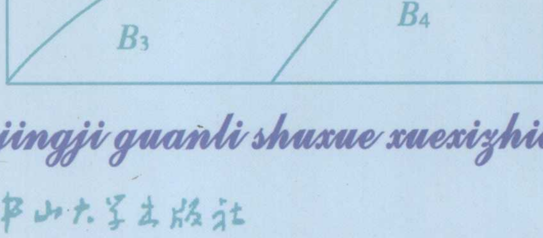
大学数学学习指导丛书

经济管理数学

学习指导与习题解析

梅家斌 欧贵兵 郭文秀 唐 强 编



jingji guanli shuxue xuexizhidao yu xitijiexi

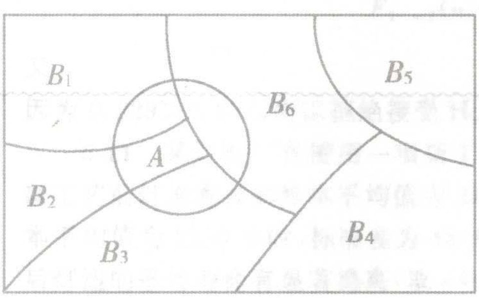
中山大学出版社

大学数学学习指导丛书

经济管理数学

学习指导与习题解析

梅家斌　欧贵兵　郭文秀　唐　强　编



Jingjiguanli shuxue xuexizhidao yu xitijiexi

中山大学出版社
·广　州·

图书在版编目(CIP)数据

经济管理数学学习指导与习题解析/梅家斌,欧贵兵,郭文秀,唐强编.—广州:中山大学出版社,2004.8

(大学数学学习指导丛书)

ISBN 7-306-02308-X

Ⅰ.经…　Ⅱ.①梅…　②欧…　③郭…　④唐…　Ⅲ.经济管理-经济数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第046627号

选题策划:曾纪川
责任编辑:舟　雨　李立鹏
封面设计:朱霭华
责任校对:李春梅
责任技编:黄少伟
出版发行:中山大学出版社
　　　编辑部电话(020)84111996,84113349
　　　发行部电话(020)84111998,84111160
地　　址:广州市新港西路135号
邮　　编:510275　　传真:(020)84036565
印 刷 者:江门市新教彩印有限公司
经 销 者:广东新华发行集团
规　　格:787 mm×1092 mm　1/16　20.25印张　505千字
版次印次:2004年8月第1版　2004年8月第1次印刷
定　　价:29.00元

内容简介

本书是邓成梁主编、华中科技大学出版社出版的《经济管理数学》教材的教学辅导教材.本书共分三篇,内容分别为:线性代数、线性规划、概率统计.各篇均按章编写,分内容提要(包括本章基本要求、重点、难点)、释疑解难、典型例题解析、习题选解几个专题.

本书内容丰富、题型全面、方法多样、技巧性强.既可作为经济管理类大专、本科生配套学习、复习资料,又可作为高年级学生备考研究生的指导书.同时,亦可作为教师上习题课和复习课的参考书.

前　言

邓成梁主编的《经济管理数学》是文科及经济管理类大专、本科生广泛使用的一本好教材.该教材涵盖了线性代数、线性规划、概率论与数理统计的基本内容.为了帮助读者学习和使用这本教材,掌握上述经济数学的基本概念、方法和知识,并帮助读者顺利通过期末考试(或结业考试)和研究生入学考试,我们编写了《经济管理数学学习指导与习题解析》这本书.

本书按篇、章编写.在编写中由于顾及到知识的衔接性,将原教材中第二、第三篇顺序交换,但各篇包含的章节顺序不变.本辅导教材共分三篇十四章,各章均分为如下四个内容:

一、内容提要:简要地小结了教材中该章的主要内容、定理和计算公式,便于读者提纲挈领地掌握该章知识并运用于解题.

二、释疑解难:提出了读者学习各章知识中重要的且容易产生混淆的疑难问题,并进行辅导答疑,以便扫除读者学习和复习时的障碍,避免出现错误.

三、典型例题解析:针对各章重要的知识点,将一些常用的解题方法,结合典型例题进行解析,便于读者分类掌握各种方法和技巧.在解答时,尽量做到一题多解,从而使读者能够多视角地把握问题,提高分析问题的能力.所选例题有难有易,兼顾到学生应对本科考试及考研的需要,适用于不同层面的群体.

四、习题选解:对教材中各章部分习题作了提示和简解.习题解答一般不再进行分析,仅供学生做题时参考.

我们相信,同学们通过本书的学习,对于掌握本教材的内容、提高自身分析问题的能力、应对各种考试是大有裨益的.

