薄膜光学讲座

(一) 薄膜光学的数学物理基础

浙江大学 光仪系
物光专业 镀膜组

1973年4月

前　言

遵循毛主席关于"教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合"方针，结合教学、科研和生产需要，我们刊印了这套"薄膜光学讲座"资料，先后准备共分六个专题陆续出版。

这套"薄膜光学讲座"资料可供高等院校、科研和生产单位从事这方面工作的有关同志参考。

由于我们政治水平和业务水平不高，在内容选择和专业技术上有错误之处，请读者批评指正。

浙江大学光仪系资料室
浙江大学光仪系物光专业
1973年4月

第一篇 薄膜光学的数学基础

目 录

第二篇 薄膜光学的物理基础

目 录

第一篇 薄膜光学的数学基础

第一章 矢量代数

§1.1 矢量的概念及其基本运算

在现实世界中，我们会遇到两种量，一种象温度、密度、功、能、折射率等等的量，只用数来表示，叫做数量，另一种象力、位移、速度、加速度、电磁场强度等等的，这种量不但有大小，还有方向，这种量叫做矢量（亦称为向量）。

数量常用拉丁字母来记如 a、b、c 等，矢量常用拉丁字上面加一箭头来记，如 $\overrightarrow{AB}$，有时也用粗体的拉丁字母来记，如 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 等，其几何上的表示如图1.1所示，以 A 为起点 B 为终点的矢量就记作 $\overrightarrow{AB}$，矢量的大小或长度记为 $|a|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$，称为该矢量的模数。

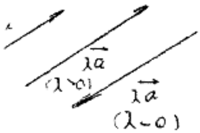
这里，我们认为当两个矢量的大小相等方向相同时，这两个矢量就相等（而不管它的起点是否相同）。

（图1.1）

下面介绍用图介法给出的矢量运算法则

1 数量与矢量的乘法

若 λ 是一个数量，$\vec{a}$ 是一个矢量，则 $\lambda\vec{a}$ 在 $\lambda>0$ 时，是一个模为 $\lambda|\vec{a}|$ 而方向与 $\vec{a}$ 相同的矢量，在 $\lambda<0$ 时，是一个模为 $|\lambda||\vec{a}|$ 而方向与 $\vec{a}$ 相反的矢量（图1.2）



（图1.2）

2 矢量的加法

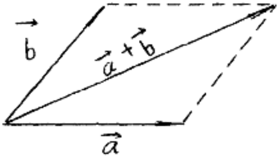
根据力、速度等实验结果得到一个求矢量和的平行四边形法则，如图1.3所示。

而改变一下方式可以得到求矢量和的三角形法则，即把矢量 $\vec{b}$ 平行移动，使得 $\vec{b}$ 的起点与 $\vec{a}$ 的终点重合，则从 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点的

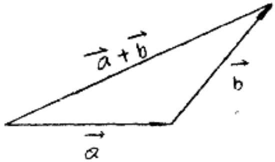
的矢量就是 $\vec{a}+\vec{b}$（图1.4）

3　矢量的减法

减法是加法的逆运算，故由 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ 得到减法的相应法则：



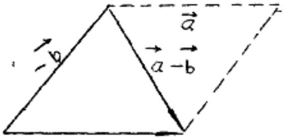
（图1.3）



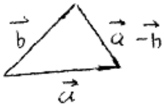
（图1.4）

平行四边形法则　以 $\vec{a}$ 及 $-\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线所表示的矢量即 $\vec{a}-\vec{b}$（图1.5）

三角形法则　以 $\vec{b}$ 的终点到 $\vec{a}$ 的终点所成的矢量即 $\vec{a}-\vec{b}$（图1.6）



（图1.5）



（图1.6）

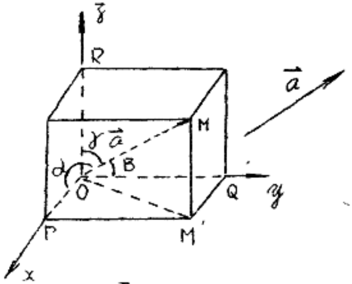
§1.2 矢量的投影表达式

上面我们用矢量的图解法（几何方法）给出它的一些最基本的运算，望上去非常直观，这是它的优点，但是若祇靠这种几何运算来介决实际当中所遇到的（矢量）问题是远为不够的。这祇需从有限几个矢量根据上面的运算法则来求他们的和与差，其图形就变得相当复杂和难于计算，从这可以看出它的缺陷来了，为此，我们有必要把矢量带进坐标系当中来，把数和形结合起来研究矢量。

