普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

概率论与数理统计教与学指导书

朱铉道　彭明珠　编著

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

（高职高专教育）

概率论与数理统计
教与学指导书

朱鋐道　彭明珠　编著

高等教育出版社

内容提要

本书与现有高职、高专的教学大纲、相应教材(《概率与数理统计》(第二版),常柏林等编;《概率论与数理统计》,金炳陶编著)配套。按各章的教学要求作内容概述与相关知识介绍,侧重于概率与统计的基本概念与方法。各章的典型例题不仅渗透着概率与统计学科在解决实际问题时使用的基本思想和方法,且也是应用案例的汇总,可供教师教学与学生学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教与学指导书/朱鋐道,彭明珠编著.—北京:高等教育出版社,2004.11
ISBN 7-04-014696-7

Ⅰ.概... Ⅱ.①朱...②彭... Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第099231号

策划编辑 蒋 青 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 杨立新 **责任绘图** 尹文军
版式设计 胡志萍 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 杨 明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn

经 销	新华书店北京发行所
印 刷	国防工业出版社印刷厂

开 本	787×1092 1/16	版 次	2004年11月第1版
印 张	11.25	印 次	2004年11月第1次印刷
字 数	270 000	定 价	12.40元

物料号:14696-00

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》（教高司[2000]19号），提出了“力争经过5年的努力，编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用2至3年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用2至3年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从2000年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》（草案）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（草案）编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材（高职高专教育）适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002年11月30日

前言

概率与数理统计难教、难学已是公认的事实。究其原因可能是多方面的,但有一点我们不能忽略,那就是教者缺少手段,学者缺少方法。笔者认为,应用现代信息技术,增强概率与数理统计的应用意识是增加学生学习的兴趣、提高教学质量的两个重要突破口。

在教学中能否做到先观察试验,再引入概念和方法呢?能否把大量计算(包括查阅各种分布表)束之高阁,而轻轻地用鼠标一点,就可得到要作的计算或判断?能否用直观的图形、演示来揭示概念和方法的本质?从而改变从抽象的符号到符号,教者乏味、学者难啃的现状。为此,我们开发了一套集教、学、用于一体的概率与数理统计软件。它具有模拟(或仿真)随机试验、计算可视化与可作为工具软件使用等三大特色,为教、学、用提供了方便。

本书根据现有高职、高专的教学大纲与相应教材(《概率与数理统计》(第二版),常柏林等编;《概率论与数理统计》,金炳陶编著)配套,按照各章的教学要求,概要地叙述了内容,其侧重点是基本概念与方法,并以“补丁”方式介绍了一些相关知识,供教师教学参考。各章的典型例题中渗透着概率与数理统计的基本方法,且不乏实际应用案例,将使初学者体会到概率与数理统计确实是一门应用广泛,发展前景宽广的学科。

我们相信,随着教学改革不断的深入与信息技术日新月异的迅猛发展,将会不断出现新的教学理念、教学方法和教材,而本书只是起到一个抛砖引玉的作用。

作者的 E-mail 地址:Zhu_H_D@126.com

作者

2004.4

目　录

第一章

随机事件与概率

一、教学基本要求、重点和难点

1. 教学基本要求

（1）理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系与基本运算.

（2）了解事件频率的概念及随机现象的统计规律性. 理解概率的统计定义.

（3）知道古典概率的定义.

（4）掌握概率的基本性质（特别是加法公式）. 会用这些性质进行概率计算.

（5）了解条件概率的概念. *会应用乘法公式、全概率公式和贝叶斯（Bayes）公式进行概率计算.

（6）了解事件独立性的概念. *会利用事件的独立性计算概率.

2. 教学重点与难点

重点： 事件及其关系；概率的概念与性质；条件概率与独立性概念.

难点： 事件间的关系；概率的计算.

