

机车动力学

唐美生 编著

中国铁道出版社

U260.1
001

机车动力学

詹斐生 编著

专

中国铁道出版社

1990年·北京

内 容 简 介

书中较详细地介绍了轮轨滚动接触和牵引力传递,指出粘着仅代表滚动条件,而牵引力是由接触面间轮轨两者的速度差传递的。为此,本书从造成轮轨表面速度差的几何约束入手,导出了坐标和速度之间的因果关系,从而讨论了接触椭圆参数和局部滑动速度(运动约束)所确定的力和力矩约束,得到了作为系统自激力源的弹性滑动(亦称蠕滑)力和力矩,进而导出了作用在车轮上的有效牵引力,并建立了轮对的动力学运动方程。

随后,着眼于系统的非线性、非保守性以及接触面间的干摩擦,本书对极限环运动、轮缘接触、磨耗机理、运动稳定性以及导向机构学作了讨论。

本书可供研究、设计、运用人员学习参考,也可供大学教师,研究生学习之用。

机 车 动 力 学

詹斐生 编著

★

中国铁道出版社出版、发行

(北京市东单三条14号)

责任编辑 杨宾华 封面设计 翟达

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 26 字数: 659 千

1990年9月 第1版 第1次印刷

印数: 1—1000册

ISBN7-113-00539-X/U·176 定价: 15.00元

目 录

第一章 绪 论	1
第一节 轮轨接触式运输的实质和特征	1
第二节 轮轨系的研究对象和内容	3
第三节 动力学在铁路机车车辆中的应用	5
第二章 滚动接触	7
第一节 引 言	7
第二节 弹性接触的理想化	8
第三节 弹性半空间	9
第四节 负荷——位移方程特例	25
第五节 卡尔克渐近理论	38
第六节 轮轨滚动接触	60
第七节 在重载和磨损条件下的轮轨滚动接触	66
第三章 轮轨接触几何学	81
第一节 引 言	81
第二节 纯锥形踏面车轮的几何学	82
第三节 单一圆弧车轮的几何学	91
第四节 磨损形踏面的几何学及其模拟	103
第五节 重力刚度效应	108
第六节 等效斜度和接触角参数	111
第七节 轮轨配置对几何学非线性的影响	112
第四章 弹性滑动广义力	114
第一节 引 言	114
第二节 线性弹性滑动和回旋率	117
第三节 线性弹性滑动和回旋系数	122
第四节 线性弹性滑动力、力矩及其牵引力传递	127
第五节 非线性弹性滑动力及其传递	134
第六节 非线性广义力的具体计算	142
第五章 轮对运动学方程	149
第一节 引 言	149
第二节 坐标系、约束和自由度	151
第三节 刚体运动学的若干基本定理	155

第四节 轮对的运动学方程	162
第六章 轮对动力学运动方程和横向自激振动	164
第一节 建立运动方程的方法和基本原理	164
第二节 轮对运动方程——牛顿法	177
第三节 轮对运动方程——拉格朗日法	189
第四节 线路不平顺和输入力函数	197
第五节 轮对的非线性模拟——等效线性化	208
第六节 横向自激振动的求解	218
第七节 自由轮对的临界速度	222
第七章 极限环、轮缘接触和运动稳定性	227
第一节 运动的相平面讨论	227
第二节 极限环及其平衡状态的稳定性	233
第三节 轮对横向运动和极限环	245
第四节 轮缘和钢轨接触及其相斥效应	257
第五节 用解析法求轮对直线运动的极限环	277
第六节 等效线性化对极限环性能的应用	282
第八章 粘着、滑动、轴重和磨耗	286
第一节 摩擦阻力和摩擦牵引力	286
第二节 直线上轮轨的摩擦、弹性滑动和磨耗的参数分析	291
第三节 冲角和轮轨磨耗	300
第四节 接触振动和张弛振动	313
第九章 导向理论	341
第一节 问题的基本性质	341
第二节 不稳定倾向和自导向能力	342
第三节 轴间对称连接的导向理论	347
第四节 对称剪切连接的应用	369
第五节 半刚性连接轮对系的颤振和发散不稳定性	374
第六节 非对称连接的导向和稳定性	380
第七节 内部连接的独立刚度元素的最大数量及其特性	395
第八节 稳定性和曲线通过机构学的发展	401
参考文献	411

