

2001 年上海大学博士学位论文 12

数学物理中反问题与边值问题的积分方程方法

作者：徐定华

专业：计算数学

导师：李明忠

黄思训



上海大学出版社

2001 年上海大学博士学位论文

数学物理中反问题与边值问题的 积分方程方法

作 者: 徐定华

专 业: 计算数学

导 师: 李明忠 黄思训

上海大学出版社

· 上 海 ·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2001)

**Integral Equation Methods for Inverse
Problems and Boundary Value Problems
in Mathematical Physics**

Candidate: Xu Dinghua

Major: Computational Mathematics

Supervisors: Prof. Li Mingzhong
Prof. Huang Sixun

Shanghai University Press

• Shanghai •

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确定符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：	蒋尔雄	教授，上海大学数学系	200436
委员：	刘高联	教授，院士，上海大学应用数学 与力学研究所	200072
	侯宗义	教授，复旦大学数学系	200433
	黄烈德	教授，同济大学应用数学系	200092
	张万国	副教授，复旦大学数学系	200433
导师：	李明忠	教授，上海大学数学系	200436
	黄思训	教授，解放军理工大学气象学院	211101

评阅人名单:

蒋尔雄	教授, 上海大学数学系	200436
侯宗义	教授, 复旦大学数学系	200433
路见可	教授, 武汉大学数学系	430072

评议人名单:

程 晋	教授, 复旦大学数学系	200433
贺国强	教授, 上海大学数学系	200436
许政范	教授, 上海海运学院数学研究所	200135
王元明	教授, 东南大学应用数学系	210096

答辩委员会对论文的评语

徐定华同学的博士学位论文《数学物理中反问题与边值问题的积分方程方法》主要利用并发展积分方程方法系统讨论了数学物理中若干类反问题与边值问题(如矩问题、弹性接触反问题、热传导反问题、Laplace 方程 Cauchy 问题、二阶椭圆型方程组非线性边值问题等),着重研究了反问题与边值问题的数学提法的合理性(反问题的唯一性和边值问题的可解性)、反问题的条件稳定性、稳定化算法以及数值实现。

(1) 利用并发展积分方程方法,获得了矩问题的局部稳定性,并结合 Tikhonov 正则化方法设计稳定化算法,证明近似解的收敛率,给出了数值求解的例子。

(2) 首次提出接触反问题,验证了提法的合理性,获得了反问题的条件稳定性和稳定化算法,证明了正则化解的收敛率(含整体估计和局部估计)。

(3) 讨论了高维情形下热传导反问题的合理提法,利用 Carleman 估计、精确控制理论获得了反问题的条件稳定性估计,构造了正则化算法,证明了近似解的收敛率。

(4) 利用新近发展起来的小波方法获得了 Laplace 方程 Cauchy 问题的稳定化算法,在小波多尺度分析中构造稳定化算法,并证明了近似解具有 Hölder 型收敛率。

(5) 利用积分算子理论、奇异积分方程方法讨论了强椭圆型和非强椭圆型的二阶椭圆型方程组的一类非线性边值问题,通过构造一类奇异积分算子,建立与问题等价的奇异积分方程,

证明了问题解的存在唯一性。

以上问题的研究具有重要的理论意义和实际应用背景，选题具有前瞻性和创新性，论证严谨细致，推导计算正确，取得了显著的成果。这反映了该生具有扎实的应用数学与计算数学的基础以及很强的独立从事科学研究的能力。该论文得到了评审专家和答辩委员会委员的一致肯定，认为是一篇优秀的博士学位论文。

徐定华同学在攻读博士学位论文期间认真学习，刻苦钻研，学位课成绩优秀，积极参加或主持国家级和省市级自然科学基金课题多项，撰写论文 12 篇，其中大部分在国际数学刊物和国内核心刊物上发表或录用。

经过答辩委员会的认真讨论和投票，一致通过论文答辩，建议校学位委员会授予徐定华同学计算数学专业博士学位。

答辩委员会希望徐定华同学今后再接再厉，进一步拓展其研究成果，并在实现数值计算和实际应用上做出新的努力和贡献。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决，全票同意通过徐定华同学的博士学位论文答辩，建议授予理学博士学位。