二、内容概述与相关知识

1. 试验与样本空间

人们观察到的自然现象与社会现象，从结果能否预言的角度去划分，可分为两类：一类是可以预言其结果的，即在一定条件下，重复实验或观察，必然发生某一个结果，这类现象称为**确定性现象**；另一类是，在一定条件下，可能出现的结果不止一个，而在试验或观察之前不能预言确切的结果，但人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复试验或观察后其结果却呈现出某种规律性（称为统计规律性），这种在个别试验中其结果呈现不确定性，而在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，称为**随机现象**.

概率与数理统计是研究随机现象统计规律的数学分支.

研究随机现象首要的任务是做试验与观察，为表述方便起见，我们将各类科学实验，以及对某一事物的某些特征的观察都简要地称为**试验**.

让我们借助于计算机，做下列模拟试验（具体操作参见附录Ⅰ）.

试验　掷币试验：

E_1：抛掷一次，观察正面或反面出现的情况.

E_2：抛掷二次，观察正面或反面出现的情况.

E_3:抛掷二次,观察正面出现的次数.

E_4:抛掷 100 次,观察正面出现的次数.

E_5:抛掷 1 0000 次,观察正面出现的次数.

分析与归纳 抛掷次数少(如,E_1,E_2,E_3),出现正面或反面是不确定的,但重复抛掷的次数增多(如 E_4,E_5),出现正面(或反面)的次数大约各占一半. 这就是掷币试验的统计规律.

试验 掷骰子试验:

E_6:抛掷一次,观察出现的点数.

E_7:抛掷二次,观察出现的点数之和.

E_8:抛掷 1 000 次,观察出现“奇数点”的次数.

试验 高尔顿(Galton)钉板试验.

E_9:落下一个小球,观察小球落入哪一个格子.

E_{10}:下落 50 个小球,观察小球在格子中堆垒起的图形(称为**直方图**)的形状.

E_{11}:用 500 个小球做试验,观察其直方图的形状.

E_{12}:用 1 0000 个小球做试验,观察其直方图的形状.

读者自己分析与归纳后两组试验的统计规律.

评注 (1) 上述各试验的特点:在相同条件下可重复进行;每次试验的可能结果不止一个,但事先能知道试验的所有可能结果;每次试验之前不能预言出现哪一个结果.

我们将具有这三个特点的试验称为**随机试验**,简称**试验**.

(2) 要注意试验的条件与目的(要观察的结果).

在上述 E_1,E_2 中,试验的条件分别是抛掷一枚硬币一次与二次. 条件每实现一次,叫做一次试验. 所以在 E_1 中,抛掷一次是一次试验,而在 E_2 中要抛掷二次才是一次试验.

相同的试验条件,也可以有不同的观察目的. 例如,在 E_2 与 E_3 中,条件是相同的,都是将一枚硬币连抛二次,但目的不一样,前者是观察正面或反面出现的情况,而后者是观察正面出现的次数.

(3) 对随机试验而言,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但根据不同的试验目的,所有可能结果组成的集合是已知的. 一般地,随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 Ω,样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**.

下表列出上述部分试验的样本空间.

试 验	相应的样本空间
E_1	$\Omega_1=\{$正,反$\}$
E_2	$\Omega_2=\{$正正,正反,反正,反反$\}$
E_3	$\Omega_3=\{0,1,2\}$
E_4	$\Omega_4=\{0,1,2,\cdots,99,100\}$
E_6	$\Omega_6=\{1,2,3,4,5,6\}$
E_7	$\Omega_7=\{2,3,4,\cdots,12\}$
E_9	$\Omega_9=\{0,1,2,3,\cdots,24\}$

用集合语言来描述,每一个试验的样本空间,就是所有试验结果的**全集**.

2. 事件及其运算

对于随机试验,我们常常关心某些结果. 例如,在上述试验 E_7 中,设我们只关心抛掷二次,点

数之和大于10的结果. 由于二次点数之和大于10只可能是11和12这两个样本点,用集合符号可表示为$A=\{11,12\}$,它是试验E_7的样本空间$\Omega_7=\{2,3,4,\cdots,12\}$的一个子集,称$A$为试验$E_7$的一个随机事件. 显然,当且仅当子集$A$中的一个样本点(11或12)出现时,随机事件$A$就发生.

