顶尖系列

自主学习先锋

高中步步高

顶尖数学

选修2-2

湘教版

福建人民出版社

顶尖系列

自主学习先锋

高中步步高

顶尖数学

选修2-2

湘教版

福建人民出版社

主　　编

张鹏程（福建师范大学数学与计算机科学学院中学数学教学研究室主任）

编写人员（按姓氏笔画排序）

方秦金　叶文榕　叶青柏　汤锦德　李新岳　陆集宁　陈　言　陈　腾
陈中峰　陈天雄　陈蓓璞　卓道章　林　风　林　婷　林元武　林嘉慧
姚承佳　柯跃海　赵祥枝　倪政翔　黄　雄　黎　强

顶尖数学（选修 2－2）（湘教版）
DINGJIAN SHUXUE

出　　版：福建人民出版社
地　　址：福州市东水路 76 号　　　　邮政编码：350001
电　　话：0591-87604366（发行部）　　87521386（编辑室）
电子邮件：211@fjpph.com
网　　址：http://www.fjpph.com
发　　行：福建省新华书店
印　　刷：福州市东南彩色印刷有限公司
地　　址：福州市金山开发区橘园洲工业 58 幢　　邮政编码：350002
开　　本：787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张：9.75
字　　数：240 千字
版　　次：2008 年 1 月第 1 版　　2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-211-05609-5
定　　价：12.80 元

本书如有印装质量问题，影响阅读，请直接向承印厂调换

编写说明

“高中步步高”根据课程标准，配合各版本教材进行编写。丛书以课为训练单位，以单元为测试单位建构编写体系，符合教学规律，体现课改精神。丛书不仅关注学生夯实基础知识、基本技能，还关注学生学习的自主性、探究性、合作性；不仅关注培养学生学会学习、学会反思、学会自我激励，还关注培养学生学习过程中情感、态度和价值观的形成。

为了使本丛书在理念上与最新教改理念、精神相吻合，我们在本套丛书的编写过程中，坚持“三参与”原则，即颇有造诣的课程研究专家参与，深谙当前基础教育课程改革的教研员参与和具有丰富教学实践经验的一线特、高级教师参与，从而使本丛书在质量上得到充分保证。

“高中步步高”按章（或单元）进行编写，每一章（或单元）一般设：“学习目标”、“要点透析”、“方法指津”、“自我评估”、“探究应用”、“拓展视野”、“归纳整合”、“单元检测卷”等栏目。

“学习目标”是根据各章（或单元）应达到的目标提出具体要求。“要点透析”是以课程标准为基准，以相应版本的教材为落脚点，较详细地分析本章（或单元）内容的重点、难点。“方法指津”通过对精选的经典题目的解析和点拨，拓展学生的思路，提升发散思维能力，掌握科学的学习方法。“自我评估”在题目设计上，特别注重吸收全国各地出现的最新题型，同时注重知识的现代化，以激活学生已有的知识、经验和方法。题目既注重基础性，又强调自主性、参与性、实践性、合作性。“探究应用”特别注重吸收密切联系生产、生活实际的有趣题目，加强探究性习题的训练。“拓展视野”对本章（或单元）知识进行拓展，通过对一些典型的探究型、开放型的题目进行解析和点拨，使学生对章（或单元）内、学科内、学科间知识结构的关系得以把握和拓展。“归纳整合”以树形图、方框图或表格等形式对本章（或单元）知识进行梳理、归纳、整合，使学生对整章（或单元）知识间的逻辑关系有个清楚的认识。经过系统的训练后，通过“单元检测卷”与“模块检测卷”对所学内容进行评价与总结。由于不同学科及不同版本的教材各有特点，因此，上述栏目及其写法允许根据实际需要适当调整，灵活掌握。“检测卷”和“部分参考答案”一般做成活页的形式，以方便使用。

“高中步步高”实现了引导学生从预习到课外阅读全程自主学习的编写理念。我们在栏目设置上创设了科学的整合模式，将“知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观”三维目标分层次地融入书中，激发学生的自主性，使学生的自主学习效果达到最优化，促进学生的全面发展。

本丛书在编写过程中引用了一些作者的作品，在此，对这些作者表示感谢，对一部分未署名的作品的作者表示歉意，并请与我们联系。由于编写时间仓促，书中难免存在不足之处，恳望读者不吝赐教，以便我们今后不断努力改进。

编 者

目录 CONTENTS

第 4 章 导数及其应用

4.1 导数概念

学习目标

1. 通过分析实例，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵.

