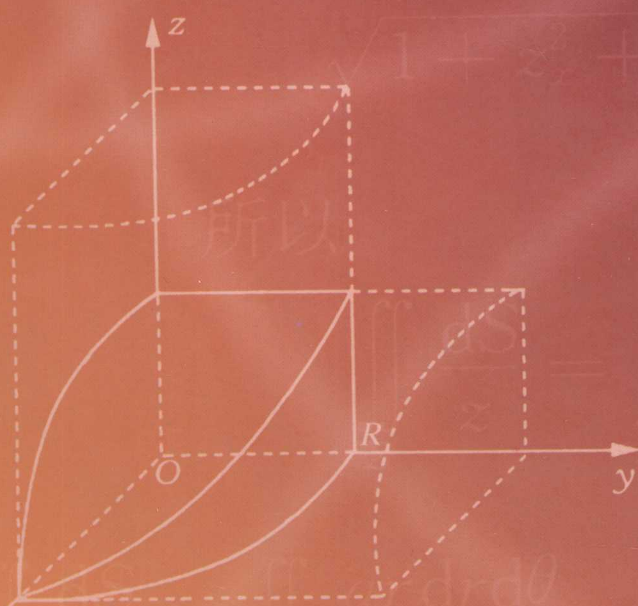
◆ 上海市高等院校重点课程建设项目 ◆

GAODENG SHUXUE FUDAO

高等数学辅导

上海理工大学高等数学教研室　编



上海财经大学出版社

上海市高等院校重点课程建设项目

高等数学辅导

上海理工大学高等数学教研室　编

O13
W32

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/上海理工大学高等数学教研室编．—上海：上海财经大学出版社，2005.10

ISBN 7-81098-496-9/O·013

Ⅰ.高…　Ⅱ.上…　Ⅲ.高等数学-高等学校-自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 109992 号

□ 责任编辑　袁　敏

□ 封面设计　周卫民

□ 版式设计　孙国义

GAODENG SHUXUE FUDAO

高 等 数 学 辅 导

上海理工大学高等数学教研室　编

上海财经大学出版社出版发行

(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)

网　　址：http://www.sufep.com

电子邮箱：webmaster @ sufep.com

全国新华书店经销

上海译文印刷厂印刷

上海宝山周巷印刷厂装订

2005 年 10 月第 1 版　2006 年 9 月第 2 次印刷

787mm×1092mm　1/16　23.5 印张　601 千字

印数：3 151—7 350　定价：28.00 元

前言

高等数学是高等院校的一门主干基础课，是教学的重点评估课程之一，也是硕士学位研究生入学考试的全国统考科目．为了适应目前高等教育发展的需求，帮助读者掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，我们根据多年本科教学和数学研究工作的经验，编写了本书．

《高等数学辅导》是根据国家教委审定的高等工科院校“高等数学课程教学的基本要求”(教学大纲)，并按照普通高等教育“十五”国家级规划教材、同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第五版)的章节顺序编写的．每章由如下内容组成：一、教学要求：详述大纲对该章知识点的要求．二、内容提要：概述一章内容的要点，知识点串讲，要点诠释．三、例题选讲：通过典型例题分析解答，并以注解的形式归纳总结各种题型的解题方法和需注意的问题，加强有关概念和技能方面的训练，开阔解题思路，提高解题能力．四、同步训练：读者通过自己解题，达到对该知识点加深理解、巩固和提高的目的，所附简答有启发和自查的作用．每章末还附有能力测试 A、B 卷及答案，读者可自测对一章知识掌握的程度．打 * 号的题目是难度较大的题目．书末还分别附有《高等数学》上、下册的模拟试卷及 2003～2005 年全国硕士学位研究生的入学试题．

本书旨在帮助读者把握基本概念，明确重点、难点及易混淆的概念，弄清各知识点之间的相互联系，全局性地认识和把握所学内容．掌握基本解题方法和技巧，对所学知识能融会贯通和综合、灵活运用，为后继课程的学习打下坚实的数学基础．