抽象 试验E的样本空间Ω的子集,称为E的**随机事件**,简称**事件**,用字母$A,B,C,\cdots$表示. 在每次试验中,**当且仅当**某一子集中的一个样本点出现时,就称该子集所对应的**事件发生**.

特别地,由一个样本点组成的**单点集**,称为**基本事件**. 在每次试验中,**有且仅有**一个基本事件发生. 如,在E_7中,有11个基本事件$\{2\},\{3\},\{4\},\cdots,\{12\}$,每次试验有且仅有这11个基本事件之一发生.

评注 (1) 两个特例

由于样本空间Ω(即全集Ω)包含了所有的样本点,每次试验时Ω作为事件总是发生的,故称Ω为**必然事件**.

空集$\varnothing$不包含任何样本点,它是样本空间的一个子集,在每次试验中都不发生,称$\varnothing$为**不可能事件**.

必然事件和不可能事件实质上都是确定性现象的表现,但是,把它们看作是随机事件的两个特例,对于分析问题是有利的.

(2) 事件间的关系

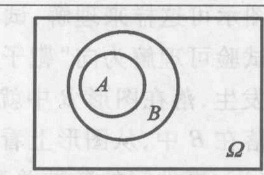
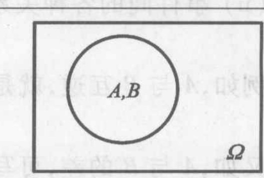
既然事件已用集合来描述,那么,事件间的关系,自然地要按照集合之间的关系(或运算)来处理. 关键是在概率论中,是从"事件发生"这一含义来给出事件关系定义的,而且,各种关系中的定义,采用的关键词(或术语)与集合论中有差异.

例如,**并事件**(或称**和事件**)是这样定义的:当且仅当事件A,事件B中**至少**有一个发生时,称为A与B的并事件发生.

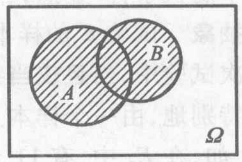
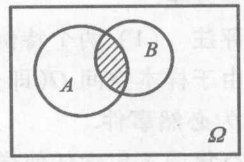
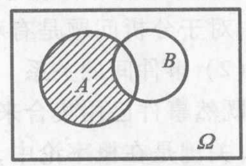
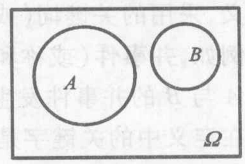
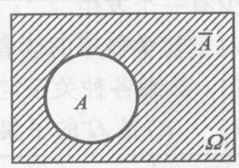
在定义中的关键字是:"至少". 所谓并事件的定义,实质上是并事件发生的充要条件:A,B中至少有一个发生.

对于初学概率的读者,可从下列两个方面去加深对事件间关系的理解:

(i) 熟悉各种关系定义中的关键字,记号表示与图示含义. (下表中Ω是样本空间,A,B,A_i($i=1,2,\cdots,n$)是Ω的子集.)

事件间关系	关键字	记号表示	图 示
包含	导致	(B包含A) $A\subset B$或$B\supset A$	
相等	相互包含	$A=B$	

续表

事件间关系	关键字	记号表示	图 示
并(或和)	至少	$A\cup B$(两个)； 有限个： $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$	
交(或积)	同时	$A\cap B$ 或 AB(两个)； 有限个： $\bigcap_{i=1} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1A_2\cdots A_n$	
差	A 发生，B 不发生	$A-B$	
互不相容	不能同时(即同时发生是不可能事件)	$A\cap B=\varnothing$	
互逆 (或对立)	有且仅有一个， 即 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$	$B=\overline{A}$， $A=\overline{B}$	

图示可这样来理解：试验的样本空间是矩形，试验的各事件是矩形内的各种图形(如圆形). 每次试验可理解为向“靶子”——矩形 Ω 随机地“投入”一点. 如果此点落在图形 A 中，就表示事件 A 发生，落在图形 B 中就意味着事件 B 发生. 表中第一个图表示 $A\subset B$，因为落在 A 中的点必定也落在 B 中，从图形上看，就是图形 B 包含了图形 A. 其余各图作类似的理解.