第一章 绪 论

第一节 轮轨接触式运输的实质和特征

1804年特里维西克 (Trevithick) 用实验的方法领悟到, 两个相对光滑的表面之间产生的摩擦力, 可以为牵引和制动车轮提供足够的力源。既然摩擦力可以使车轮移止自如, 那么在选择制造车轮和路面的材质方面, 无疑大有文章可作。乔治·斯蒂芬森在木轮木轨的实践基础上, 大胆选择了铁轮和铁轨的方案, 从而促成了1825年在英国建成了世界上的第一条铁路。

有轮车辆发展到钢轮钢轨, 无论在运载重量、运行速度, 还是在能量消耗和运输成本方面, 都大大优越于其他有轮地面运载工具, 其优点是: 摩擦系数高、滚动阻力小、极限强度大和弹性模量适度。因为就动力驱动装置而言, 铁路和其他地面运载工具并无质的区别。高的摩擦力使铁路运输方式经久不衰。

从有轮车辆演变到铁路机车车辆, 实质上是由克服摩擦力做功到利用摩擦力造福人类的认识飞跃。我们不妨从马拉车 (克服摩擦力做功) 开始, 引伸出机车牵引列车 (利用摩擦力产生牵引运动) 的简单原理。

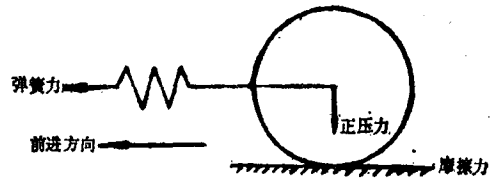


图 1—1 车轮被拉 (或推) 动

图 1—1 为一个车轮被拉 (或推) 动的示意图。我们把马的拉力或推力比拟成一个弹簧力, 正压力就是轮子的负重。根据库仑定律

$$\text{摩擦力} = \text{摩擦系数} \times \text{正压力}$$

由库仑定律又知, 摩擦力的方向永远和位移方向相反。当弹簧受拉力时, 位移指向图示的前进方向, 则摩擦力指向后方。根据静力平衡条件, 若弹簧的拉力大于库仑摩擦力, 车轮将从静止状态跃变为向前运动, 此时, 外力克服摩擦做功。由于滚动摩擦系数大大小于滑动摩擦系数, 故拉动一个车轮要比拖动一块平板容易。同理, 当弹簧受压缩时, 要使车轮从静止状态被向后推动, 弹簧压缩力也要大于库仑摩擦力。

与上述过程有本质区别的是机车车轮的运动。由于本身具有原动力, 如图 1—2 所示, 主动轮在旋转力 T 的作用下, 车轮要产生逆时针方向的回转运动。由于接触点的摩擦力, 在 A 点要产生一个顺时针回转的反力矩, 因此摩擦力 F 指向运动方向。由力矩平衡知:

$$M_a = Fr$$

即在接触点上, 摩擦力除平衡原动力矩之外, 在车轮质心处还可以获得一个使车轮产生直线平移的力 F' , 并使车轮由静止变为运动。此时若以弹簧力模拟列车 (图 1—2a), 也即模拟阻力, 则显然仅有当 F' 力大于阻力 f 时, 列车才能被拉动。通常, 列车越重, 机车需要的功率就越大。然而, 驱动功率的发挥是以轮轨接触点可以利用的摩擦力为条件的, 即要以在接触点上车轮不发生严重滑行为条件。如果 $M_a > Fr$, 那么轮轨接触就不能产生足够大的摩擦力矩, 车轮在钢轨上的滚动条件就被破坏。