设有一空间直角坐标系 $O-xyz$ 和矢量 $\vec{a}$（图1.7）

我们知道矢量是由它的模和方向确定的，这里先考虑矢量$\vec{a}$在直角坐标系$O-xyz$中如何去求它的模数。

首先把矢量$\vec{a}$平行移动而不变其方向，使得$\vec{a}$的起点与原点O重合。



（图1·7）

这样，矢量$\vec{a}$的模就是$O(0,0,0)$与$M(x,y,z)$间的距离$|OM|$，即有

$$|\vec{a}|^2=|OM|^2=|OM'|^2+|M'M|^2=|OP|^2+|PM'|^2+|M'M|^2$$
$$=|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2=x^2+y^2+z^2$$

（注意到$\triangle OM'M$及OPM都是直角三角形）

所以 $|\vec{a}|=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

而矢量$\vec{a}$的方向，可以由$\vec{a}$的正方向（也即$\overrightarrow{OM}$）分别与OX，Oy，Oz的正方向的夹角α，β，γ来表示，α，β，γ称作矢量$\vec{a}$的方向角，如果给了矢量的方向角，该矢量的方向也就完全确定了（图1·7）

综上所述有下面的用投影来表示矢量的方法

由图1·7可知，起点在原点O的矢量$\vec{a}$，其终点M的坐标为

$$x=|\vec{a}|\cos\alpha$$
$$y=|\vec{a}|\cos\beta$$
$$z=|\vec{a}|\cos\gamma$$

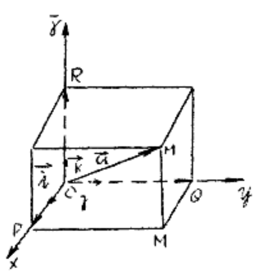
并且矢量$\vec{a}$由终点M的坐标完全确定

由图1·8知道

$$\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}$$

即 $\vec{a}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$

$$=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$



（图1·8）

（$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$是x，y，z轴上的单位矢量

也就是矢量$\vec{a}$可以用其终点的坐标表达为

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

如果$\vec{a}$的起点不在原点，则同样可以看到

$$\boxed{\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}}$$

其中　$a_1=|\vec{a}|\cos\alpha$，$a_2=|\vec{a}|\cos\beta$，$a_3=|\vec{a}|\cos\gamma$，分别叫做矢量$\vec{a}$在x轴、y轴、z轴上的投影，而

$$\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma$$

叫做矢量$\vec{a}$的方向余弦。这个式子就叫作矢量的投影表达式。这个公式建立了矢量$\vec{a}$与三个数量a_1，a_2，a_3的对应关系，把矢量和数量统一起来　它对于矢量所起的作用，就像坐标对于点所起的作用一样。

从投影表示式知道　矢量$\vec{a}$的模是

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

而矢量

$$\vec{a}^0=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$$

是以α　β，γ为方向角的单位矢量，即

$$|\vec{a}^0|^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

该式说明矢量的三个方向角并不是独立的，必须适合方向余弦的平方和等于1这个条件。

以上考虑的都是自由矢量，即起点并不是固定的，起点在坐标原点的固定矢量 $\vec{OM}=\vec{r}$ 是一个有用的矢量　叫做点M的矢径，它是专用来确定空间任一点M的位置的，设已知点M的坐标为（x，y，z），则　可以表示为

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

现在我们来看矢径用于物理学中的例子。

例 设在坐标原点处放有带正电量为Q的质点，现在我们来求在点$M(x,y,z)$的一个单位正电荷$q=+1$在电场中所受的力$\vec{E}$（$\vec{E}$就叫做电场在该点的电场强度）（图1.9）