由于我们水平有限,加之时间仓促,书中错误和缺点在所难免,恳请读者和同行批评指正,以便再版时修改.

本书由梅家斌教授以及欧贵兵、郭文秀、唐强编写,高琨同志参加本书部分习题的解答及校对.

目　　录

第一篇　线性代数

第一章　行列式

一、内容提要

1. 行列式的定义

1）**对角线法则**　二、三阶行列式的对角线法则为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \end{aligned}$$

2）**逆序数**　在自然数的一个全排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，当 $s < t$ 时，有 $j_s > j_t$，这时 $j_s > j_t$ 违反了自然顺序，就称它们构成了一个**逆序**. 排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记作 $N = N(j_1j_2\cdots j_n)$. 如果 N 是奇数，称此排列为**奇排列**；N 为偶数，则称此排列为**偶排列**.

3）**n 阶行列式定义**　设有 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$，将其排成 n 行 n 列的方表，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称其为 **n 阶行列式**，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当这项中元素的行标按自然顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. n 阶行列式共有 $n!$ 项，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中“$\sum$”是对所有 n 级排列求和. 行列式有时简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

4) **几种常见的重要行列式**

i) **对角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$ 称对角形行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(其中未写出的元素为零,以下同)

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

ii) **三角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & & \cdots \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \ddots & & \\ \cdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分别称为上三角形行列式和三角形行列式,且有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & & \cdots \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \ddots & & \\ \cdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2. 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式变号.

(交换行列式 i,j 两行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$,交换 i,j 两列记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.)

推论 1 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行(列),等于以数 k 乘此行列式,即如果设 $D = |a_{ij}|$,则

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot D$$

推论 2 如果行列式某一行(列)的所有元素有公因子 k,则 k 可以提到行列式外面来.[行列式第 i 行(列)公因子 k 提出来记为 $r_i \div k(c_i \div k)$.]

推论 3 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例,则行列式的值为零.

性质 4 如果将行列式 D 中的某一行(列)的每一个元素都写成两个数的和,例如 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ $(j = 1,2,\cdots,n)$,那么这个行列式等于这样两个行列式之和:第一个行列式的第 i 行是 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$;第二个行列式的第 i 行是 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$,其它各元素都不变.即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D = D_1 + D_2$.

性质 5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应位置的元素上,则行列式不变.

(第 j 行乘数 k 加于第 i 行记 $r_i + kr_j$;第 j 列乘数 k 加于第 i 列记 $c_i + kc_j$.)

3. 行列式按行(列)展开

1) **余子式** 在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后,余下的 $n-1$ 阶行列式,称为 D 中元素 a_{ij} 的 **余子式**,记为 M_{ij},即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) **代数余子式** a_{ij} 的余子式 M_{ij} 前添加符号 $(-1)^{i+j}$,称为 a_{ij} 的**代数余子式**,记为 A_{ij},即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

定理 1.1 将一个排列中的任意两个数调换位置,则它的逆序数改变奇偶性.

定理 1.2 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

定理 1.3 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的任一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余

子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0 \quad (i\neq s)$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0 \quad (j\neq t)$$

定理 1.4 (克莱姆法则)设线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\qquad\qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

则该方程组有且仅有惟一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}\quad(j=1,2,\cdots,n)$,其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换为方程组的右端常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 后得到的行列式.

定理 1.5 齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\\ \qquad\qquad\qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

当系数行列式 $D\neq 0$ 时,仅有零解.

本章基本要求、重点与难点

1. 基本要求

1) 掌握 n 阶行列式的定义、性质,掌握计算 n 阶行列式的基本方法和技巧.

2) 掌握克莱姆法则,并能运用克莱姆法则解线性方程组.

2. 重点与难点

重点 n 阶行列式的计算.

难点 行列式的定义.

二、释疑解难

1. 计算 n 元排列的逆序数常用的方法有哪些?

答 常用的方法有:

1）分别算出排列中每个元素后面比该元素小的数码个数之和.

2）分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和.

即算出排列中每个元素的逆序数.这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

3）如果在不要求计算排列的逆序数，而只要求讨论排列的奇偶性时，则可以利用对换，将所给排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 变成标准排列 $1\ 2\cdots n$，根据对换次数的奇偶性来确定所给排列的奇偶性.如排列 523146879，对换 1 与 5，得 123546879，再对换 4 与 5，得 123456879，再对换 7 与 8，得 123456789，其对换 3 次，故所给排列为奇排列.