答辩委员会主席：**蒋尔雄**

2001 年 6 月 27 日

摘 要

本文主要围绕数学物理中的若干类反问题与边值问题进行研究, 包括 Hausdorff 矩问题、弹性接触反问题、热传导方程反问题、Laplace 方程 Cauchy 问题和二阶椭圆型方程组非线性边值问题等. 随着科学技术的纵深发展和社会与经济的全面进步, 越来越多的问题可归结为上述问题, 如地质勘察、无损探伤、CT 技术、军事侦察、环境治理、遥感遥测、信号处理、控制论、经济学等. 本文创造性地应用积分方程方法, 借助现代数学手段, 着重研究这些问题的可解性条件、条件适定性 (特别是条件稳定性), 构造稳定化算法, 并进行数值模拟. 论文的主要成果包括:

利用积分方程方法讨论通过有限个矩量求解 Hausdorff 矩问题, 我们先将矩问题化为第一类 Fredholm 积分方程, 分析该问题的不适定性. 由于问题的不适定性, 求解变得非常困难. 为克服困难, 我们先讨论矩问题的条件稳定性 (包括整体估计和局部估计), 创造性地获得了对数型稳定性结果. 并且基于稳定性, 结合 Tikhonov 正则化方法, 构造稳定化算法, 成功地获得了矩问题的近似解——正则化解与精确解的整体误差估计和局部误差估计. 利用有限元方法 (有限维空间逼近) 进行离散和数值模拟, 数值实验结果很好地验证了算法的稳定性和有效性. 本文提出的矩问题的稳定化算法可用之于 Laplace 方程 Cauchy 问题和一些反问题的数值求解.

在弹性理论中, 接触反问题是一类重要的问题, 属于一

类无损探伤问题. 我们首先给出了接触反问题的一种合理提法, 即通过接触域外部的位移测量值决定不可直接测量的接触域和接触域上的应力. 从数学上证明了接触反问题提法的合理性, 第一次提出了接触反问题, 并证明了其不适定性. 为决定接触域和接触域上的应力, 必须克服不适定性, 构造稳定化算法, 我们的基本思路是: 先通过 Fourier 变换将接触反问题等价地转化为第一类 Fredholm 积分方程, 再讨论积分方程解的唯一性条件和条件稳定性, 从而通过位势理论创造性地获得了接触反问题的唯一性和对数型条件稳定性, 包括整体和局部条件稳定性. 最后构造反问题的 Tikhonov 正则化解 (近似解), 利用稳定化估计证明了近似解的对数型整体误差估计和局部误差估计, 我们的方法独具创新, 为其他接触反问题的求解指明了方向.

本文讨论了高维情形下热传导方程中初始源项和中间某时刻温度分布的决定问题, 证明了热传导方程反问题的合理提法, 即通过部分边界或部分内部区域上、在有限时间内的温度分布值决定温度的初始分布和中间某一时刻温度分布. 分别利用 Carleman 估计、精确控制理论获得了初始温度分布决定的对数性稳定性估计、中间时刻温度分布的 Lipschitz 型稳定性. 基于稳定性估计和正则化参数的先验选取, 构造了正则化算法, 获得了稳定化解, 证明了该稳定化解的收敛速率.

利用小波分析工具讨论了 Laplace 方程 Cauchy 问题的稳定化求解, 在小波多尺度分析中构造稳定化算法, 获得了近似解的 Hölder 型误差估计.

利用积分算子理论、奇异积分方程理论, 讨论了二阶椭圆型方程组非线性边值问题 (E_2 类和非 E_2 类), 建立了与问题等价的

奇异积分方程, 并进而得到了问题的可解性条件及存在性证明.

为便于阅读, 在本文开始还提纲挈领地叙述了反问题与边值问题的基本思想与方法, 本文结束时, 对本文进行了总结和评论, 并对将来数学物理反问题和边值问题的研究进行了展望.

