数学小丛书

5

平均

史济怀

科学出版社
www.sciencep.com

数学小丛书

5

平均

史济怀

科学出版社

数学小丛书 5

平　均

史济怀

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书环绕"平均"这个概念讲述一些有趣的数学问题. 先从算术平均、几何平均、调和平均三者的关系讲到它的有趣的应用:解答诸如食品罐头采用什么样的形状最省料、电灯挂在多高照到桌上最亮等实际问题,以及证明了数学上某些有用的不等式. 然后进一步推广平均的概念,引进了"幂平均",把算术平均、几何平均、调和平均三者统一起来,并且介绍了有关幂平均的一些性质. 最后还讲了"加权平均",这又是在实际生活中经常遇到的一种平均值,而这种平均还可以和力学上的重心问题联系起来. 书中附有不少习题,通过这些习题,读者可进一步体会书中所讲理论的用处.

图书在版编目(CIP)数据

平均/史济怀. —北京:科学出版社,2002
(数学小丛书)
ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ 平… Ⅱ 史… Ⅲ 平均值-普及读物 Ⅳ O12-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010497 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
http //www sciencep com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2002 年 5 月第 一 版 开本:787×960 1/32
2004 年 2 月第二次印刷 印张:3 3/8 插页:1
印数:5 001—8 000 字数:50 000

全套书定价:99.00 元(共 18 册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

马克思说："一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步"。恩格斯说："要辩证而又唯物地了解自然，就必须熟悉数学"。在科教兴国，振兴中华的今天，向全社会普及数学，实在是一件刻不容缓的大事。

数学小丛书是由我国一些著名数学家撰写的一批数学普及读物精品。几十年来，我国几代科技人员中，不少人都曾得益于这套丛书。我衷心地祝贺数学小丛书的重版与补充，并预祝它取得更大的成功。

王元
二〇〇〇年四月

出版说明

1956 年，为了向青少年传播数学知识，科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛，出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》. 在 20 世纪 60 年代初，这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作，被北京市数学会编成小丛书，相继由不同的出版社出版，并多次重印. 由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品，曾激发一代青少年学习数学的兴趣. 书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想，促进了无数中学生在求学的道路上健康成长. 当年这套小丛书的许多读者，现在已经成为学有所成的科学技术工作者，国家建设的栋梁之才. 当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动，现在已经得到蓬勃的发展. 我国自 1986 年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来，历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算π之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经300多年终于在20世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

目　　录

1. 引　　言

"平均每人……"

"平均每亩……"

"这个球队队员的平均年龄……"

"某工厂的平均日产量……"

无论是听广播、看报纸或者和周围的人们交谈，在日常生活中差不多每天都要遇到"平均"这样一个词儿. 每次听到或讲到这两个字的时候，实际上我们都是在无意之中走近了一大堆有趣的数学问题的边缘. 正是由于我们对"平均"这个词儿太熟悉了，觉得没有必要去进一步思索它的全部含义，所以每次接触到这些数学问题时，我们又漫不经心地离开了它们，没有发觉到它们的存在.

其实我们很需要追究一下：为什么人们常要和"平均"这个词儿打交道呢？

让我们来看一些例子.

如果有人把某村的1000亩土地中每亩的

产量都告诉你，你能对这村的生产情况作出什么结论吗？恐怕你除了感到听得很疲倦外，什么结论也得不到．因为他告诉你的资料太琐碎了．相反，如果他很简单地对你说，这 1000 亩土地“平均”亩产多少，那你立刻可对这个村的生产情况作出结论．同样，为了要说明某个工厂的生产情况，我们常常要用到“平均日产量”、“平均月产量”这些名词．

从上面的例子看来，如果要对某些事物从某些数量方面作一个概括性的了解，那么不可避免地要碰到“平均”这个概念，而在很多情况下，这种概括性的了解又是十分必要的．这或许就是我们所以常要和“平均”这词儿打交道的原因了．

那么怎样算出上面所讲的平均值呢？这个问题恐怕小学生也会回答．如果要计算 1000 亩土地的平均产量，只需把每亩的产量一起加起来，再用 1000 去除一下就行了．一般来说，假设已给 n 个数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

为了计算它们的平均值，只需把这 n 个数一起加起来，再用 n 去除一下，得

$$A_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

我们把数 A 叫做这 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的**算术平均**.

可是我们根据什么理由,可以认为这样得出的数 A 就是我们所要求的平均值呢?原来这里边是有一层道理的.当我们定义一组数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

的平均值 x 的时候,按照我们刚才讲的意思,这个平均值 x 要能反映这组数的总的情况,我们总是希望 x 和这 n 个数的偏差

$$x - a_1, x - a_2, \cdots, x - a_n$$

在总体上说来尽可能地小.也就是说,我们要适当地选取 x 值,使得平方和

$$D = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

达到它的最小值.这里我们不直接把这 n 个差数本身相加,而把它们的平方相加,是因为这些差数,有些是正值,有些是负值,直接相加,就会正负相消,不能反映总体的情况.