2. 行列式有哪些常用公式？

答 常用公式有：

1）范德蒙行列式，即

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

2）三角形行列式，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & \ddots & \cdots\\ 0 & & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & & 0\\ \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \iddots & \\ a_{n1} & & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & & a_{1n}\\ & \iddots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3. 计算行列式的方法有哪些？

答 计算行列式的方法通常有：

1）依定义计算行列式. 2）用对角线法计算行列式，它只适用于二、三阶行列式.

3）利用一些简单的、已知的行列式来计算行列式.

例如，利用三角形行列式；一行（列）全为零的行列式，两行（列）成比例的行列式；范德蒙行列式；等等.

4）利用行列式性质对行列式进行变形，变成已知的或容易计算的行列式.

5）利用按行（列）展开的性质（或拉普拉斯定理）对行列式进行降阶来计算行列式.

6）用数学归纳法计算行列式.

7）综合运用上述各法来计算行列式.

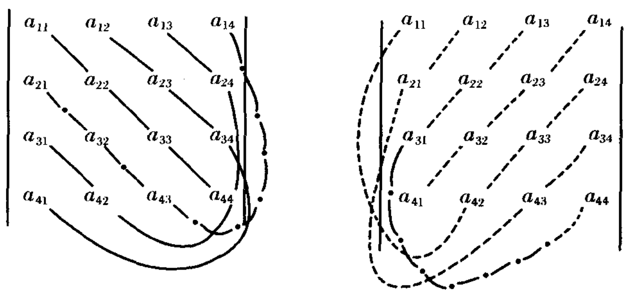
其中 3），4），5），6），7）最常用.

4. 二、三阶行列式的计算可按对角线法则进行，为什么 n 阶（$n>3$）行列式没有类似的法则？

答 对于四阶行列式，如果按照对角线法则（如下图），那么只能写出八项，然而依定义，

四阶行列式是 $4! = 24$ 项的代数和. 另外,这样写出的项的符号也不一定正确. 譬如次对角线上元素的乘积为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$,其列排列 4321 之逆序数为 6,应带正号,而不是负号.

因此,在计算 $n(>3)$ 阶行列式时,再不能应用对角线法则.



5. 计算行列式时利用行列式的性质很重要,试进一步加以说明.

答 计算行列式应根据具体情况具体分析,但总的原则是利用行列式的性质将所给行列式化成简单的、已知的或容易计算的行列式. 下面列举几个常用到的情况.

1) 将行列式各行(列)分别乘以一个数统统加到某一行(列)上去. 比如爪型行列式(设 $a_i \neq 0, i = 2,3,\cdots,n$)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ b_2 & a_2 & & & \\ b_3 & & a_3 & & \\ \cdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

那么将第 i 列的 $-b_i/a_i$ 倍($i = 2,3,\cdots,n$)统统加到第 1 列,得 $D_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}$,其中 $c_1 = a_1 - \left(\frac{b_2c_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_nc_n}{a_n}\right)$,于是得 $D_n = c_1a_2\cdots a_n$.

2) 逐行(列)相加减. 比如计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

从第 $n-1$ 行直到第 1 行,每一行乘以 -1 加到下一行,得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$$

3) 加边法. 此法大多适用某一列(行)有一个相同的字母,比如计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+m & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+m & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+m \end{vmatrix}$$

添加一行一列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+m & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+m & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+m \end{vmatrix}$$

用第 1 行的 -1 倍加到其它各行，得爪型行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & m \end{vmatrix}$$

当 $m=0$ 时，由 1) 知 $D_n=0$. 当 $m\neq 0$ 时，将第 2 列直到第 n 列的 $\frac{1}{m}$ 倍统统加到第 1 列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} c & a_1 & \cdots & a_n \\ & m & & \\ & & \ddots & \\ & & & m \end{vmatrix} = cm^n$$

其中 $c = 1 + \frac{1}{m}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

(4) 将某一行(列) 的倍数分别加到其它行(列). 这里不再举例.

5) 按某一行(列) 展开，比如计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

从第 2 行开始，每行乘以 -1 加到上一行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，得

$$D_n=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1\end{vmatrix}$$

再从第 2 行开始，每一行乘以 -1 加到上一行，得

$$D=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}x & & & & \\ 1-x & x & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & x & \\ & & & 1-x & 1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}x^{n-2}$$

三、典型例题解析

1. 利用定义计算行列式

例 1-1 试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是六阶行列式 $D_6=|a_{ij}|$ 中的项.

分析 题中所给两个数都是 D_6 中不同行列的 6 个元素的乘积. 因此要判断它们是不是 D_6 中的项，关键是看它们是否满足符号规律.