2. 通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

要点透析

1. 变化率问题来源于现实生活中的实际问题. 平均变化率是一个比值，它是揭示一个量随另一个量变化快慢的重要指标，要注意平均变化率对于不同的实际问题可能有不同的名称. 如：物体运动时的平均变化率就是平均速度，它是位移增量与时间增量的比；曲线的某一条割线的斜率就是纵坐标增量与横坐标增量的比.

2. 函数的平均变化率是从实际问题中抽象出来的一个重要数学概念. 函数的平均变化率是用相对于某一点的自变量的增量和相应的函数的增量来定义的，其中自变量的增量 d 是一个可正可负但不能为 0 的量，而函数的增量可通过函数解析式用自变量的增量表示出来.

3. 函数平均变化率的几何意义是函数曲线上相应两点的割线斜率.

4. 明确利用导数定义求导数的一般步骤：

(1) 求函数的增量 $f(x+d)-f(x)$；

(2) 求平均变化率 $\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}$；

(3) 取极限，得导数 $f'(x)=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}$.

5. “函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数”，“导函数”，“导数”三者之间的区别与联系.

(1) “函数在一点处的导数”，就是在该点函数的改变量与自变量的改变量 d 的比的极限，它是一个数值，不是变量.

(2) “导函数”：如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，就称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，这时对于区间 (a,b) 内每一个确定的值 x_0，都对应着一个导数 $f'(x_0)$，这样就在开区间 (a,b) 内构成一个新的函数，我们把这一新函数叫做 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的导函数，记作 $f'(x)$ 或 y'，即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}$.

(3) 导函数也简称导数，所以，导数 $\begin{cases}\text{个别：} f(x) \text{在一点 } x_0 \text{ 处的导数，}\\ \text{一般：导函数.}\end{cases}$

(4) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

4.1.1 问题探索——求自由落体的瞬时速度
4.1.2 问题探索——求作抛物线的切线

方法指津

例1 一物体的位移函数为 $y=f(t)=t^3+1$，其中 y 表示运动到时刻 t 的位移.（位移单位：m，时间单位：s）.（1）求时间 t 由 3 s 到 5 s 的平均速度；（2）求时间 t 由 3 s 到 4 s 的平均速度；（3）求时间 t 由 3 s 到 3.1 s 的平均速度.

分析 在实际问题中，变化率是一个比值，这个比值一般来说是变化的. 本题中的变化率就是比值 $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$，因为它是位移与时间的比，物理上称为平均速度，也可理解为平均变化率的物理意义. 其他一些实际问题也有类似的变化率，只是所叫的名称各有不同.

解 (1) $\because d=5-3=2(\mathrm{s})$，$f(5)-f(3)=(5^3+1)-(3^3+1)=98(\mathrm{m})$，

$\therefore$ 平均速度 $\bar{v}=\dfrac{f(5)-f(3)}{d}=\dfrac{98}{2}=49(\mathrm{m/s})$.

(2) $\because d=4-3=1(\mathrm{s})$，$f(4)-f(3)=(4^3+1)-(3^3+1)=37(\mathrm{m})$，

$\therefore$ 平均速度 $\bar{v}=\dfrac{f(4)-f(3)}{d}=37(\mathrm{m/s})$.

(3) $\because d=3.1-3=0.1(\mathrm{s})$，$f(3.1)-f(3)=(3.1^3+1)-(3^3+1)=2.791(\mathrm{m})$，

$\therefore$ 平均速度 $\bar{v}=\dfrac{f(3.1)-f(3)}{d}=27.91(\mathrm{m/s})$.

例2 已知函数 $f(x)=2x^2-x+1$.