本书由上海理工大学高等数学教研室集体编写(按姓氏笔画排序)：

王美娟　王新利　叶亚盛　华志勇　刘国华
朱祎莉　刘　凌　苏文悌　李　英　李宝庆
张　菁　苟列红　杨　进　施月萍　查富保
贾　高　贾　梅　黄次正　蔡康盛

在本书的编写过程中得到了我校、院各级领导的大力支持，在此表示衷心的感谢．

书中的不足及错误之处，敬请广大的专家、同行、读者斧正．

上海理工大学高等数学教研室
2005 年 9 月

内容提要

本书是学习高等数学的辅导用书．内容编排顺序是按照同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第五版)．每章的内容由如下五部分组成：(1)教学要求；(2)内容提要；(3)例题选讲；(4)同步训练；(5)能力测试．书末还附有《高等数学》上、下册的模拟试卷及 2003～2005 年全国硕士学位研究生的入学试题．

本书可作为读者学习高等数学的参考读物，也可作为报考硕士学位研究生的复习资料，以及自学考试人员的辅导材料．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录

第一章　函数与极限

教学要求

1. 理解映射函数的概念，掌握基本初等函数的性质及其图形，理解复合函数的概念，了解反函数、分段函数的概念，会建立简单实际问题的函数关系模型．

2. 理解极限的概念(对极限的 $\varepsilon-N$,$\varepsilon-\delta$ 定义，给定 ε 求 N 或 δ 不作过高要求)，掌握极限四则运算法则，了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则)，会用两个重要极限求极限，了解无穷小、无穷大的概念，会用无穷小的比较求极限．

3. 理解函数连续性的概念，了解间断点的概念，并会判别间断点的类型．了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质．

第一节　映射与函数

一、内容提要

1. 集合

集合是指具有某种特性的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素．

常用数集：$\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$.

设 $\delta>0$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\},$$

点 a 的去心 δ 邻域记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

2. 函数概念

设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\rightarrow\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记为 $D_f=D$.

构成函数的二要素为定义域 D_f 和对应法则 f，因此两个函数相同的充要条件为定义域相同且对应法则相同．

常用的函数表示方法为：解析法，表格法，图形法，或用语言叙述法．

3. 函数的几种特性

有界性：设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在 $M>0$，对 $\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 X 上有界；否则 $f(x)$在 X 上无界．即 $\forall M>0$，$\exists x_0\in X$，使得 $|f(x_0)|>M$.

单调性：设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 若 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加（或减少）的．

奇偶性：设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，若 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$）恒成立，则称 $f(x)$为偶（或奇）函数．

周期性：设函数 $f(x)$的定义域为 D，若存在 $l>0$，使得对 $\forall x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$ 时，且 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，l 称为 $f(x)$的周期．一般地，周期是指最小正周期．

注 1 如果函数 $f(x)$在 $X\subset D$ 上有界，其界 M 是不惟一的，函数 $f(x)$是否有界与讨论的 X 有关．

注 2 并非每个周期函数都有最小正周期．

注 3 奇偶性必须在对称区间上讨论，单调性及有界性一定要结合具体区间讨论．

4. 反函数

对 $\forall y\in f(D)$，存在惟一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$. 习惯上函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记为

$$y=f^{-1}(x),x\in f(D).$$

注 1 设 $y=f(x)(x\in D)$为单调增加（或减少）函数，则 $f(x)$必有反函数 $f^{-1}(x)$，且 $f^{-1}(x)$在其定义域 $f(D)$上也是单调增加（或减少）函数．

注 2 函数 $y=f(x)$和其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称．

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则函数 $y=f[g(x)](x\in D)$称为由函数 $u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的复合函数，定义域为 D，变量 u 称为中间变量．

6. 初等函数

由常数和基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．

需要注意的是，分段函数不一定不是初等函数，如函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 为分段函数，但它可以认为是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=x^2$ 复合而成，所以它是初等函数．

二、例题选讲

例 1.1.1 求函数 $y=\lg(5x+1)+\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$的定义域．

解 要使函数有意义,需满足$\begin{cases}5x+1>0,\\ \left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1,\\ x+1\neq 0,\end{cases}$即$-\dfrac{1}{5}<x\leqslant 1$,所以 y 的定义域为$(-\dfrac{1}{5},1]$.

例 1.1.2 已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$,求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

解一 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$, 所以

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=1-\cos x.$$

利用函数表示法与任何字母无关的特性为求函数表达式的一种方法.

