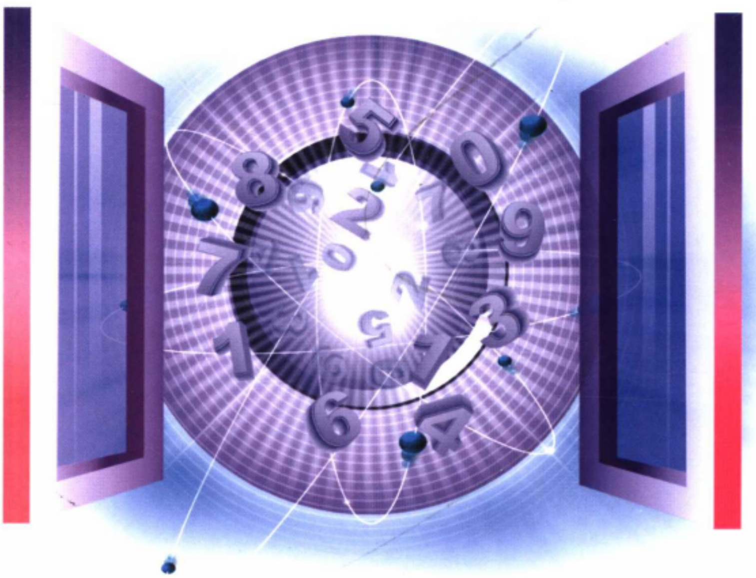
北京理工大学211工程
研究生规划教材

应用数理统计

Applied Mathematical Statistics

数学

◎赵颖 主编



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

责任编辑：周艳红
装帧设计：原创在线

本书主要介绍了数理统计的基本知识。全书共 8 章，内容包括：概率论基础，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，回归分析，方差分析与正交试验设计，多元统计分析和统计软件在数理统计中的应用。各章都配有一定量的例题和习题。为方便读者学习，本书第 1 章列出了一些基本的概率论知识作为具有不同背景的读者在阅读本书时的参考。

本书可作为工科研究生的数理统计课教材，也可作为工科高年级本科学生和教师以及相关科技人员的参考书。

读者对象：工科、经济、管理等方面的硕士研究生、本科生、教师和科技工作者。

ISBN 978-7-5640-1390-5

定价：38.00 元

北京理工大学……工程

研 究 生 规 划 教 材

应用数理统计

Applied Mathematical Statistics

数学

◎ 赵 颖 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要介绍了数理统计的基本知识。全书共8章，内容包括：概率论基础，数理统计的基本概念、参数估计，假设检验，回归分析，方差分析与正交试验设计，多元统计分析和统计软件在数理统计中的应用。各章都配有一定量的例题和习题。为方便读者学习，本书第1章列出了一些基本的概率论知识作为具有不同背景的读者在阅读本书时的参考。

本书可作为工科研究生的数理统计课教材，也可作为工科高等院校高年级学生和教师以及相关科技人员的参考书。

读者对象：工科、经济、管理等方面的硕士研究生、教师和科技工作者，具有大学本科水平和概率论基础知识的其他读者。

图书在版编目（CIP）数据

应用数理统计 / 赵颖主编. —北京：北京理工大学出版社，2008.5
北京理工大学"211工程"研究生规划教材
ISBN 978-7-5640-1390-5

Ⅰ. 应…　Ⅱ. 赵…　Ⅲ. 数理统计-研究生-教材　Ⅳ. 0212

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第039497号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京圣瑞伦印刷厂
开　　本 / 787毫米×960毫米　1/16
印　　张 / 23
字　　数 / 475千字
版　　次 / 2008年5月第1版　　2008年5月第1次印刷
印　　数 / 1~4000册　　　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 38.00元　　　　责任印制 / 李绍英

前　　言

数理统计是应用数学中最重要和最活跃的学科之一，其应用越来越广泛深入，在科学技术中的地位也越来越重要，工科硕士研究生应该具备数理统计的基本知识和基本方法。目前数理统计已经成为工科硕士研究生的一门重要基础课程，本书就是为适应上述需要而编写的教材。

本书着重介绍数理统计中各种常见的方法及其应用，叙述力求通俗易懂。阅读本书时，读者需要具备基本的微积分、线性代数和概率论知识。

本书编写过程中，杨振海教授给予了极大的鼓励和支持，并提供了很多有价值的参考，在此表示衷心的感谢，感谢多年来对我学业与科研工作的关心、支持和帮助。北京理工大学徐兴忠教授也给予了很多的鼓励、支持与帮助，提供了很多素材内容。同时杨振海教授和徐兴忠教授审阅了书稿，提出了许多宝贵意见。本书还参阅了国内外有关的书籍和文献，引用了其中的一些例子，恕不一一指出，在此向有关作者表示感谢。