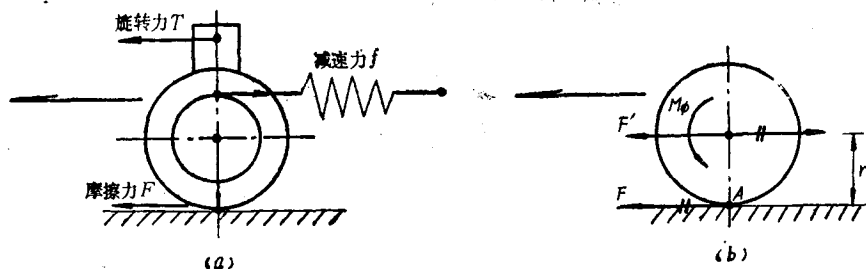


图 1—2 主动轮运动
(a) 受力图; (b) 传力图。

因此, 不难发现, 摩擦力既是牵引运动的成因, 又是牵引运动的限制。

怎样才能获得摩擦力的最大效益呢? 又怎样对原动力的特征参数进行合理选择呢?

库仑定律为解答第一个问题提供了途径, 这就是: 要最大限度地利用正压力(轴重)并最大限度地获得高摩擦系数。前者受轨道承载能力的限制, 后者受轮轨接触副材质特性和表面状态的限制。钢轨线路具有比其他地面运输线路高得多的承载能力, 钢轮和钢轨的接触具有比其他接触副高得多的摩擦系数。然而, 轴重和承载能力之间的关系, 涉及到复杂的动力学环境和动力学效应, 其中最重要的是接触传力效应和破坏性效应。超过一定的临界条件和参数匹配关系, 轴重愈大, 破坏性也愈大, 牵引力的传递质量也愈差。

而第二个问题实际上是指动力驱动装置, 它除了满足通常所说的牛马特性要求之外, 最重要的是功率的大小不应超过由摩擦饱和所规定的限度。因此, 增加动轴数比提高轴重为好, 而当滑行不可避免时, 动力装置为恢复粘着而自行调节功率的特性, 应以不产生过度的车轮摩擦振荡为前提。

那么, 反映上述两个轮轨关系的实际特征是什么呢? 这里仅从摩擦力的利用和限制的角度, 提出下列最具特征的力学条件:

(1) 轨道和车轮的表面是暴露的, 因此实际可以利用的摩擦系数仅是理想状态的 $1/3$ 左右, 改善轮轨表面的污染, 对提高牵引能力很重要。

(2) 实际的轮轨表面是凹凸不平的, 在新轮新轨的条件下, 接触面小于理想的平滑表面, 传递的切向力也小, 改善平滑度有利于牵引。

(3) 钢轨是铺设在弹性基础上的, 轮对在钢轨上的运动实际上是振动过程。通常, 轮对经由悬挂装置和转向架或车体相连接, 组成一个振动系统。这个系统和轨道结构的相互作用, 使轮对的运动参数具有明显的波动性质, 故正压力的波动要导致摩擦力的波动。改善正压力或轴重的波动有利于利用轮轨间的摩擦力。

(4) 线路构造存在着坡道、曲线以及其他线路特征, 使轮对获得各种形态的输入力函数, 从而产生瞬态的、周期性的或连续的响应, 导致轴重的转移和再分配, 影响摩擦力的有效利用。特别是, 轮轨间发挥的切向力要供曲线导向之用, 曲线半径愈小, 消耗于导向的切向力分量就愈大, 而用于牵引的分量就愈小。同理, 由车轮锥度引起的轮对横向波状运动和伴随而来的接触几何学效应, 也要导致左右车轮轮重的转移和再分配。

(5) 与上述特性相关联, 线路和机车车辆车轮都不可避免地偏离各自的标称值而出现各种不平顺。机车车辆系统要对这些不平顺输入产生响应, 导致轴重或轮重的再分配和冲击。