由库仑定律知，这个力的大小E正比于Q，反比于两点距离的平方，即

$$E=k\frac{Q}{r^2}$$

其中k为比例常数

现在来确定$\vec{E}$的方向，由实验知，$\vec{E}$的方向是由Q指向$q=+1$的方向，设$\vec{r^0}$是与矢径$\vec{r}$同方向的一个单位矢量，则

$$r\vec{r^0}=\vec{r} \quad 或即 \quad \vec{r^0}=\frac{\vec{r}}{r}$$

故有

$$\vec{E}=E\vec{r^0}=k\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

如果写成投影的形式，则有

$$\vec{E}=k\frac{Q}{r^3}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

而$\vec{E}$在三个坐标轴上的投影为

$$E_1=k\frac{Q}{r^3}x,\quad E_2=k\frac{Q}{r^3}y,\quad E_3=k\frac{Q}{r^3}z$$

§1.3 矢量的数量积

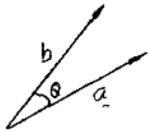
以下我们考虑矢量的乘法运算，这并不是说因为数量有乘法运算，而矢量就非有乘法运算不可，而是由于解决实际问题的需要而抽象出来的，这里介绍矢量的两种乘积，即矢量的数量积和矢量积，先考虑前者。

数量积 两个矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$的模与夹角余弦的乘积$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，叫做$\vec{a}$和$\vec{b}$的数量积，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$（图1.10）

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

这里为了夹角唯一确定起见，规定 $0\leqq\theta\leqq\pi$，

所以两个矢量经上述运算得到的是一个数值有数量积之称，又由于它是用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 中间加上一点来表示的，故也称为点积



（图 1.10）

譬如有力 $\vec{F}$ 作用在某一物体上，物体有一段位移 $\vec{S}$，这力便作了功，一般说力 $\vec{F}$ 与位移 $\vec{S}$ 不一定同向，它们之间有一夹角 θ（图 1.11）力可以分解成与 $\vec{S}$ 平行的分力和与 $\vec{S}$ 垂直的分力，前者作功，后者不作功，所以 $\vec{F}$ 所作的功为

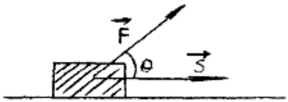


图 1.11）

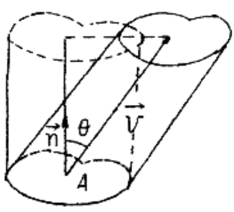
$$W=|\vec{F}|\cos\theta\cdot|\vec{S}|$$
$$=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cos\theta$$

按我们上述的定义，这就是 $\vec{F}$ 与 $\vec{S}$ 的数量积 $\vec{F}\cdot\vec{S}$

再看一个流体力学的简单问题，设有一均匀的以常速 $\vec{V}$ 流动的流体，试求在单位时间内流过一个平面块 A 的流量（即流过的流体的质量），设已给出平面块的一个单位法线矢量 $\vec{n}$ 它的方向是指向流体流向的那一侧的（图 1.12）若 $\vec{n}$ 与 $\vec{V}$ 的夹角为 θ，由于单位时间内流体粒子向 $\vec{V}$ 的方向走过的距离为 $|\vec{V}|$，所以在单位时间内流过平面块 A 的流量将充满一个以 A 为底以 $|\vec{V}|$ 为斜高的一个斜柱体，而柱体的体积等于以 A 为底以 $|\vec{V}|\cos\theta$ 为高的正柱体体积 $A|\vec{V}|\cos\theta$，所以欲求的流量为

$$M=\rho A|\vec{V}|\cos\theta$$

这也可以看作矢量 $\rho A\vec{n}$ 与 $\vec{V}$ 的数量积



（图 1.12）

矢量的数量积有下面一些运算规律和性质，它们可以用来简化计算和理论分析（可自行证明）

（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$（交换律）

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$ （分配律）

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$ （结合律）

（ii）$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|^2$ 或记作

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$$

（iii）两个（非零）矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直的充分必要条件是

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

为了用代数方法研究矢量的数量积，必须考虑怎样由矢量的投影表达式求数量积

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$

$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$

求 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$

按照运算规则（i），可把括号内的矢量乘开来

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1\vec{i}\cdot\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\cdot\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\cdot\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\cdot\vec{i}$$
$$+a_2b_2\vec{j}\cdot\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\cdot\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\cdot\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\cdot\vec{j}$$
$$+a_3b_3\vec{k}\cdot\vec{k}$$

由于$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$是两两互相垂直的单位矢量，故由（ii），（iii）