(ii) 事件间的各种关系中，重点是并与交. 其他的关系借助于图示，可以表示成并与交的表达式.

例如，A 与 B 互逆，就是

$$A \cup B = \Omega, \text{且} A \cap B = \varnothing.$$

又如，A 与 B 的差，可写成

$$A - B = A \cap \overline{B}.$$

(3) 事件间的运算律

各教材已详细地列出了交换律、结合律、分配律和对偶律(德·摩根律). 分配律和对偶律还可以推广到有限多个情形,即

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i),$$

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup A_i),$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

3. 频率与概率

思考 如何度量事件发生可能性的大小?

分析 我们知道,在一次试验中,可能发生这个事件,也可能发生那个事件. 但在相同条件下做大量重复试验,就会看到有的事件发生的次数多一些,有的少一些,从而认为有的事件在一次试验中发生的可能性大,有的可能性小. 为了获得某一事件 A 发生可能性大小的数量指标,自然可在大量重复试验中,对事件 A 发生的次数 n_A(称为**频数**)进行统计,并计算 n_A 与试验总次数 N 的比值——称为事件 A 发生的**频率**. 看看频率是否会呈现出一定的规律性.

试验 掷币试验

下列表中,N 为掷币次数,n_A 为事件 $A=$"出现正面"的次数,$f_N(A)$ 为 N 次掷币中 A 出现的频率.

N	100	500	1 000	5 000	20 000	50 000
n_A	56	251	496	2 495	10 003	24 989
$f_N(A)$	0.56	0.502	0.496	0.499 0	0.500 15	0.499 78

多次重复试验的结果:

试验号	$N=5$		$N=50$		$N=500$	
	n_A	$f_N(A)$	n_A	$f_N(A)$	n_A	$f_N(A)$
1	3	0.6	35	0.70	265	0.530
2	3	0.6	25	0.50	246	0.492
3	1	0.2	27	0.54	266	0.532
4	1	0.2	21	0.42	209	0.418
5	3	0.6	24	0.48	253	0.506
6	3	0.6	24	0.48	226	0.452
7	3	0.6	25	0.50	239	0.478
8	4	0.8	24	0.48	238	0.476
9	5	1.0	24	0.48	257	0.514
10	3	0.6	30	0.60	239	0.478
平均		0.58		0.518		0.487 6

分析 (1) 从上述试验数据看出,频率 $f_N(A)$ 随试验次数 N 而异,即使试验次数相同,重复做,其结果也往往不同. 掷币次数 N 较小时,频率 $f_N(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动,其幅度较大,但随着 N 增大,$f_N(A)$ 呈现出稳定性. 即当 N 逐渐增大时 $f_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动,而且逐渐**稳定**于 0.5. 常数 0.5 作为度量事件 A(出现正面)可能性大小的量,称为 A 的概率. 可见,频率 $f_N(A)$ 稳定于某个数字 p 是概率统计定义的基础.

(2) 由多次重复试验看出,随着 N 的增大,频率 $f_N(A)$ 围绕概率 p 摆动的平均幅度将越来越小,且频率与概率之间出现较大偏差也越来越稀少. 这就是频率**稳定**于概率的内涵.

抽象 (**概率的统计定义**)在相同的条件下进行的大量重复试验中,如果随着试验次数 N 的增大,事件 A 的频率 $f_N(A)$ 总是在一个确定的常数 p 附近摆动,并且稳定于 p,那么数 p 就表示事件 A 发生的可能性大小,称它为事件 A 的**概率**,记作 $P(A)$,即

$$P(A) = p.$$

评注 (1) 频率稳定于概率与通常的"极限"概念不同. 随着试验次数 N 的增大,频率与概率之间出现较大偏差只是越来越罕见,但绝不是不可能出现. 例如,在上述掷币试验结果中,$N=50$ 的第 5 次试验,偏差 $=|f_N(A)-p| = |0.48-0.5| = 0.02$,而当试验次数增大为 $N=500$ 时,其第一次试验的偏差 $=|0.530-0.5| = 0.03$,反而大了. 第五章大数定律将给出理论解释.