本书的出版得到北京理工大学研究生院、应用数学系和北京理工大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。

本书第 1～7 章由赵颖编写，第 8 章由谢田法编写，赵颖对全书进行了统编。

由于作者水平有限，书中难免存在着缺点和错误，恳请专家和读者批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章　概率论基础

概率论是数理统计的理论基础，而数理统计是概率论的重要应用. 概率论是研究大量随机现象数量规律的一门数学学科. 本章主要介绍概率论的一些基本概念，基本定理以及常用公式.

1.1　一些基本概念

1.1.1　随机现象和随机试验

一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察前不能预知确切的结果但试验或观察后必然出现一个可能结果的现象，称为随机现象. 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量重复试验或观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性. 例如，多次抛掷一枚均匀硬币，正面向上的次数约占抛掷总次数的一半. 概率论正是研究大量随机现象统计规律的数学分支. 客观世界中，随机现象是普遍存在的，例如：

"向上抛掷一枚均匀硬币，观察正面向上或者反面向上"；

"掷骰子出现的点数"；

"某城市每月出现的交通事故数目"；

"某电话交换台单位时间内接到用户的呼叫次数"；

"同一工艺条件下生产的灯泡的使用寿命" 等都是随机现象.

对随机现象进行一次观察和试验，如果满足条件：

（1）在相同条件下可以重复进行；

（2）每次试验的结果可能不止一个，并且事先能够明确知道试验的所有可能结果；

（3）每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

这样的试验称为随机试验，简称试验.

下面是一些随机试验的例子.

例 1.1.1　将一枚均匀硬币抛掷 3 次，观察正面出现的次数，这是一个随机试验，记为 E_1.

例 1.1.2　向上抛掷一颗匀称的骰子，观察出现的点数，这也是一个随机试验，记为 E_2.

例 1.1.3　某电话交换台单位时间内接到用户的呼叫次数，也是一个随机试验，记为 E_3.

例 1.1.4　同一工艺条件下生产的灯泡的使用寿命，也是一个随机试验，记为 E_4.

1.1.2 样本空间

随机试验中，每一个可能出现的结果称为基本事件，通常用ω表示. 例 1.1.1 中试验E_1的基本事件是“0”，“1”，“2”，“3”. 例 1.1.2 中试验E_2的基本事件是“1”，“2”，“3”，“4”，“5”，“6”. 例 1.1.3 中试验E_3的基本事件是“0”，“1”，“2”，“3”，….

所有基本事件组成的集合即随机试验E的所有可能结果组成的集合称为试验E的样本空间，记为Ω. 例如，试验E_1的样本空间是$\Omega_1=\{0,1,2,3\}$. 试验E_2的样本空间是$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$. 试验E_3的样本空间是$\Omega_3=\{0,1,2,3,\cdots\}$. 试验$E_4$的样本空间是$\Omega_4=\{t:t\geqslant 0\}$.

1.1.3 随机事件

样本空间的子集称为随机事件，简称事件. 事件一般是由若干基本事件组成. 常用大写字母$A,B,C,\cdots$表示. 例如，试验E是“掷一颗匀称的骰子”，A是“出现偶数点”，则$A=\{2,4,6\}$是一个随机事件. 试验中，若事件A中包含的一个基本事件ω出现，则称事件A发生，记为$\omega\in A$.

必然事件：样本空间Ω本身称为必然事件，直观意义为必然发生的事件.

不可能事件：空集$\varnothing$称为不可能事件，直观意义是不可能发生的事件.

1.1.4 事件间的关系与运算

同一试验下定义的事件可以有关系并且可以进行运算. 事件间的关系与运算，可按照集合论中集合之间的关系和运算来处理.

设Ω是试验E的样本空间，而$A,B,C,A_k\ (k=1,2,\cdots)$都是一些事件，即都是样本空间$\Omega$的子集.

事件间的关系：

（1）包含关系：若$A\subset B$，则称事件B包含事件A，意指事件A发生导致事件B发生.

（2）和事件：事件$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A\text{或}\omega\in B\}$称为事件$A$与事件$B$的和事件. 当且仅当事件$A$与事件$B$至少有一个发生时，事件$A\cup B$发生.