(1) 求当 $x_1=2$，且 $d=1$ 时，函数增量 $f(x_1+d)-f(x_1)$ 和平均变化率 $\dfrac{f(x_1+d)-f(x_1)}{d}$；

(2) 求当 $x_1=2$，且 $d=0.1$ 时，函数增量 $f(x_1+d)-f(x_1)$ 和平均变化率 $\dfrac{f(x_1+d)-f(x_1)}{d}$；

(3) 求当 $x_1=2$，且 $d=0.01$ 时，函数增量 $f(x_1+d)-f(x_1)$ 和平均变化率 $\dfrac{f(x_1+d)-f(x_1)}{d}$；

(4) 若设 $x_2=x_1+d$，分析 (1)(2)(3) 题中的平均变化率的几何意义.

分析 求函数 $f(x)$ 的平均变化率的步骤是：(1) 根据 x_1 和 x_2 的值写出自变量的增量 d；(2) 由 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+d)-f(x_1)$ 计算函数的增量；(3) 求出的比值 $\dfrac{f(x_1+d)-f(x_1)}{d}$ 就是函数 $f(x)$ 由 x_1 变到 x_2 时的平均变化率，它的几何意义是过图象上两点 $P_1(x_1, f(x_1))$，$P_2(x_2, f(x_2))$ 的直线斜率.

解 $\because f(x)=2x^2-x+1$，$\therefore f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+d)-f(x_1)=2(x_1+d)^2-(x_1+d)+1-(2x_1^2-x_1+1)=2d^2+(4x_1-1)d$.

(1) 当 $x_1=2$，$d=1$ 时，$f(x_1+d)-f(x_1)=2+7=9$，$\therefore \dfrac{f(x_1+d)-f(x_1)}{d}=9$.

(2) 当 $x_1=2$，$d=0.1$ 时，$f(x_1+d)-f(x_1)=0.02+7\times0.1=0.72$，

$\therefore \dfrac{f(x_1+d)-f(x_1)}{d}=7.2$.

(3) 当 $x_1=2$，$d=0.01$ 时，$f(x_1+d)-f(x_1)=0.0002+7\times0.01=0.0702$，

$\therefore \dfrac{f(x_1+d)-f(x_1)}{d}=7.02$.

(4) 在 (1) 题中，$\dfrac{f(x_1+d)-f(x_1)}{d}=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}$，它表示抛物线上点 $P_0(2,7)$ 与点 $P_1(3,16)$连线的斜率；

在 (2) 题中，$\dfrac{f(x_1+d)-f(x_1)}{d}=\dfrac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2}$，它表示抛物线上点 $P_0(2,7)$ 与点 $P_2(2.1,7.72)$连线的斜率；

在 (3) 题中，$\dfrac{f(x_1+d)-f(x_1)}{d}=\dfrac{f(2.01)-f(2)}{2.01-2}$，它表示抛物线上点 $P_0(2,7)$ 与点 $P_3(2.01,7.0702)$连线的斜率.

例 3 自由落体运动的运动方程为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，计算 t 从 3 s 到 3.1 s，3.01 s，3.001 s 各时段内的平均速度（位置 s 的单位：m).

分析 要求平均速度，就是求$\dfrac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$的值，为此需先求出 t_2-t_1 和 s_2-s_1.

解 设 [3，3.1] 内的平均速度为 v_1，则 $t_2-t_1=3.1-3=0.1$ (s)，$s_2-s_1=s(3.1)-s(3)=\dfrac{1}{2}g\cdot3.1^2-\dfrac{1}{2}g\cdot3^2=0.305g(\mathrm{m})$. $\therefore v_1=\dfrac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\dfrac{0.305g}{0.1}=3.05g$ (m/s)；

同理 $v_2=\dfrac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\dfrac{0.030\,05g}{0.01}=3.005g$ (m/s)；

$v_3=\dfrac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\dfrac{0.003\,000\,5g}{0.001}=3.000\,5g$ (m/s).

自我评估

1. 设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 改变到 x_0+d 时，函数的改变量为（　　）.