解二 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=f\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)\right)=f\left(\sin\dfrac{\pi-x}{2}\right)=1+\cos(\pi-x)=1-\cos x.$

以上解题核心是“变形”,这是一种基本方法.

例 1.1.3 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求函数 $f(\arctan x)$的定义域.

解 因为 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,所以 $0\leqslant\arctan x\leqslant 1$,即 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,故所求函数的定义域为 $D=[0,\dfrac{\pi}{4}]$.

例 1.1.4 已知 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$及 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}-g(x), & g(x)<0,\\ 1, & g(x)\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}-(1+x), & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1;\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ f(x), & f(x)\geqslant 0\end{cases}=f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$(因为 $f(x)$总是大于 0).

上面解题的关键是确定中间变量的值域.例如求 $f[g(x)]$时第一个等式,通过观察 $g(x)$的值域即可得到第二个等式.

例 1.1.5 试问下列函数是由哪些简单函数(基本初等函数或不可再分解)复合而成?

(1)$y=(\arcsin 2x^2)^3$;

(2)$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1)是由 $y=u^3,u=\arcsin v,v=2x^2$ 复合而成;

(2)是由 $y=\ln u,u=1+v,v=\sqrt{w},w=1+x^2$ 复合而成.

例 1.1.6 求函数 $y=\begin{cases}-2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & -4\leqslant x<0\end{cases}$ 的反函数.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y=-2x$,值域$-2\leqslant y\leqslant 0$,解得 $x=-\dfrac{y}{2}$;当$-4\leqslant x<0$ 时,$y=x^2$,值域 $0<y\leqslant 16$,解得 $x=-\sqrt{y}$,故所求函数的反函数为 $y=\begin{cases}-\dfrac{x}{2}, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 16.\end{cases}$

例 1.1.7 设函数 f 定义在$[-a,a]$上,证明:

(1)$F(x)=f(x)+f(-x),x\in[-a,a]$为偶函数;

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(2)$G(x)=f(x)-f(-x),x\in[-a,a]$为奇函数；

(3)$f(x)$可表示为某个奇函数与某个偶函数之和．

证明 (1)因为$\forall x\in[-a,a],F(-x)=f(-x)+f(x)$，所以$F(x)$为偶函数．

(2)同理可证．

(3)由(1)和(2)可知，$f(x)=\dfrac{1}{2}[F(x)+G(x)]$，即$f$可表示为某个奇函数与某个偶函数之和．

例 1.1.8 证明不等式：

(1)当$x>0$时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1$；

(2)当$x<0$时，$1\leqslant x\left[\dfrac{1}{x}\right]<1-x$.

证明 (1)当$x>0$时，$\dfrac{1}{x}>0$，故$\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}$，即$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1$.

(2)当$x<0$时，同理可证．

例 1.1.9 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是奇函数，$f(1)=a$，且对任何x，有$f(x+2)-f(x)=f(2)$，则

(1)试用a表示$f(3)$；

(2)a为何值时，$f(x)$是以2为周期的周期函数．

解 (1)因为f在$(-\infty,+\infty)$内是奇函数，$f(1)=a$，所以$f(-1)=-a$. 从而

$$f(-1+2)-f(-1)=f(2)，即\ f(2)=2a,$$

由$f(3)-f(1)=f(2)$，故

$$f(3)=f(1)+f(2)=3a.$$

(2)若$f(x)$是以2为周期的周期函数，所以$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$f(x+2)=f(x)$，而$f(x+2)-f(x)=f(2)$，故$f(2)=0$，即$a=0$.

例 1.1.10 设函数$f(x)$在数集X上有定义，证明：函数$f(x)$在X上有界的充分必要条件为$f(x)$在X上既有上界又有下界．

证明 “$\Rightarrow$”$f(x)$在X上有界，故$\exists M>0$，对于X上任意一点x，有$|f(x)|<M$，即$-M<f(x)<M$，所以$f(x)$有上界M和下界$-M$.

“$\Leftarrow$”设$f(x)$在X上有上界M和下界m，即对于X上任意一点x，有$m\leqslant f(x)\leqslant M$，从而$|f(x)|\leqslant\max\{|m|,|M|\}$，即$f(x)$在$X$上有界．

三、同步训练

1. 已知$f(x)=e^x,f[g(x)]=1-x^2$，求函数$g(x)$及其定义域．

2. 求函数$y=\ln(1-x^2)+\sqrt{\sin\sqrt{x}}$的定义域．

3. 设函数$f(x)$的定义域是$(2,3]$，求$f(\sqrt{9-x^2})$的定义域．

4. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且对任何x,y有$f(xy)=f(x)f(y)-x-y$，求$f(x)$.