（3）积事件：事件$A\cap B=AB=\{\omega\mid\omega\in A\text{且}\omega\in B\}$称为事件$A$与事件$B$的积事件. 当且仅当事件$A$与事件$B$同时发生时，事件$A\cap B$发生.

（4）差事件：事件$A-B=\{\omega\mid\omega\in A\text{且}\omega\notin B\}$称为事件$A$与事件$B$的差事件. 当且仅当事件$A$发生事件$B$不发生时，事件$A-B$发生.

（5）互不相容（互斥）：若$A\cap B=\varnothing$，则称事件A与事件B互不相容或互斥. 意指事件A与事件B不能同时发生.

（6）对立事件（逆事件）：若$A\cup B=\Omega$且$A\cap B=\varnothing$，则称事件A与事件B互为对立事

件或互为逆事件. 意指每次试验中，事件 A 与事件 B 必有一个发生且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}=\Omega-A$.

事件间的运算服从如下规律：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

（2）分配律：$A\cap(B\cup C)=AB\cup AC$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（3）结合律：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

（4）德.摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

推广：$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}$，$\overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}$

1.1.5　事件的概率

对于一随机试验，各种事件发生的可能性是不相同的. 观察一随机试验，不仅要观察可能发生的所有结果，而且要知道各种结果发生的可能性大小，以揭示这些事件的内在规律性. 概率就是表征事件发生可能性大小的一种度量.

定义 1.1.1（概率） 设 E 是随机试验，Ω 是其样本空间，对 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$ 与之对应. 若 $P(A)$ 满足如下条件：

（1）非负性：对每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

（2）规范性：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

（3）可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j,i,j=1,2,\cdots$，$A_iA_j=\varnothing$，都有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\tag{1.1.1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

根据概率的定义可以推出概率的如下一些重要性质：

（1）$P(\varnothing)=0$，即不可能事件的概率为 0.

（2）有限可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\tag{1.1.2}$$

（3）对于每一个事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$.

（4）加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\tag{1.1.3}$$

推广：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right) \quad (1.1.4)$$

（5）逆事件的概率. 对任一事件 A，均有

$$P(\overline{A})=1-P(A) \quad (1.1.5)$$

（6）对两个事件 A 与 B，若 $A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\ P(A)\leqslant P(B) \quad (1.1.6)$$

一般的，对任意两个事件 A,B，有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB) \quad (1.1.7)$$

1.1.6 条件概率与乘法定理

研究随机事件之间的关系时，在已知某事件发生的条件下考虑另一事件发生的概率是十分重要的.

定义 1.1.2（条件概率） 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1.1.8)$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率. 条件概率满足概率定义中的三条，即条件概率也是概率. 因此对于概率的所有性质，条件概率同样具备.

乘法定理： 设 A,B 是两个随机事件，当 $P(A)>0$ 时，有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A) \quad (1.1.9)$$

同理当 $P(B)>0$ 时，有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B) \quad (1.1.10)$$

推广：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个随机事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \quad (1.1.11)$$

1.1.7 全概率公式与贝叶斯公式

为介绍全概率公式和贝叶斯公式，先引入样本空间划分的概念.

定义 1.1.3（划分） 设 Ω 为试验 E 的样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一组事件，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足

（i） $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$

（ii） $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，或者称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个完备事件组.

全概率公式：设 Ω 为试验 E 的样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则对任一事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i) \tag{1.1.12}$$

全概率公式的意义：为求得较复杂事件 B 的概率 $P(B)$，这里 $P(B)$ 不容易求得，但是却容易找到样本空间 Ω 的一个划分 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，且 $P(A_i)$ 和 $P(B|A_i)$ 或者已知或者比较容易求得，利用全概率公式（1.1.12）即得所要求较复杂事件 B 的概率 $P(B)$.

贝叶斯（Bayes）公式：设 Ω 为试验 E 的样本空间，B 为一个事件，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，且 $P(B)>0,P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B|A_j)P(A_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.1.13}$$

实际应用中，A_i 常被视为导致试验结果 B 的“原因”或“条件”，而 $P(A_i)$ 表示各种“原因”或“条件”发生的可能性大小，$P(A_i)$ 是事先给出的，称其为先验概率；$P(A_i|B)$ 表示事件 B 出现后，对各种原因概率的一个新的认识，通常称其为后验概率. 许多问题中，$P(B|A_i)$ 和 $P(A_i)$ 或者已知或者容易求得，因此贝叶斯公式提供了计算条件概率的一个有效途径.