知 $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$

$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|^2=1$　　$\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}|^2=1$　　$\vec{k}\cdot\vec{k}=|\vec{k}|^2=1$

$\therefore$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

例　设力$\vec{F}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$作用到一质点上，质点的位移$\vec{s}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，力的单位是公斤，位移的单位是米，则所作的功为

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}=2\cdot3+4\cdot2+6\cdot(-1)=8\ \text{公斤·米}$$

§14 矢量的矢量积

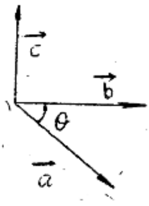
矢量积　两个矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的矢积是一个新的矢量$\vec{c}$，它的模为

$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\quad(0\le\theta\le\pi\text{ 是}\vec{a}\text{与}\vec{b}\text{的夹角})$$

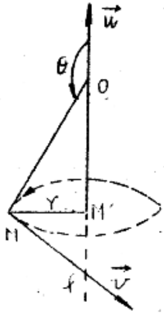
其方向由右手法则确定，即$\vec{c}$与$\vec{a}$，$\vec{b}$两个矢量都垂直，从$\vec{c}$的正方向

规定，由$\vec{a}$按反时针方向转到$\vec{b}$所转出的角度是θ（图1.15）这就是$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$构成右手系统）

$\vec{a}$和$\vec{b}$的矢积用$\vec{a}\times\vec{b}$表示，也称为叉积



（图1.15）



（图1.14）

现在举一个物理学中引用矢积的例子 设有一质点绕空间一固定轴ℓ作等速圆周运动（圆的半径为Y），角速度为w，旋转方向如图1.14所示，今欲求质点M处的线速度$\vec{v}$，记质点运动的圆周的中心是点M′，于是$|MM'|=Y$，$\vec{v}$的大小是Yw，方向是圆的切线方向，现在我们试用简单的方法来表示$\vec{v}$。

在轴ℓ上任取一定点O，以O为起点在轴上作一矢量$\vec{w}$，使它的模等于角速度w，并且从$\vec{w}$的正方向规定质点运动的旋转方向是反时针方向，我们称矢量$\vec{w}$为角速度矢量，于是

$$\vec{v}=\vec{w}\times\overrightarrow{OM}$$

这是因为

$$|\vec{w}\times\overrightarrow{OM}|=|\vec{w}|\,|\overrightarrow{OM}|\sin\theta=w|OM|\sin\theta$$
$$=w|\overrightarrow{OM}|\sin\angle MOM'=w|MM'|=wY$$

这就是说，$\vec{w}\times\overrightarrow{OM}$的模与$\vec{v}$的模相等，其次，从图上不难看出$\vec{w}\times\overrightarrow{OM}$的指向就是$\vec{v}$的正向，所以这两个矢量相等。

矢量的矢积有下面一些运算规律和性质：

矢量的矢积有下面一些运算规律和性质：

(i) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ （分配律）

$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ （结合律）

(ii) $\vec{a}\times\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\sin\theta=\vec{0}$ （$\vec{0}$表示模为0，方向任意的矢量，称为另矢量）

(iii) 两个矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$平行的主要条件是

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

由(ii)，(iii)知

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

所以$\vec{a}\times\vec{b}$的投影表示式为

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})\\&=a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}\\&+a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}\\&+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}\\&\quad(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\end{aligned}$$

这公式可以用二阶行列式写成

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

又可用三阶行列式记成

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

§1.5 混合积与二重矢量积

还有两个式子，是由数量积和矢量积连续两次运算得出来的，即 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 和 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$；前者称作混合积，后者称做二重矢量积。因为一些问题的矢量代数运算中要遇到，故简单介绍如下：

混合积的计算法　设

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\qquad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

$$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$$

利用数量积和矢量积的计算公式，可以得到混合积的计算公式为

$$\vec{a}\ (\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

混合积有如下的几何意义：

由数量积、矢量积的定义可知

$$\vec{a}\ \ (\vec{b}\times\vec{c})=|a|\cos\theta\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|$$

其中 θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}\times\vec{c}$ 的夹角，由图 1.13 知 $|\vec{a}|\cos\theta$ 是以 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为边的平行六面体的高 h，$|\vec{b}\times\vec{c}|$ 是以 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 为边的平行四边形的面积。