5. 在什么条件下，函数$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$的反函数就是其本身？

6. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

7. 证明两个有界函数之积为有界函数．问两个有界函数之商是否为有界函数？若不是，请举反例．

第二节 极 限

一、内容提要

1. 数列极限

定义 设 $\{x_n\}$ 为一数列，若存在常数 a，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

否则，则称数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的，习惯上也说 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在．

注 1 一般地，证明一个数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，就是 $\forall\varepsilon>0$，找 $N\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，只要说明 N 存在即可，没有必要求出满足不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 的最小 N．

注 2 极限过程能够实现“由近似到精确”，“由有限到无限”，“由量变到质变”的飞跃，极限是微积分学的基础，在以后的学习过程要逐步体会这种极限的基本思想．

收敛数列的性质：

(1)（极限的惟一性） 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它的极限惟一．

(2)（收敛数列的有界性） 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界．

(3)（收敛数列的保号性） 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），则存在 $N\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）．

推论 若数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\geqslant 0$（或 $x_n\leqslant 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a\geqslant 0$（或 $a\leqslant 0$）．

(4)（收敛数列与其子数列间的关系） 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任一子数列也收敛，且极限为 a.

注 若数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列发散，或有两个子数列收敛于不同的数，则数列 $\{x_n\}$ 必发散，这样可以用来证明一个数列是发散的．但是不能由数列有两个收敛于同一值的子数列推得数列收敛．

2. 函数极限

(1) $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，若存在常数 A，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$

注 1 定义中的 ε 用来刻划 $f(x)$ 与常数 A 的接近程度，δ 用来刻划 x 与 x_0 的接近程度，δ 相当于数列极限中的 N，依赖于 ε，但并不由 ε 惟一确定．一般地，ε 越小，δ 相应地越小，或取更小也无妨．

注 2 考察 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，仅要求 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近有定义，与在 $x=x_0$ 处

是否有定义无关．因为此时研究的是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近的性态．

注 3 类似地有单侧极限定义，并且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A=\lim_{x\to x_0^+}f(x).$$

(2) $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，若存在常数 A，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty).$$

类似地有 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时的极限定义．

考察 $x\to\infty$ 时有时需要分别考察"$x\to+\infty$"及"$x\to-\infty$"，如 $y=\arctan x$，$y=a^x$ 等，并且

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=A=\lim_{x\to-\infty}f(x).$$

(3) 函数极限的性质

仅以 $x\to x_0$ 形式给出，其他形式类似．

惟一性：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则其极限惟一．

局部保号性：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）．

推论 1 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(A\neq0)$，则 $\exists\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$．

推论 2 若 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，$f(x)\geqslant0$（或 $f(x)\leqslant0$）且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant0$（或 $A\leqslant0$）．

函数极限与数列极限的关系（海涅定理）：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，且满足 $x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^+)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$．

3. 无穷小与无穷大

定义 若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小．

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义），如果对 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$（或 $X>0$），当 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时，有 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大．

注 1 研究无穷小与无穷大，必须与自变量的某一变化过程相联系（如 $x\to x_0$，$x\to\infty$ 等）．

注 2 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大函数 $f(x)$，极限是不存在的，但为了方便，也说"函数的极限是无穷大"，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\text{（或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\text{）}.$$

注 3 无界与无穷大不是相同概念．

定理（无穷小与无穷大之间的关系） 在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大．

函数极限与无穷小之间的关系：

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$$

其中$\lim\alpha(x)=0$.

4. 无穷小的比较

设在自变量的同一个变化过程中，α,β 为无穷小，$\alpha\neq0$，若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小.

若$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0,k>0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

5. 常用求极限的方法

(1)利用极限定义验证某常数是否为已知函数的极限

(2)利用无穷小性质求极限

无穷小性质为：①有限个无穷小的和是无穷小；②有界函数与无穷小的积是无穷小；③有限个无穷小的积是无穷小.