A. $f(x_0+d)$　　B. $f(x_0)+d$　　C. $f(x_0)\cdot d$　　D. $f(x_0+d)-f(x_0)$

2. 已知函数 $f(x)=x^2+1$，则当 $x=2$，$d=0.1$ 时，$f(x+d)-f(x)$的值为（　　）.

A. 0.40　　B. 0.41　　C. 0.43　　D. 0.44

3. 一质点运动的方程为 $s=5-3t^2$，则在一段时间 $[1,1+d]$ 内相应的平均速度为（　　）.

A. $3d+6$　　B. $-3d+6$　　C. $3d-6$　　D. $-3d-6$

4. 在曲线 $y=x^2+1$ 的图象上取一点 (1，2) 及附近一点 $(1+d,2+h)$，则 $\dfrac{h}{d}$ 为（　　）.

A. $d+\dfrac{1}{d}+2$　　B. $d-\dfrac{1}{d}-2$　　C. $d+2$　　D. $2+d-\dfrac{1}{d}$

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则当 $x=3$，$d=0.01$ 时，$\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}=$________.

6. 已知 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$ (s 单位：m)，则 t 从 3 s 到 3.1 s 的平均速度 $\bar{v}=$________m/s.

7. 设函数 $f(x)=x^2-1$，求：

（1）当自变量 x 由 1 变到 1.1 时，自变量的增量 d；

（2）当自变量 x 由 1 变到 1.1 时，函数的增量 $f(x+d)-f(x)$；

（3）当自变量 x 由 1 变到 1.1 时，函数的平均变化率.

8. 某汽车的紧急刹车装置在遇到特别情况时需在 2 s 内完成刹车，其位移（单位：m）关于时间（单位：s）的函数为 $s(t)=-\frac{1}{3}t^3-4t^2+20t+15$. 求：（1）开始刹车后 1 s 内的平均速度 $\bar{v}_1$；（2）开始刹车后 2 s 内的平均速度 $\bar{v}_2$；（3）刹车 1 s 到 2 s 之间的平均速度 $\bar{v}$.

探究应用

9. 当 $d=\frac{1}{3}$ 时，函数 $y=x^2$ 在 $x=1$，2，3 处的平均变化率最大时对应的点为（　　）.

A. $x=1$　　B. $x=2$　　C. $x=3$　　D. 一样大

10. 如果 $\frac{f(3+d)-f(3)}{d}=2$ 对所有的 d（$d\neq0$）都成立，那么 $f(x)$ 是一个什么样的函数？

4.1.3　导数的概念和几何意义

方法指津

例 1　在自行车比赛中，运动员的位移与比赛时间 t 存在函数关系 $s=10t+5t^2$（s 的单位：m，t 的单位：s），求：

(1) 当 $t=20$，$d=0.1$，0.01，0.001 时的 $s(t+d)-s(t)$ 与 $\dfrac{s(t+d)-s(t)}{d}$；

(2) 在 $t=20$ 时的速度.

分析 平均速度与瞬时速度是两个完全不同的概念，平均速度是相对时间段 $[t_0,\ t_0+d]$ 而言的. 瞬时速度是相对某一时刻 t_0 而言的. 但平均速度又与瞬时速度有着密切的联系，我们可以把瞬时速度看成平均速度在当 $d\to0$ 时变化过程中的极限值.

解 (1) $s(t+d)-s(t)=[10(20+d)+5(20+d)^2]-(10\times20+5\times20^2)=210d+5d^2$；

$\therefore$ 当 $d=0.1$ 时，$s(t+d)-s(t)=21.05$，$\dfrac{s(t+d)-s(t)}{d}=210.5$；

当 $d=0.01$ 时，$s(t+d)-s(t)=2.100\,5$，$\dfrac{s(t+d)-s(t)}{d}=210.05$；

当 $d=0.001$ 时，$s(t+d)-s(t)=0.210\,005$，$\dfrac{s(t+d)-s(t)}{d}=210.005$.