关键词 反问题, 边值问题, 不适定问题, 偏微分方程, 积分方程, 条件稳定性, 数值分析

Abstract

The dissertation discusses several classes of inverse problems and boundary value problems in mathematical physics, including Hausdorff moment problems, inverse contact problem in the theory of elasticity, inverse heat conductivity problem, Cauchy problem for Laplace equations, and non-linear boundary value problems for second-order elliptic differential systems. With the in-depth development in science and technology and all-around progress in society and economy, more and more practical problems, such as geological prospecting, non-destructive testing, CT technology, military reconnaissance, environmental disposal, remote sensing, signal processing, cybernetics, economics and so on, have been formulated into inverse problems and boundary value problems for partial differential equations. By means of integral equation methods creatively along with other modern mathematical theories, this paper focuses on finding solvability conditions and conditional well-posedness (especially conditional stability), constructing stabilized algorithms, and carrying through numerical simulation. The main achievements are as follows:

Using integral equation methods to solve the Hausdorff moment problems (HMP) by finite moments, we first transform the HMP into the first kind of Fredholm integral equation equivalently and analyze the ill-posedness of the HMP, for which it is very difficult to solve. In order to cure the ill-posedness, we first discuss the conditional stability estimates in moment problems including global and local estimates, and have obtained the stability results of logarithmic rate creatively. Basing on the stability estimates and the famous Tikhonov regularization method, we present some stabilized algorithms and have successfully derived the error estimates

between the approximate solution (regularized solution) and the exact solution for the HMP, including the global and local error estimates. We discretize the algorithms by means of the finite element method and do some numerical simulations. The numerical results show the nice stability and efficiency of the algorithms. The presented algorithms here for the HMP are applicable to numerically solving Cauchy problems for Laplace equations and several inverse problems.

Inverse contact problems, as a class of non-destructive problems, are important issues in the theory of elasticity. Firstly we give an appropriate presentation for an inverse contact problem, that is, we determine the inaccessible contact domain and the stress on the domain from the displacement measurements outside of the contact domain. We have formulated the inverse contact problem for the first time, and proved mathematically its rationality and its ill-posedness. In order to determine the contact domain and the stress on the domain, we must cure the ill-posedness and construct stabilized algorithms. Our main ideas are as follows: firstly we transform equivalently the inverse contact problem into the Fredholm integral equation of the first kind by the Fourier transforms, and discuss the uniqueness and conditional stability for the integral equation, and then by the potential theory we derive the uniqueness and stability estimates creatively, including the global and local stability estimates, finally we construct the Tikhonov regularized solution for the inverse contact problem and prove the global and local error estimates of logarithmic rate. Our method shows the originality and gives some instructive ideas for solving other inverse contact problems.

The dissertation also discusses multi-dimensional inverse heat conductivity problems(IHCP), that is, the determination of initial source terms and heat distribution at any intermediate moment. We have proved the reasonable presentation of the IHCP, i.e., we can uniquely determine the

heat distribution at the initial moment and at any moments from the heat distribution measurements on the part of the boundary or in arbitrary accessible sub-domain at any time-interval. Utilizing the Carleman estimates and exact controllability theory respectively, we have obtained accordingly the logarithmic stability estimates for the initial heat distribution, Lipschitz stability estimates for intermediate heat distribution. By means of the above conditional stability estimates and the a priori choice of the regularized parameter, we design a regularized algorithm to derive the regularized solution, which can be proved to be convergent to the exact solution according to the same rates as the stability estimates.

The wavelet analysis is used as a tool to numerically solving the Cauchy problems for Laplace equations, and we have constructed a stabilized algorithm in the multi-resolution analysis, proved that the convergence rate of the approximate solution is of Hölder type.

We discuss the several non-linear boundary value problems for the second-order elliptic systems, including the E2 class and non-E2 class. And by means of the theories of integral operators and singular integral equations, we have established the equivalent singular integral equations. Consequently we give the solvability conditions, and have proved the existence and uniqueness of these problems.

For convenience in reading, we briefly analyze the basic ideas and methods for inverse problems in mathematical physics at the beginning of the dissertation. And at the end, we sum up and review the all results and ideas, and give a brief prospect for the researches in inverse problems and boundary value problems related with the dissertation in the near future.