(3)利用极限运算法则求极限

①四则运算法则

若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B;$$

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB;$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq0).$$

②复合函数的极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成，$f[g(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0,\lim_{u\to u_0}f(u)=A,$$

且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

上面法则中把$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$ 换成$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$，而把$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 换成$\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$，可有类似结论.

该法则表明，若函数 $f(u)$和 $g(x)$满足法则的条件，则作代换 $u=g(x)$可把求$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]$化为求$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$，这里 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. 因此作代换也是求极限常用的方法之一.

(4)利用极限存在的准则求极限

准则Ⅰ 若数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

①存在 $N\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时，$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅰ′　若①当 $x\in\mathring{U}(x_0,r)$(或$|x|>M$)时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在，且等于 A.

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

准则Ⅱ′　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界，则 $f(x)$在点 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$必定存在.

类似地可有 $x\to x_0^+,x\to-\infty,x\to+\infty$时的结论.

(5)利用两个重要极限求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

(6)利用等价无穷小替换定理求极限

定理　设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

常见的等价无穷小：当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,\mathrm{e}^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

(7)利用左、右极限求极限

(8)利用函数的连续性求极限

详见下一节内容.

求极限的方法很多，这里所列的只是常用的一些方法．在第三章中将介绍用洛必达法则求极限和用泰勒公式求极限，在第五章中还将介绍利用定积分定义求极限，等等.

二、例题选讲

例 1.2.1　利用数列极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，找 $N\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时，有$\left|\frac{n}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$，由于

$$\left|\frac{n}{n^2+1}-0\right|=\frac{n}{n^2+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon},$$

故取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$即可，因为$\exists N,n>N$时，有$\left|\frac{n}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$.

注　利用定义去验证极限时，其关键是利用适当放大的方法，通常是使分母变小或分子变大．如$\frac{n}{n^2+1}<\frac{1}{n}$，放大后的结果能任意小，原来的式子更能任意小．但放大法又不能放得过大，从而得出错误的结果．如$\left|\frac{n}{n^2+1}-0\right|=\frac{n}{n^2+1}<n<\varepsilon\Rightarrow n<\varepsilon$，取$N=[\varepsilon]$，显然结果是荒谬的．实际上，$N$是不惟一的．这里选取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，也可选取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right],N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$，等等．只要

说明这样的 N 存在即可，没有必要选取使 $\left|\dfrac{n}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$ 成立的最小的 N.

例 1.2.2 用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}=4$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，因为

$$\left|\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}-4\right|=3\left|\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}\right|=3\left|\frac{x-9}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}\right|,$$

令 $|x-9|<5$，即 $4<x<14$，则

$$3\left|\frac{x-9}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}\right|<\left|\frac{3(x-9)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}\right|<\left|\frac{3(x-9)}{(2-1)(2+3)}\right|=\frac{3}{5}|x-9|<\varepsilon\Rightarrow|x-9|<\frac{5}{3}\varepsilon,$$

故取 $\delta=\min\left\{\dfrac{5}{3}\varepsilon,5\right\}$ 即可．所以

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}=4.$$

注 验证极限就是找 δ. 当 $0<|x-9|<\delta$ 时有 $\left|\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}-4\right|<\varepsilon$，而

$$\left|\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}-4\right|=3\left|\frac{x-9}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}\right|,$$

希望由此找到 δ，由于分母中出现 $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)$ 是 x 的函数，问题变得困难了．注意到 $x\to 9$，因此可以预先限定 $|x-9|<5$（或 $|x-9|<1$）等（前者的假设是为了计算简单，但是注意不能放得太大）. 这样就可以得到 x 的范围，从而将 $\left|\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}-4\right|$ 放大．值得注意的是，$\delta=\min\left\{\dfrac{5}{3}\varepsilon,5\right\}$.

例 1.2.3 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\dfrac{1}{4}$；

(2) 令 $\sqrt[6]{1+x}=t$，原式 $=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-1}{t^2-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2+t+1}{t+1}=\dfrac{3}{2}$.

如果利用等价无穷小替换定理来求极限更简单，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x}=\dfrac{3}{2}$.

例 1.2.4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$.

解一 利用三角函数的和差化积及重要极限，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(-2)\dfrac{\sin 2x\sin x}{x^2}=-4$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com