1.1.8　事件的独立性

定义 1.1.4（事件独立） 设 A,B 是两个事件，若满足

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.1.14}$$

则称事件 A 与事件 B 相互独立，简称独立.

直观解释：其中一个事件发生与否并不影响另一事件发生的概率. 实际应用中常常不是根据定义来判断事件的独立性，而是根据实际意义加以判断，也就是根据两个事件的发生与否是否相互影响加以判断. 例如，甲乙两人同时向同一目标射击，而且彼此互不影响，则甲乙两人是否击中目标相互独立.

推广：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，若对于任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 和任意一组 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \tag{1.1.15}$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注意：$n(n\geqslant 2)$ 个事件相互独立需要 $\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n-n-1$ 个等式来保证，并且

这些等式是各自独立的，不能互相推出.

事件独立的性质：

（1）若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也相互独立必有两两独立. 反之，事件两两独立不能推出相互独立.

（2）若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ $(n\geqslant 2)$ 相互独立，则将 n 个事件中任意多个事件换成其对立事件，所得 n 个事件仍相互独立.

1.2 随机变量及其分布

为研究随机试验的结果以及各种结果发生的概率，揭示大量随机现象的统计规律性，我们将随机试验的结果与实数对应起来，即将随机试验的结果数量化，为此引入随机变量的概念.

1.2.1 随机变量的概念

定义 1.2.1（随机变量） 设 E 是随机试验，$\Omega=\{\omega\}$ 为其样本空间，$X=X(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的单值实值函数，称 $X=X(\omega)$ 为随机变量（random variable 简记为 r.v.）. 随机变量常用 $X,Y,Z,\cdots$ 表示或用希腊字母 $\xi,\eta,\zeta,\cdots$ 表示.

例如，掷骰子出现的点数 X，电话交换台单位时间内接到用户的呼叫次数 Y，灯泡的使用寿命 Z 等都是随机变量.

随机变量是一个函数，其定义在样本空间 Ω 上，取值在实数轴上，它与一般函数最主要的不同之处在于随机变量的取值具有一定的随机性. 随机变量把随机试验的结果映射为实数，这样可以利用数学工具进一步研究随机试验.

1.2.2 分布函数

当描述一个随机变量时，不仅要说明随机变量可能取哪些值，而且还要指出它取这些值的概率，这样才能完整地刻画一个随机变量. 为此，引入随机变量分布函数的概念.

定义 1.2.2（分布函数） 设 X 是一随机变量，定义函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}\quad(-\infty<x<\infty) \tag{1.2.1}$$

则 $F(x)$ 称为随机变量 X 的分布函数.

随机变量 X 的分布函数具有如下三条基本性质：

（1）单调不减性：对任意实数 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，总有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

（2）右连续性：$\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=F(a)$，其中 $x\to a^+$ 表示 $x>a$ 且趋近于 a.

（3） $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$.

这三条性质是分布函数的必要条件，而且可以证明它们也是函数 $F(x)$ 成为某一随机变量分布函数的充分条件.

随机变量根据它可能取值的情况，分成两大类：一类是离散型随机变量，一类是连续型随机变量. 这两类随机变量取值的概率规律不仅可以用分布函数给出，也可以用下面更为直观、方便的形式给出，就是分布列和概率密度函数.

1.2.3　离散型随机变量及其分布列

1. 离散型随机变量的概念

定义 1.2.3（离散型随机变量）　若随机变量 X 的所有可能取值是有限个或可列个，则称 X 为离散型随机变量.

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots$，且 X 取各个 x_i 相应的概率为 p_i，即

$$P\{X=x_i\}=p_i \quad (i=1,2,\cdots) \tag{1.2.2}$$

称式（1.2.2）为离散型随机变量 X 的分布列（或分布律）. 分布列也可以用如下表格形式表示.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

离散型随机变量的分布列具有如下性质：

（1） $p_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots$；

（2） $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$.

由概率的可加性，得到离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_i\leqslant x}P\{X=x_i\} \tag{1.2.3}$$

这里和式是对所有满足 $x_i\leqslant x$ 的 i 求和.

2. 常见的离散型随机变量及其分布列

（1）单点分布（退化分布）　若随机变量 X 以概率 1 取常数值 C，即

$$P\{X=C\}=1 \tag{1.2.4}$$

则称随机变量 X 服从单点分布或退化分布.

（2）两点分布　若随机变量 X 仅取两个数值 0 和 1，其概率分布为

$$P\{X=1\}=p, \quad P\{X=0\}=q \tag{1.2.5}$$