现在我们来求使 D 取得最小值的 x 值.经过简单的变形之后,上式可以写成

$$D = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2)$$

$$= n\left[x^2 - 2\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}x + \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2\right]$$

$$-n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

$$=n\left(x-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}$$

$$+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).$$

在最后的式子中，末二项是和 x 无关的常数；只有第一项和 x 有关，而且永远不会是负数；因此只有当第一项等于零时，D 的值最小，也就是说，为了使 D 取最小值，必须有

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

才行. 算术平均的意义就在于此.

上面只是介绍了在我们生活中常用的计算平均值的方法. 事实上，求平均的方法远不止一种，在各种不同的具体问题中，根据各种不同的具体条件，为了各种不同的具体目的，我们经常需要采用各种不同的方法去求各种不同数据的平均值. 既然求平均值的方法有许多种，那么对同一组数，采用不同的方法所得平均值之间的关系又怎样呢?

在这本小书中，我们打算环绕“平均”这个概念讲述一些有趣的数学问题.

2 $H \leqslant G \leqslant A$

[illegible]

上面已经提到，求平均的方法不止一种.刚才我们把 n 个数相加，然后用 n 来除得到了这 n 个数的算术平均.自然我们也可把 n 个数相乘，然后把乘积开 n 次方，这样我们又得到了另一种平均，叫做这 n 个数的**几何平均**.说得详细些，就是任给 n 个非负实数 [illegible]

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

我们把 [illegible]

称 [illegible] $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ [illegible] 叫做这 n 个数的几何平均.

“几何平均”这个名词的来源可以从下述简单的几何事实中得到解释.如图 1，我们把两个数 a_1, a_2 看成是两个线段的长度，并以它们为边做一长方形.如果我们想做一正方形，使它的面积等于长方形的面积，那么它的边长就是 a_1 和 a_2 这两个数的几何平均 $\sqrt{a_1 a_2}$. [illegible]

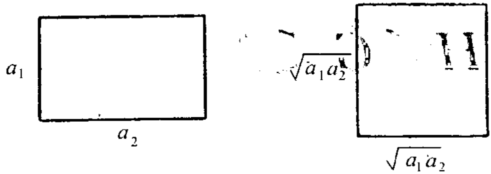

图 1

除了上面的算术平均和几何平均外，我们还可定义另外一种平均. 任给 n 个正的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，我们先求它们倒数的算术平均

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

然后再作这个平均值的倒数：

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

这样得到的数 H 称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的**调和平均**.

很容易看出，上面定义的三种平均都具有下面两个简单性质：

（一）如果 n 个原始数据彼此相等，即

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=a,$$

那么它们的算术平均、几何平均、调和平均也都等于 a，即

才有 $A=G=H=a$.

(二)如果 n 个原始数据都界于 m 和 M 之间,即

$$m \leqslant a_i \leqslant M \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

那么它们的算术平均、几何平均、调和平均也都界于 m 和 M 之间,即

$$m \leqslant A \leqslant M,\ m \leqslant G \leqslant M,\ m \leqslant H \leqslant M.$$

特别,如果用

$$\max(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \min(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

记 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大的和最小的(例如 $a_1=1,a_2=3,a_3=6,a_4=5$,那么 $\max(a_1,a_2,a_3,a_4)=6,\min(a_1,a_2,a_3,a_4)=1$),那么显然有

$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n) \leqslant a_i \leqslant \max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$
$$(i=1,2,\cdots,n),$$

所以有

$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n) \leqslant A \leqslant \max(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$
$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n) \leqslant G \leqslant \max(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$
$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n) \leqslant H \leqslant \max(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

即一组数的算术平均、几何平均和调和平均总是夹在这组数的最大值和最小值之间.

这两个性质的证明留给读者做练习.

定义了上述三种平均值以后，首先使我们感到关心的是这三种平均值之间的关系。它们之间哪个大些，哪个小些？或者它们之间根本就不存在一定的规律：对某些数来说，A 比 G 大，而对另外一些数来说 G 又比 A 大？

为了获得启发，我们从最简单的情况研究起. 先考虑只有两个数 a_1, a_2 的情形. 我们知道，对任意两个实数 x 和 y，永远有不等式：

$$(x-y)^2 \geqslant 0,$$

展开后即得

$$xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}. \tag{1}$$

命

$$x=\sqrt{a_1},\ y=\sqrt{a_2},$$

得

$$\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2}. \tag{2}$$

再在(1)中命 $x=\frac{1}{\sqrt{a_1}}, y=\frac{1}{\sqrt{a_2}}$，那么就有

$$\frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}{2},$$

取倒数即得

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} \leqslant \sqrt{a_1 a_2}. \tag{3}$$

把不等式(2)、(3)联合起来便得

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} \leqslant \sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2}. \tag{4}$$

不等式(4)告诉我们，对两个数来说，算术平均最大，几何平均次之，调和平均最小. 原来它们之间是有一定的规律的.

这个结论使人们有理由猜测：对任意 n 个正数来说，这样的规律——算术平均最大，几何平均次之，调和平均最小——也是存在的.

定理 1 对任意 n 个正数来说，永远有

$$H \leqslant G \leqslant A.$$

证明 以 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$G(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$H(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 分别表示 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算术平均、几何平均和调和平均. 先证

$$G(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant A(a_1, a_2, \cdots, a_n). \tag{5}$$

我们把证明分成两部分：先对 $n = 2^m$ 这种形状的数来证明不等式(5)，然后再在这个基础