ 是以原点为圆心、半径等于 5 的圆的方程.

因为 $3^2 + (-4)^2 = 25$, 即 $(3, -4)$ 是方程 $x^2 + y^2 = 25$ 的解, 所以点 $M_1(3, -4)$ 在这个圆上;

因为 $(-2\sqrt{5})^2 + 2^2 = 24 \neq 25$, 即 $(-2\sqrt{5}, 2)$ 不是方程 $x^2 + y^2 = 25$ 的解, 所以点 $M_2(-2\sqrt{5}, 2)$ 不在这个圆上(图 1-13).

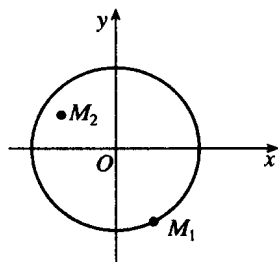


图 1-13

例 2 已知曲线 $C: x^2 + k^2 y^2 - 3x - ky - 4 = 0$, 且点 $P(2, 1)$ 在曲线 C 上, 求 k 的值.

解: 因为点 P 在曲线 C 上, 所以点 P 的坐标是曲线 C 的方程的解, 即

$$2^2 + k^2 \times 1^2 - 3 \times 2 - k \times 1 - 4 = 0,$$

$$k^2 - k - 6 = 0.$$

所以 $k_1 = -2, k_2 = 3$.

练习

1. 判断点 $A(3, -4)$ 、 $B(3, 5)$ 是否在曲线 $x^2 + y^2 = 34$ 上?

2. 判断曲线 $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ 是否经过原点?