总之,上述特征包含了丰富的力学内容,由于铁路本身所具有的特定环境和形态,随着近代力学的发展,轮轨动力学已成为当代引人注目的一门边缘学科。

第二节 轮轨系的研究对象和内容

轮轨动力学是以轮轨系作为研究对象的。实际上,轮轨系所描述的是两个独立物理系统的相互作用系,即线路系统和机车车辆系统。轮和轨作为相互作用系的直接接触媒介,它们在接触面上发生的物理过程及其性状,无论在质上还是量上都支配着各独立系统的运动。由车轮在钢轨上滚动所形成的接触面,实际是具有力传递功能的弹性半空间。两个弹性半空间的变形差和相对滑动,将导致表面切向力的相互传递,并将作为自激力源存在于各自的系统之中,使系统由保守变为非保守。这就是区别于经典机械系统的原因所在,也是机车车辆系统存在内部不稳定倾向的根由。经典机械系统的共振理论无法解释这种不稳定倾向,就是没有考虑滚动接触过程的这种特殊条件和形态之故。因此,对轮轨系研究的第一个对象,就是接触面的形成和传力过程。

接触面弹性半空间的力传递,在纵向表现为牵引运动,在横向表现为导向运动,在垂向表现为轮重的转移。应该指出,在接触面的法向,由于不存在轮轨之间的相对速度差,因此不出现法向力的传递过程,垂向轮重的变化纯粹是由轮轨的几何学和运动学引起的。

这样,研究接触面的物理过程,将首先涉及系统对于自激倾向的稳定性。其次,将决定牵引力的发挥。第三,将提供自导向能力。

就刚体动力学而言,单一机车车辆和线路的相互作用,可以用系统的“输入——传递函数——响应输出”的模式来描述。两个独立的系统都可以从对方获得输入,并经由自身系统的传递函数,对输入产生响应。

就单一机车车辆系统的刚体响应而言,来自线路系统的各种不平顺就是输入激励。这种激励可以是周期性的、离散的或连续的;可以是确定性函数,也可以是随机函数。就随机不平顺而言,激励函数具有很宽的频率结构,我们称之为输入谱。

系统的传递函数是它的固有特性的描述,它取决于系统的质量、弹性和阻尼以及它们的构成和组合。不同的传递函数对输入谱有不同的选择性和灵敏度。

根据线性系统的频率保存性原理,系统对于随机输入的响应,不能改变外界输入的频率结构。因此响应特性也是宽谱结构,我们称之为响应谱。

从工程应用的观点看,有决定意义的是系统所产生的响应。传递函数是基础,响应是基础对条件所产生的反应,直接关系到系统的实用性、可行性和可靠性。掌握响应特性的形态和变化,就可以评价系统的动态特性,预测由响应所导致的破坏性后果。

事实上,上述三者的关系是相互制约和相互影响的。合意的系统传递函数是抑制输入产生不良响应的有效途径,而掌握输入谱又是选择合意的传递函数的有力工具。就此而论,输入谱是手段,取得完整的轨道不平顺谱的实测数据,对最终控制响应谱是至关重要的。

这样,轮轨系的第二个研究对象就是“输入——系统传递函数——输出”关系,在此基础上,考察并定量评定各种响应形态所导致的动态效应,以及这些动态效应可能招致的破坏性后果。一般说来,响应所导致的动态效应和后果有:

- (1) 牵引性能——粘着破坏,粘着降低。
- (2) 支承条件——车轮浮起,旁承偏载,心盘分离。

(3) 导向性能——直线失稳，曲线脱轨，钢轨倾翻，道钉拔起，轨排横移，轨距扩大以及轮轨磨耗。

(4) 振动隔离——走行品质不良，部件破损和疲劳，连接松弛，乃至于轨枕失效、道碴粉化。

当把独立系统的组成扩大到整条线路和整列列车时，轮轨系的相互作用包含了垂直纵平面和水平纵平面之间的复杂耦合形态。若把单一机车车辆的轮轨系比拟成竖向相互作用，那么列车的轮轨系将把竖向关系扩展到横向。虽然物理过程的描述仍可用“输入——传递函数——输出”来表示，但内容和形态要更加复杂多变。如仍只用速度参量来表征运用条件，那就极不充分了。列车编组、司机操纵、制动水平这些更反映人为和主观特点的条件，都要对物理过程的三个环节施加显著的影响，特别是动力制动，还带有具体时刻的环境条件特点。因此，由列车——线路表征的轮轨系，除了纯力学过程之外，还包含了力学和行为管理学的相互作用。