解 第一个数 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 的 6 个因子的第一个下标为标准排列，第二个下标排列 431265 的逆序数为 6，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是 D_6 中的项.

第二个数可重新排序成 $-a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$，此时，第二个下标排列 452316 的逆序数为 8，所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是 D_6 中的项.

例 1-2 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}x & 1 & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 2x & 1\end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

解 根据行列式定义，$f(x)$ 是一个 x 的多项式函数，且最高次幂为 x^3. 显然含 x^3 的项有两项，即主对角上 4 个元素之积 x^3 和对应于 $(-1)^{N(1\,2\,4\,3)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 的项 $-x\cdot x\cdot 1\cdot 2x=-2x^3$，对应多项式 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -1.

例 1-3 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1\\ n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

分析 由定义知，n 阶行列式共有 $n!$ 项，每一项的一般形式为 $(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

若某一项 n 个元素的乘积中有零因子，则该项为零. 由于本行列式中零元素较多，因而为零的项就较多，故只须找出那些不为零的项就可求得该行列式的值.

解　所给行列式中，第一行元素除了 a_{12}（即 $p_1=2$）以外其余都为零，而第二行元素除了 a_{23}（即 $p_2=3$）以外其余都为零. 继续分析第三行，第四行，…，第 n 行，可知在 $n!$ 项中只有一项 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 不为零，且它的列标排列 $23\cdots n1$ 的逆序数为 $n-1$，于是

$$D_n=(-1)^{n-1}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}n!$$

例 1-4　证明 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 所有全排列中，奇偶排列各占一半.

证　因为 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=0$$

于是，根据行列式定义有 $D_n=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{N(p_1p_2p_3\cdots p_n)}=0$，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列. 该和式中共有 $n!$ 项，且每项的绝 3 对值都是 1. 所以上面和式 1 和 -1 的个数相等，均为 $\frac{n!}{2}$ 个. 这说明 $1,2,\cdots,n$ 的所有全排列中，奇偶排列各占一半.

2. 利用行列式性质计算

(1) 利用行列式性质

一般情况下，当 n 较大时直接用定义计算 n 阶行列式几乎是不可能的事. 而利用行列式的性质可以简化行列式的计算.

例 1-5　若 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 的元素满足 $a_{ji}=-a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 D_n 为反对称行列式. 证明奇数阶反对称行列式的值为零.

证　各行提出 -1 得

$$D_n=(-1)^n|-a_{ij}|=(-1)^n|a_{ji}|=(-1)^nD_n^{\mathrm{T}}$$

因为 n 为奇数，且 $D_n^{\mathrm{T}}=D_n$，所以

$$D_n=-D_n,\quad 即\quad D_n=0$$

于是奇数阶反对称行列式的值为零.

例 1-6　计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2&\cdots&a_1+b_n\\a_2+b_1&a_2+b_2&\cdots&a_2+b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n+b_1&a_n+b_2&\cdots&a_n+b_n\end{vmatrix}$$

解　当 $n=1$ 时，$D_1=a_1+b_1$. 当 $n=2$ 时，$D_2=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$. 当 $n\geqslant 3$ 时，

$$D_n\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2&\cdots&a_1+b_n\\a_2-a_1&a_2-a_1&\cdots&a_2-a_1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n-a_1&a_n-a_1&\cdots&a_n-a_1\end{vmatrix}=0$$

综上可得

$$D_n=\begin{cases}a_1+b_1, & n=1\\(a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2\\0, & n\geqslant 3\end{cases}$$

注 1）由例1-6可见，对一般的n阶行列式，其值可能随阶数n的改变而变化，应注意讨论.

2）例1-6中行列式，当$n\geqslant 3$时也可先把第一列分解开而得两个行列式的和，然后再分别计算两个行列式.

（2）**化为三角形行列式**

以下n类行列式可化为三角形行列式.

(a) 箭形行列式

例 1-7 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

解 $$D_n\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1-\frac{1}{j}c_j}\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{j}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right)$$

注 例1-7中的行列式称为箭形行列式，可简单地用符号$|\nwarrow|$代替.其它箭形行列式有$|\nearrow|$，$|\swarrow|$，$|\searrow|$，它们均可用类似的方法化为某种三角形行列式.

(b) 可化为箭形的行列式

例 1-8 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&x_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&x_3&\cdots&a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&x_n\end{vmatrix},x_i\neq a_i,i=1,2,\cdots,n$$

解 $$D_n\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}x_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1-x_1&x_2-a_2&0&\cdots&0\\a_1-x_1&0&x_3-a_3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1-x_1&0&0&\cdots&x_n-a_n\end{vmatrix}$$