Key words inverse problems, boundary value problems, ill-posed problems, partial differential equations, integral equations, conditional stability, numerical analysis

目 录

第一章 前 言	1
1.1 本文的研究目标与研究内容	1
1.2 反问题与边值问题研究的意义与应用前景	1
1.3 反问题与边值问题的研究动态	2
1.4 本文研究的路线与方法	3
1.5 本文内容的展开框架	4
第二章 数学物理反问题与边值问题概述	5
2.1 引 言	5
2.2 反问题的数学提法与转化	5
2.3 反问题的数学特征	8
2.4 积分方程方法及其应用	10
2.5 边值问题的数学提法、转化与积分方程方法	12
第三章 Hausdorff 矩问题的稳定化算法及其应用	20
3.1 矩问题的科学与工程背景以及数学归结	20
3.2 Hausdorff 矩问题的特征与转化	22
3.3 矩问题的可解性与条件适定性	24
3.4 矩问题的稳定化算法与误差估计	30
3.5 数值实现与框拟	34
3.6 矩问题的应用	39
3.7 几点注记	40
第四章 弹性理论中的接触反问题	41

4.1 接触反问题的数学归结	41
4.2 接触反问题转化为第一类 Fredholm 积分方程	44
4.3 接触反问题的唯一性	46
4.4 接触反问题的不适定性	46
4.5 $\mathbf{R}^3$ 中的 Laplace 方程 Cauchy 问题的条件稳 定性估计(I)	48
4.6 接触反问题的条件稳定性(整体估计)	54
4.7 $\mathbf{R}^3$ 中的 Laplace 方程 Cauchy 问题的条件稳 定性估计(II)	59
4.8 接触反问题的条件稳定性(局部估计)	65
4.9 接触反问题的稳定化估计与数值计算	70
4.10 几点注记	75
第五章 热传导反问题	76
5.1 热传导反问题的数学归结	76
5.2 热传导反问题——(IHCP1)的唯一性和 条件稳定性	78
5.3 双正交基的构造	80
5.4 定理 5.2.1 和定理 5.2.2 的证明	82
5.5 热传导反问题二(IHCP2)的条件稳定性	85
5.6 Carleman 估计	86
5.7 定理 5.5.1 的证明	87
5.8 热传导反问题的正则化算法	89
5.9 几点注记	92
第六章 椭圆型方程 Cauchy 问题的稳定化算法	94
6.1 引言	94
6.2 预备结果	95

6.3 条件稳定性和稳定化算法.....	100
6.4 几点注记	106
第七章 二阶椭圆型方程组非线性边值问题	107
7.1 引言	107
7.2 问题的提出与问题的转化.....	108
7.3 建立与问题 P^* 等价的奇异积分方程	115
7.4 与问题 P^* 等价的奇异积分方程的可解性	127
7.5 几点注记	139
第八章 结束语	140
8.1 本文总结与回顾.....	140
8.2 数学物理反问题与边值问题研究展望	141
参考文献	143
致 谢	153

第一章 前 言

1.1 本文的研究目标与研究内容

本文研究数学物理中的若干类反问题与边值问题,着重分析问题的可解性条件、条件适定性(条件稳定性)和稳定化算法,包括 Hausdorff 矩问题、弹性接触反问题、热传导反问题、Laplace 方程 Cauchy 问题和二阶椭圆型方程组非线性边值问题等.

1.2 反问题与边值问题研究的意义与应用前景

随着自然科学、工程技术、人类社会的发展与变革,人们对自然界、人类社会的认识经历了由感性到理性、由定性到定量、由表及里、由线性到非线性、由适定问题到不适定问题的深刻变化,人们已经解开了许许多多的科学之谜,获得了一项项科学技术成就,但人们的认识在许多领域远未达到全面而深刻的程度.众所周知,未源于地质勘察、无损探伤、CT 技术、军事侦察、环境治理、遥感遥测、信号处理、控制论、经济学等的许多问题都可从数学上归结为数学物理方程反问题和边值问题^[1-15],而这些问题是当今世界十分重要而又极其困难的课题,对这些的研究与解决将直接提升国家的科学技术水平甚至