就动力学的工程应用性质而言，轮轨系的第三个研究对象乃是列车系统的输入谱、传递函数和响应谱。

若把单一机车车辆作为子系统，则作为集总系统的列车，其系统的固有特性将是组成子系统固有特性的组合，这种组合取决于子系统之间的连接条件，如车钩缓冲装置的特性参数等。因此连接装置的非线性将对集总系统的传递函数起重要作用。

线路对列车集总系统的输入是许多个轮轨接触点的复杂组合，因此在系统的总长度内，将同时输入线路纵、横断面的所有构造特点，并在时间和空间上高度相关。这时，竖曲线和水平曲线，反向曲线和夹直线，直线、缓和曲线和圆曲线，对整个列车系统的输入来说，既是不对称的，又是高度非线性的。

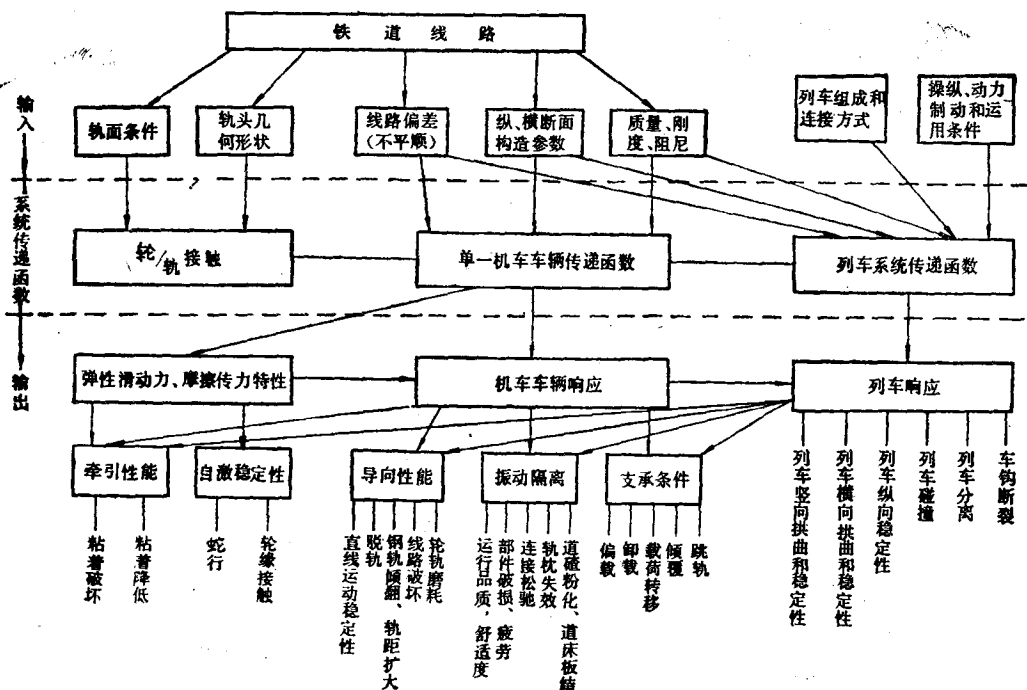


图 1-3 以机车车辆为主系统时，轮轨系的相互作用示意图

综上所述, 我们用图 1—3 表示轮轨系的研究对象和内容, 以及它们之间的相互联系。这时, 我们习惯上总是把机车车辆作为主系统。

第三节 动力学在铁路机车车辆中的应用

轮轨系以接触面为界面可分为两个独立的系统, 即界面以上的机车车辆系统和界面以下的线路结构系统。每一系统只要考虑界面特性, 并把另一系统作为对自己的激励源, 就可以作为独立的研究对象, 而不必计及另一系统中所可能进行的所有动力学过程。对机车车辆而言, 输入谱是把线路激励描述成一定的形态而引入的。