(2) 由导数的定义，在 $t=20$ 时的瞬时速度即为

$$v=\lim_{d\to0}\frac{s(t+d)-s(t)}{d}=\lim_{d\to0}\frac{10(t+d)+5(t+d)^2-10t-5t^2}{d}$$
$$=\lim_{d\to0}\frac{5d^2+10t\cdot d+10d}{d}$$
$$=\lim_{d\to0}(5d+10t+10)=10t+10=10\times20+10=210\ (\text{m/s}).$$

例 2 根据导数定义，求下列函数在 $x=x_0$ 处的导数：

(1) $f(x)=5x+3$，求 $f'(2)$；

(2) $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f'(8)$；

(3) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-2$，求 $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

分析 求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数. 第一步求函数的增量 $f(x_0+d)-f(x_0)$，第二步求平均变化率 $\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$，第三步使 $d\to0$ 求导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{d\to0}\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$，求解时不能给出自变量的增量 d 的具体值，否则求出的是平均变化率，而不是瞬时变化率. 求解的关键是第二步对 $\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 的变形，使分子、分母能约去一个 d.

解 (1) $\dfrac{f(2+d)-f(2)}{d}=\dfrac{[5\times(2+d)+3]-(5\times2+3)}{d}=5$，

$$\therefore f'(2)=\lim_{d\to0}\frac{f(2+d)-f(2)}{d}=\lim_{d\to0}5=5.$$

(2) $\dfrac{f(8+d)-f(8)}{d}=\dfrac{\sqrt{8+d}-\sqrt{8}}{d}=\dfrac{1}{\sqrt{8+d}+2\sqrt{2}}$，

$$\therefore f'(8)=\lim_{d\to0}\frac{f(8+d)-f(8)}{d}=\lim_{d\to0}\frac{1}{\sqrt{8+d}+2\sqrt{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

(3) $\dfrac{f\left(-\frac{1}{2}+d\right)-f\left(-\frac{1}{2}\right)}{d}=\dfrac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}+d\right)^3-2-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3+2}{d}=\dfrac{2}{3}d^2-d+\dfrac{1}{2}$，

$$\therefore f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim_{d\to0}\frac{f\left(-\frac{1}{2}+d\right)-f\left(-\frac{1}{2}\right)}{d}=\lim_{d\to0}\left(\frac{2}{3}d^2-d+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 3 根据导数定义，求下列函数的导数：

(1) $f(x)=3x+\frac{1}{3x}$，求 $f'(x)$；　　(2) $f(x)=\frac{1}{2x-3}$，求 $f'(x)$.

分析 求可导函数 $f(x)$ 在定义域内任一点 x 处的导数，先求 $f(x+d)-f(x)$，再化简 $\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$，最后根据导数定义 $f'(x)=\lim\limits_{d\to 0}\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$ 求出 $f'(x)$. 若求函数 $f(x)$在若干个点处的导数，可先求出导函数 $f'(x)$，然后再求相应的导数值.

解 (1) $\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{\left[3(x+d)+\frac{1}{3(x+d)}\right]-3x-\frac{1}{3x}}{d}$

$$=3+\frac{x-(x+d)}{3x(x+d)d}=3-\frac{1}{3x(x+d)},$$

$\therefore f'(x)=\lim\limits_{d\to 0}\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\lim\limits_{d\to 0}\left[3-\frac{1}{3x(x+d)}\right]=3-\frac{1}{3x^2}$.

(2) $\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{\frac{1}{2(x+d)-3}-\frac{1}{2x-3}}{d}=\frac{2x-3-2(x+d)+3}{d(2x-3)[2(x+d)+3]}$

$$=-\frac{2}{(2x-3)[2(x+d)-3]},$$

$\therefore f'(x)=\lim\limits_{d\to 0}\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\lim\limits_{d\to 0}-\frac{2}{(2x-3)[2(x+d)-3]}=-\frac{2}{(2x-3)^2}$.

自我评估

1. 函数 $f(x)$在 $x=a$ 处有导数，则 $\lim\limits_{h\to a}\frac{f(h)-f(a)}{h-a}$等于（　　）.

A. $f(a)$　　B. $f'(a)$　　C. $f'(h)$　　D. $f(h)$

2. 如果质点 A 按照规律 $s=3t^2$ 运动，那么在 $t=3$ 时的瞬时速度为（　　）.