所以 $|\vec{a}\ (\vec{b}\times\vec{c})|$ 的几何意义是以 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为边的平行六面体的体积。从这个几何意义知道，三个矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面的充要条件是其混合积

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$$

关于二重矢量积，有一个等式在简化一些运算中和研究一些几何问题时是很方便的，就是

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

由矢量积的定义可知，$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ 与 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}\times\vec{c}$ 都垂直，由图 1.13 知，$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ 是在 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 所在的平面上，而上述等式说明，在 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 平面上怎样用这三个矢量来表示二重矢量。

§1.6 矢量导数

以往我们所考虑的数量函数的导数——即函数变化率的问题都不必考虑方向问题，如果我们要考虑带有方向的一类问题，就感到不太方便，所以有必要考虑连方向包括在内的导数，即矢量导数。

Ⅰ 矢量函数及其导数

设矢径 $\vec{r}$ 的端点 M (x, y, z) 在某一空间曲线 l 上变动，l 的方程（参数方程）是：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

则矢径 $\vec{r}$ 是参数 t 的函数，称为矢量函数

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

若 x, y, z 对 t 可导，则可定义 $\vec{r}(t)$ 对 t 的导数如下。

给 t 的改变量 Δt，相应地 x, y, z, r 都有了改变量，且它们的关系式为

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

除以 Δt，得

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，上式极限存在（因 x, y, z 对 t 可导）称此极限值为 $\vec{r}$ 对 t 的矢量导数，记成

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k}$$

这个导数仍是一矢量，它的模为

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

而它的方向数为 $\left\{\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right\}$

Ⅱ．矢量导数的力学意义

设质点的运动方程为

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

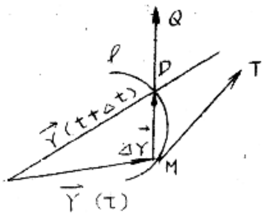
其中 t 表示时间，则 $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 即表平均速度。如以 $\vec{v}$ 表瞬时速度，则

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

我们来认定一下 $\vec{v}$ 的方向　设 $\Delta t>0$（$\Delta t<0$ 的情形也可同样考虑）（图2.1）

$$\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{MP}}{\Delta t}=\overrightarrow{MQ}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，$P\to M$，而 $\vec{Q}$ 的极限位置即曲线 l 在点M的切线 $\overrightarrow{MT}$，所以 $\frac{d\vec{r}}{dt}$ 表示切线速度，它的指向是 t 的增加方向



（图 2.1）

例　设质点的运动方程为

$$\vec{r}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(a\sin t)\vec{j}+bt\vec{k}$$

求它的速度

解．$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(-a\sin t)\vec{i}+(a\cos t)\vec{j}+b\vec{k}$

$$v=|\vec{v}|=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

Ⅲ．矢量对弧长 s 的导数

设 s 为由某一点算起的曲线长，$\vec{r}$ 是 s 的函数，表为

$$\vec{r}=\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}$$

仿照上述Ⅱ得

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta s}=\frac{dx}{ds}\vec{i}+\frac{dy}{ds}\vec{j}+\frac{dz}{ds}\vec{k}$$

但

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{MP}{\widehat{MP}}=1$$

可见 $\frac{d\vec{r}}{ds}$ 是切线单位矢量，今以 $\vec{\tau}$ 表之，则

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}$$

以 α，β，γ 为 $\vec{\tau}$ 的方向角时，则可写成

$$\vec{\tau}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$$

于是得切线方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}$$

注意到 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，可得弧长的微分

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

Ⅳ　导数公式

矢量导数公式与数量导数公式相似，今将常用者列在下表。

(Ⅰ) $\frac{d}{dt}\vec{c}=\vec{0}$　，$\vec{c}$ 为常矢量

(Ⅱ) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)=\frac{d\vec{r}_1}{dt}+\frac{d\vec{r}_2}{dt}$.

(Ⅲ) $\frac{d}{dt}(u\vec{r})=\frac{du}{dt}\vec{r}+u\frac{d\vec{r}}{dt}$，$u$ 表 t 的数量函数

(Ⅳ) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_1\cdot\frac{d\vec{r}_2}{dt}$　（$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$ 可交换次序）