就铁路的运输效率和生产能力而论, 机车车辆的特性是决定性的要素。近四十年来在提高轴重和提高速度方面, 已对机车车辆提出了愈来愈高的要求, 迫切需要提高轮对、制动以及悬挂装置的功能特性。近25年来, 在轮轨动力学分析研究方面的成就, 以及理论预测和实验结果的良好相关性表明, 用分析模型指导设计、样机研制、性能评价、维修条件, 直至最后产品的生产都是有可能的。分析模型已成为工程应用的有力工具。然而, 分析模型来源于目标设计、更需要经受实践的检验, 而预测结果的精度也在很大程度上取决于模型的精度。为此, 分析研究需要和设计、试验、结果评定以及修改设计等环节进行有效的配合。尤其是, 由于性能指标之间往往要求相互矛盾的必要条件, 分析模型能否达到规定的期望目标, 要取决于对那些相互矛盾的必要条件作最优化折衷处理。从上述意义上讲, 应用动力学的核心是分析模型的模拟、求解以及预测结果的分析, 而不是琐碎的个别应用实例。动力学在铁路机车车辆中应用的完整过程如图 1—4 所示。

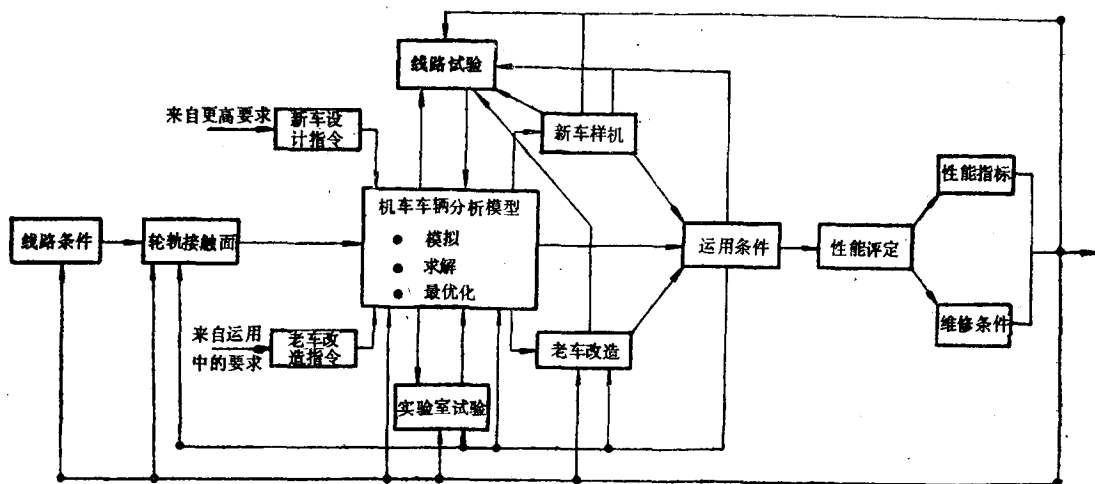


图 1—4 动力学应用的全过程示意图

本书是根据笔者为研究生讲授《机车车辆应用动力学》的讲义缩编而成的, 内容局限于轮对和轮轨相互作用, 而不涉及任何整车动力学模拟。

本书将首先以滚动接触为主线引出几何学约束和几何学效应, 运动学约束和动力学效应, 以及线路输入力函数和轮对响应。在第二章中, 从弹性力学的角度对目前普遍应用的卡尔克 (Kalker) 理论作一些基础描述, 并指出重载和磨损条件下的轮轨系, 其接触面间要

产生严重的塑性流动。显然,就建立在滚动接触基础上的摩擦力传递过程而言,轴重不能直接转化为有效牵引力,而驱动功率的发挥也要以轮轨间的极限摩擦为条件。因此,高轴重和大功率并不代表高效益的运输能力,而且粘着和摩擦并不等价。与直观想象相反,粘着仅代表滚动条件,牵引力的传递是由接触面间轮轨两者的速度差所导致的结果。