A. 6　　B. 18　　C. 54　　D. 81

3. 若 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{2k}$的值为（　　）.

A. 2　　B. -2　　C. -1　　D. 1

4. 下列说法中正确的是（　　）.

①高度 h 关于时间 t 的导数就是跳水运动员的瞬时速度；

②气球半径 r 关于体积 V 的导数就是气球的瞬时膨胀率；

③函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率就是函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处的导数.

A. ①②③　　B. ①②　　C. ①③　　D. ③

5. 一质点的运动方程为 $s=5-3t^2$，在一段时间 $[1, 1+d]$ 内相应的平均速度以及点(1，2)的瞬时速度分别为____________.

6. 已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2+2$，若 $f'(-1)=3$，则 $a=$______.

7. 物体在自由落体时的运动方程为 $s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$（其中位移单位：m，时间单位：s），$g=9.8\text{m/s}^2$. 求：

(1) 当 $t=3$ 且 $d=1$，0.1，0.01，0.001 时物体在时间段 $[t, t+d]$ 内的平均速度 $\bar{v}$；

(2) 物体在 $t=3$ 时的瞬时速度 v.

8. 求下列函数的导数：

(1) 求函数 $f(x)=4x-x^2$ 在 $x=-1$ 处的导数；

(2) 求函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$在 $x=4$ 处的导数；

(3) 求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ 在 $x=-2$ 处的导数.

9. 已知 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f'(x)$，并求 $f'(1)$，$f'(2)$，$f'(4)$.

探究应用

10. 设函数 $f(x)$在 $x=a$ 处有导数，用 $f'(a)$表示下列各式：

(1) $\lim\limits_{d\to 0}\frac{f(a+3d)-f(a-d)}{2d}$；　　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}$.

11. 已知一物体做直线运动的速度 $v=v(t)=t^2+2t-3$(m/s)，求它在 $t=2$s 末的加速度.

4.2　导数的运算

学习目标

1. 能根据导数定义，求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数.

2. 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数，能求简单的复合函数（仅限于形如 $f(ax+b)$)的导数.

3. 会使用导数公式表.

要点透析

1. 几个常用函数的导数及其实际意义.

(1) 函数 $y=f(x)=c$ 的导数为 $y'=0$，$y'=0$ 的几何意义为函数 $y=c$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 0. 其物理意义可表示为路程关于时间的函数，则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为 0，即一直处于静止状态.

(2) 函数 $y=f(x)=x$ 的导数为 $y'=1$. $y'=1$ 表示函数 $y=x$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 1，若 $y=x$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=1$ 可以解释为某物体做瞬时速度为 1 的匀速运动.

(3) 函数 $y=x^2$ 的导数为 $y'=2x$. $y'=2x$ 表示函数 $y=x^2$ 图象上点 (x, y) 处的斜率为 $2x$，说明随着 x 的变化，切线的斜率也在变化. 若 $y=x^2$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=2x$ 可以解释为某物体做变速运动，它在时刻 x 的瞬时速度为 $2x$.

(4) 函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$的导数 $y'=-\frac{1}{x^2}$.

2. 利用基本初等函数的导数公式可以比较简捷地求出函数的导数，其关键是牢记和运用好导数公式. 解题时，能认真观察函数的结构特征，积极地进行联想化归，才能抓住问题的本质，把解题思路放开. 通过求导，进而研究函数曲线的切线问题和实际问题.

3. 可导函数的四则运算法则是解决函数四则运算形式的求导法则，也是进一步学习导数的基础，因此，必须透彻理解函数求导法则的结构内涵，注意挖掘知识的内在联系及其规律，通过对知识的重新组合，以达到巩固知识、提升能力的目的.

4. 理解复合函数概念和复合函数求导法则，是求复合函数的导数的基本方法，它把求 $y=f[g(x)]$的导数问题转化为求 $y'_u=f'(u)$和 $u'_x=g'(x)$的乘积.