(2) 在实际工作中,事件的概率往往是个未知数. 概率的统计定义给出了近似计算事件概率的方法. 当试验大量重复时,就可将事件 A 发生的频率 $f_N(A)=\frac{n_A}{N}$ 作为 $P(A)$ 的近似值,即 $P(A)\approx\frac{n_A}{N}$.

应用举例 借助于试验:英文字母频率统计. 我们可以对某一英文文本,如 C:\DOC\Drvspace.txt,对 26 个英文字母以及空格作统计,得到频率统计表如下.

字符	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
频数	3 768	496	2 632	2 982	7 682	1 534	822	1 938	4 324	20
频率	0.049 86	0.006 56	0.034 83	0.039 46	0.101 65	0.020 30	0.010 88	0.025 64	0.057 21	0.000 26
字符	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
频数	396	1 552	2 290	3 512	5 102	2 450	20	4 238	5 418	4 750
频率	0.005 24	0.020 54	0.030 30	0.046 47	0.067 51	0.032 42	0.000 26	0.056 08	0.071 69	0.062 85
字符	u	v	w	x	y	z	空格	总数		
频数	1 868	1 230	658	192	1 178	16	14 508	75 576		
频率	0.024 72	0.016 28	0.008 71	0.002 54	0.015 59	0.000 21	0.191 97	1.000 00		

由表看出,按频率从高到低的排列是:空格,e,s,o,t,i,r,…,z. 这只是一篇英文文本的统计表. 如果对大量的英文文本作相同的统计,空格与 26 个字符的频率,按照高至低的排列是否有规律性?

有兴趣的读者,可借助于试验"英文字母频率统计"自己作一些研究.

近年来对汉语的统计研究初步获得了汉字使用频率的统计表,它为汉字输入方案等的研制提供了理论依据.

另外,用频率作为概率的近似值,以及蒙特卡罗(Monte Carlo)方法,借助于随机试验,可作数值计算. 例如,计算π的值,定积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 等等(参见附录Ⅱ).

概率的性质 由事件的频率的性质,以及概率的统计定义,可得概率以下性质(证明略):

(1) 对于任一事件A,有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(2) $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$.

(3) 有限可加性:若$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(4) 逆事件的概率:对于任一事件A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

(5) 设事件B包含事件A,即$B\supset A$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A);\ P(B)\geqslant P(A).$$

(6) 加法公式:对于任意两个事件A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

评注 (1) 可用文氏图来理解概率的上述各性质. 规定试验的样本空间所对应的长方块的面积为1,并把事件的**概率**理解为事件所对应的图形的**面积**. 由于任一事件A是长方块Ω中的一个图形,所以A的面积一定在0与1之间,这对应着$0\leqslant P(A)\leqslant 1$,且$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$. 又如,如果事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互不相容,在图示中意味着图形$A_1,A_2,\cdots,A_n$没有重叠部分,那么$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$这个图形的面积等于图形$A_1$的面积,加上$A_2$的面积,…,以及$A_n$的面积之和,这与

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

又是一致的.

再如在图1.1中,$A\cup B$的面积等于A的面积加上B的面积,再减去$A\cap B$(图中阴影部分)的面积,即

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

这就是对加法公式的理解.

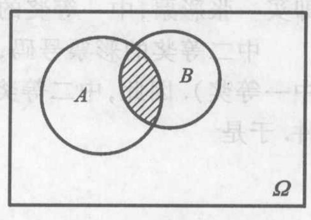


图 1.1

其余各性质,读者可作类似的理解.

(2) 加法公式可推广到有限个事件的情况.

对于任意三个事件A,B,C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

对于任意n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

4. 古典概型

如果试验具有下列两个特点:

(1) 其样本空间的元素(基本事件)只有有限个;

(2) 每个基本事件发生的可能性相同,则称这种试验为**等可能概型**. 它是概率论初期研究的

主要对象,故也称为**古典概型**.