5. 根据导数运算法则和复合函数求导法则可以求任何一个初等函数的导数，从而解决了初等函数的求导问题，进而可解决与导数有关的问题.

4.2.1 几个幂函数的导数

方法指津

例 1 利用导数定义证明：

(1) $(ax+b)'=a$ $(a\neq 0)$；　　(2) $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$ $(a\neq 0)$.

分析 本例给出带已知字母的一、二次多项式利用导数定义证明的方法，旨在让大家进一步了解如何运用导数定义进行证明，是课本例题的延伸.

证明 (1) 令 $f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$，

则 $f'(x)=\lim\limits_{d\to 0}=\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{[a(x+d)+b]-(ax+b)}{d}=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{a\cdot d}{d}=\lim\limits_{d\to 0}a=a.$

$\therefore f'(x)=a$，即 $(ax+b)'=a$.

(2) 令 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$，

$$\begin{aligned}
\text{则 } f'(x)&=\lim_{d\to 0}\frac{f(x+d)-f(x)}{d}\\
&=\lim_{d\to 0}\frac{[a(x+d)^2+b(x+d)+c]-(ax^2+bx+c)}{d}\\
&=\lim_{d\to 0}\frac{2axd+ad^2+bd}{d}\\
&=\lim_{d\to 0}(2ax+b+ad)=2ax+b,
\end{aligned}$$

$\therefore f'(x)=2ax+b$，即 $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$.

例 2 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在点 $(-1，-1)$ 处的切线方程.

分析 直接套用函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$的导数公式求出过 $(-1，-1)$ 的斜率，进而求出切线方程.

解 $\because f(x)=\dfrac{1}{x}$，$\therefore f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

$\therefore f'(-1)=-1$，

$\therefore$切线方程为 $y+1=-1(x+1)$，即 $x+y+2=0$.

例 3 已知抛物线 $f(x)=x^2$ 上点 P 处的切线与直线 $y=3x+1$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$，试求点 P 的坐标.

分析 本例可先设点求抛物线的斜率，然后运用夹角公式求坐标.

解 设点 P 处的切线斜率为 k，根据题意，有

$\left|\dfrac{k-3}{1+3k}\right|=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$，$\therefore |k-3|=|1+3k|$，解得 $k=-2$ 或 $k=\dfrac{1}{2}$.

由函数 $f(x)=x^2$，得 $f'(x_0)=2x_0$，$\therefore 2x_0=-2$ 或 $2x_0=\dfrac{1}{2}$，解得 $x_0=-1$ 或 $x_0=\dfrac{1}{4}$.

代入 $f(x)=x^2$ 中，得 $y_0=1$ 或 $y_0=\frac{1}{16}$.

∴适合题意的点 P 的坐标为 $(-1,1)$ 或 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$.

自我评估

1. 如果函数 $f(x)=c$（c 为常数），那么 $\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$ 的值为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. c　　D. 不存在

2. 已知 $f(x)=8$，则 $f'(1)$ 等于（　　）.

A. 8　　B. 1　　C. 0　　D. 不确定

3. 函数 $f(x)=-2x^2+1$ 在点 $(0,1)$ 的切线斜率是（　　）.

A. -4　　B. 0　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. 不存在

4. 函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$ 在点 $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ 处的切线的倾斜角为（　　）.

A. 1　　B. 45°　　C. 135°　　D. $-45°$

5. 函数 $f(x)=\frac{9}{x}$ 在点 $M(3,3)$ 处的切线方程为____________.

6. 给出下列命题，其中正确命题是________（填序号）.

①任何常数的导数都是 0；

②直线 $f(x)=x$ 上任意一点处的切线方程是这条直线本身；

③双曲线 $f(x)=\frac{1}{x}$ 上任意一点处的切线斜率都是负值；

④直线 $f(x)=2x$ 和抛物线 $g(x)=x^2$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上函数值增长的速度一样快.

7. 已知某质点的运动方程为 $s(t)=3t^2$，求质点在 $t=10$ 时的瞬时速度.

8. 已知曲线 $y=x^2$ 在点 $P(a,b)$ 处的切线与直线 $4x-y+1=0$ 平行，求点 P 的坐标.