在古典概型中,如果试验的基本事件总数为 n,事件 A 包含 k 个基本事件,即 A 由 k 个基本事件并成,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{k}{n}.$$

这样,在古典概型中确定事件 A 的概率问题就转化为计算基本事件的总数以及事件 A 所包含的基本事件的个数,即转化为**计数问题**(包括计数原理,排列、组合等).

应用举例 彩票开奖试验(参见附录Ⅰ):

某地发行的福利彩票,每张彩票的号码是 7 位有序数组(例如,0980143),用摇奖机开奖,机内装有分别写上 0,1,2,…,9 的十个小球,充分搅拌这些小球后,从出口处掉出一个小球,记下小球上的数字.然后再换一组小球,重复刚才的操作,…,直至产生一个 7 位的有序数组,记作 e.中奖规定为:所购彩票号码与 e 完全相同,得一等奖;彩票号码的后 6 位与 e 一样,但左边第一位不同,得二等奖;彩票号码的后 5 位与 e 一样,但左边两位不同,得三等奖.试问:买一张彩票,中一、二、三等奖的概率各是多少?中奖的概率是多少?

解 从摇奖的过程看出,任意一个 7 位有序数组(其中数字可重复)都可作为 e,并且每一个有序数组被取到的可能性是相同的,因此该彩票试验(游戏)是古典概型.基本事件(样本点)的总数等于由 0 到 9 组成的 7 位有序数组(其中数字可重复)的数目.按分步计数原理(又称乘法原理),该数目应为

$$10\times10\times10\times10\times10\times10\times10=10^7.$$

由于中一等奖事件 A_1,必须与 e 完全相同.因此,A_1 只含一个基本事件 e,从而

$$P(A_1)=\frac{1}{10^7},$$

即买一张彩票,中一等奖的概率是一千万分之一.

中二等奖的彩票号码,其后 6 位与 e 的后 6 位一样,但左边第一位数字不同(否则,这张彩票中一等奖).因此,中二等奖的彩票号码有 $10-1=9$ 个.从而 $A_2=$"中二等奖"包含了 9 个基本事件.于是

$$P(A_2)=\frac{9}{10^7},$$

即买一张彩票,中二等奖的概率是一千万分之九.

类似地,$A_3=$"中三等奖"包含了 $10^2-1-9=90$ 个基本事件.于是

$$P(A_3)=\frac{90}{10^7}=\frac{9}{10^6},$$

即买一张彩票,中三等奖的概率是一百万分之九.

由于 $B=$"中奖"$=A_1\cup A_2\cup A_3$,按中奖规定,事件 A_1,A_2,A_3 两两互不相容,因此

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$
$$=\frac{1}{10^7}+\frac{9}{10^7}+\frac{90}{10^7}=\frac{1}{10^5},$$

即买一张彩票,中奖的概率是十万分之一.

评注 (1) 上述试验的基本事件是:任意七位可重复数字的**有序**数组.因此,称这种彩票为

重复排列型彩票. 如果改变中奖规定,则中各等级奖的概率也随之而变. 读者可根据当地彩票的中奖规定,计算相应的概率.

(2) 通常把概率很小的事件称为**小概率事件**. 小概率事件虽然不是不可能事件,但在一次试验中发生的可能性很小. 可以认为,购买一张彩票就中奖是一个小概率事件. 可见,福利彩票不是人们投资的理想方式,参与的目的是:募集资金用于发展全民福利事业,奉献爱心;同时,也可以增强娱乐性,丰富人们的业余文化生活.

(3) 在解概率习题时,我们首先要分析试验的基本事件的含义. 根据基本事件的含义,判断基本事件的个数是否有限与等可能,即是否属于古典概型. 若是古典概型,再用计数方法(包括计数原理、排列、组合等)来计算基本事件总数,以及所求事件包含的基本事件个数. 从而得到所求事件的概率. 因此,对初学者来说,关键是要根据试验的条件,弄清楚试验的基本事件的含义.

5. 条件概率与乘法公式

条件概率考虑的是:事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率,记作 $P(B|A)$. 用图示法理解为,试验的样本点已落在图形 A 中(事件 A 已发生),问落在 B(事件 B)中的概率. 我们已指出过,事件的概率可理解为图形的面积. 由于样本点已落在 A 中,且又要求落在 B 中,于是,只可能落在 AB 中. 它的概率是 AB 的面积与 A 的面积之比,即

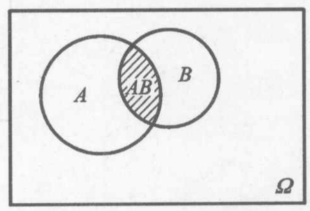


图 1.2

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (P(A) > 0).$$

类似地,也可用图示法理解

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (P(B) > 0).$$

评注 (1) 注意 $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 的区别. 若随机试验的样本空间为 Ω,那么,讨论 $P(B|A)$ 的样本空间是 A,而 $P(B)$ 的样本空间为 Ω(参见图 1.2).

(2) 条件概率仍是事件的概率,具有概率的性质:

对任一事件 B,有

$$0 \leqslant P(B \mid A) \leqslant 1;$$

对必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 有

$$P(\Omega \mid A) = 1, P(\varnothing \mid A) = 0.$$

有限可加性:若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是两两互不相容事件,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \mid A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i \mid A).$$

逆事件的概率:对任一事件 B,有

$$P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A).$$

加法公式:对于任意两个事件 B_1, B_2,有

$$P(B_1 \cup B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) - P(B_1 B_2 \mid A).$$

(3) 条件概率提供了计算 $P(B)$ 的一种方法:利用与事件 B 有关的事件 A_i 的某些信息来计算. 例如,下面要讨论的全概率公式就是用这种方法.

(4) 由条件概率的计算公式,得**乘法公式**:

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\qquad (P(A)>0)$$
$$=P(B)P(A\mid B)\qquad (P(B)>0).$$

一般，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 件事件，$n\geqslant 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

例1 试问：能否对 $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 的相对大小作出一般的论断？

观察与分析

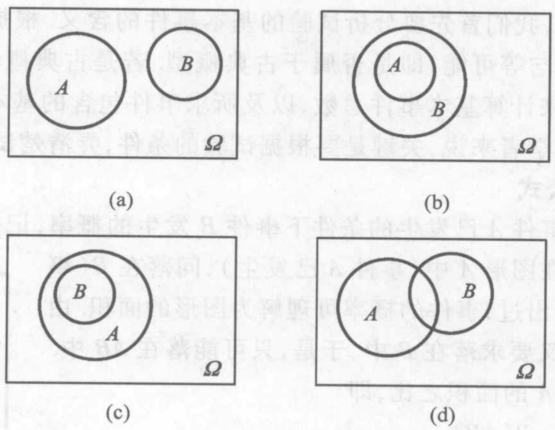


图 1.3

图(a)中，$AB=\varnothing$，有 $0=P(B|A)<P(B)$；

图(b)中，$A\subset B$，有 $1=P(B|A)>P(B)$；

图(c)中，$A\supset B$，因为 $0<P(A)<1$，故

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}>P(B);$$

对于图(d)，A,B 既不是互不相容，也没有包含关系，可取一些数值来计算. 例如，$P(A)=0.3$，$P(B)=0.5$，而 $P(AB)$ 分别取 0.25，0.15，0.05 时，有

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.25}{0.3}=\frac{5}{6}>0.5=P(B),$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.15}{0.3}=\frac{1}{2}=P(B),$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.05}{0.3}=\frac{1}{6}<0.5=P(B).$$

请读者归纳上述观察与分析的结果.

6. 全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式

设试验 E 的样本空间为 Ω，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一组两两互不相容事件，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$；$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个**划分**.

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间的一个划分时，每次试验中，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中有且仅有一个发生. 于是，求试验 E 的某一事件 B 的概率，就有(参见图 1.4)：

$$B=B\Omega=B(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=BA_1\cup BA_2\cup\cdots\cup BA_n$$

由于 $BA_1,BA_2,\cdots,BA_n$ 两两互不相容，故