9. 已知点 $P(-1,1)$，点 $Q(2,4)$ 是曲线 $y=x^2$ 上的两点，求与直线 PQ 平行的曲线 $y=x^2$ 的切线方程.

探究应用

10. 曲线 $y=x^3$ 在点（1，1）处的切线与 x 轴，直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积为______.

11. 如图 4-1，设直线 l_1 与曲线 $y=\sqrt{x}$相切于点 P，直线 l_2 过点 P 且垂直于 l_1，若 l_2 交 x 轴于 Q 点，又作 PK 垂直 x 轴于点 K，求 KQ 的长.

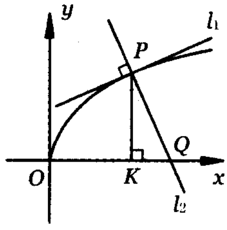

图 4-1

4.2.2　一些初等函数的导数表

方法指津

例 1　求下列函数的导数：

（1）$y=10^x$；　（2）$y=\log_{\frac{1}{2}}x$；　（3）$y=\sqrt[4]{x^3}$；　（4）$y=\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2-1$.

分析　熟记基本初等函数的八个求导公式，是计算导数的关键. 特别要注意各求导公式的结构特征，弄清 $(\ln x)'$与 $(\log_a x)'$和 $(e^x)'$与 $(a^x)'$的差异，防止混淆. 对于不具备基本初等函数特征的函数，应先变形，然后求导.

解　（1）$y'=(10^x)'=10^x\ln10$.

（2）$y'=(\log_{\frac{1}{2}}x)'=\dfrac{1}{x\ln\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{1}{x\ln2}$.

（3）$\because y=\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$，

$\therefore y'=(x^{\frac{3}{4}})'=\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

（4）$\because y=\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2-1=\sin^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}-1=\sin x$，

$\therefore y'=(\sin x)'=\cos x$.

例 2　假设某国家在 20 年期间的年均通货膨胀率为 5%，物价 p（单位：元）与时间 t（单位：年）有如下函数关系：$p(t)=p_0(1+5\%)^t$，其中 p_0 为 $t=0$ 时的物价，假定某种商品的 $p_0=1$（元），那么在第 10 个年头，这种商品的价格上涨的速度大约是多少？(精确到 0.01)

分析　在第 10 个年头，商品的价格上涨的速度，即是函数的导数在 $t=10$ 的函数值，因此由基本初等函数的导数公式表，求出函数相应的导数即可.

解　$\because p_0=1$，$\therefore p(t)=1\times(1+5\%)^t=1.05^t$.

由导数的公式表，有 $p'(t)=(1.05^t)'=1.05^t\cdot\ln1.05$，

$\therefore p'(10)=1.05^{10}\cdot\ln1.05\approx0.08$（元/年）.

因此，在第 10 个年头，这种商品的价格约以 0.08 元/年的速度上涨.

自我评估

1. 函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的导数是（　　）.

A. $3x^2$　　B. $\frac{1}{3}x^2$　　C. $-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$　　D. $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

2. 函数 $y=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处切线的斜率为（　　）.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

3. 已知 $f(x)=\ln x$，且 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0^{\ 2}}$，则 x_0 等于（　　）.

A. 1　　B. 0　　C. 0 或 1　　D. -1

4. 下列结论：①若 $y=\cos x$，则 $y'=-\sin x$；②若 $y=-\frac{1}{\sqrt{x}}$，则 $y'=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$；③若 $y=\frac{1}{x^2}$，则 $y'\big|_{x=3}=-\frac{2}{27}$. 其中正确的个数为（　　）.

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

5. 物体的运动方程为 $s=t^3$，则物体在 $t=1$ 时的速度为______，在 $t=4$ 时的速度为______.

6. 曲线 $y=\cos x$ 在点 $P\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线的斜率为______.

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\log_5 x$；　　(2) $y=4^x$；

(3) $y=-e^x$；　　(4) $y=x^4-e^x$.

8. 求曲线 $y=\sin x$ 在点 $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ 的切线方程.