这样,第三章就转入论述造成轮轨表面速度差的几何约束,并指出在切向力的作用下,接触面间并不存在纯滚动,而由于磨耗的不可避免,即使是直线锥形踏面,其接触几何参数也不是轮对位移的线性函数。为此,本章确定了轮对自由度和变量之间的依存关系,并引出由几何量改变所导致的重力刚度和重力角刚度效应。

第四章在前两章的基础上导出了坐标与速度之间的因果关系,讨论了接触椭圆参数与局部滑动速度(运动约束)所确定的力和力矩约束,并分别对小位移线性条件和大位移非线性条件推导了作为自激力源的弹性滑动力和弹性滑动矩。最后,利用功能原理,推导出由钢轨作用在车轮上的有效牵引力。必须指出,本书将不使用“蠕滑”这一术语,以便有别于金属材质由温度升高而产生的蠕滑现象,而为了描述由塑性流动产生的非弹性滑动现象,将在“弹性滑动”的术语之前冠以非线性定语。

第五章在刚体速度的基础上,对轮对运动应用了欧拉和蔡斯尔定理,以建立运动学方程。

第六章将讨论轮对的动力学运动方程,并把它归结为数学模型。

轮轨系处在非线性因素的支配之下,而非线性模拟只有在时间域的条件下才有可能。然而,这是非常复杂和费事的。因此,只要工程应用的精度可以容许,就可用渐进的局部等效线性化方法大大简化问题的求解。这时,描述函数法,KB法,准线性化法以及统计线性化法都是可以应用的等效线性化方法。特别是新近发展起来的统计线性化法,借助于实测样本记录的统计处理,就可以用频率域来模拟非线性过程。必须指出,共振理论在处理非保守系统的运动性质时是不适用的。

第七章讨论了极限环运动及其稳定性。当轮轨之间的摩擦趋于饱和时,系统的运动可视为是由两个“半次”振动所建立的振荡过程。本章利用二阶动力学原理,还讨论了摩擦阻尼耗散系统的极限环运动及其近似解法。

第八章实际上是以第二章为手段考察磨耗问题,指出高轴重和大功率必将伴随有高的磨耗率发生。为了具体起见,本章引用了库玛(Kumar)教授的实验室模拟方法及其结果,并对磨耗磨损机理作了探讨。

为了探讨轨道波状磨耗的成因以及由瞬间局部粘着损失所导致的动态效应,第八章还专门讨论了接触振动和张弛振动。高频接触振动将产生巨大的垂直力增量,使轨头塑变层遭受反复和快速的锤击作用,逐渐在轨头形成明暗相间的波浪形磨耗。当有切向力作用的动轮经过其上时,瞬间的局部接触间断可使动轮积聚起很大的能量,一旦在波浪形的峰部恢复接触时,积聚的能量就骤然被释放出来。张弛振动本质上是能量的积聚和释放交替进行的过程,除了上述原因之外,当因轨面粘着下降而需要降低驱动功率来恢复粘着时,也会伴随有能量的积聚和释放过程。因此,钢轨波状磨耗是这两种振动联合作用的结果。

第九章讨论了轮对系的机构学。轮对的运动学特性可以用转向架的总剪切刚度 K_s 和总弯曲刚度 K_b 来表征。理想的灵活导向要求零 K_b ,然而, $K_b=0$ 意味着稳定性临界速度为零。因此,要在稳定的条件下实现灵活导向, K_b 应非零,机构学设计的目的在于对 K_s 和 K_b 作出折衷。

第二章 滚动接触

第一节 引言

车轮在钢轨上的滚动将产生切向力的传递, 这种切向力本质上是摩擦力。在被动车轮的情况下, 摩擦力表现为阻力, 而在主动车轮的情况下, 摩擦力表现为牵引力。人类从必须克服滑动阻力做功进化到使用被动车轮, 最后发展为主动车轮利用摩擦力产生牵引运动, 反映了人类利用摩擦的进化过程。霍林 (Halling) 在《车轮的滚动作用》一文中提出了两张很有趣的图表, 即用历史上地面运输方式的发展考察摩擦对人类进化过程的影响。

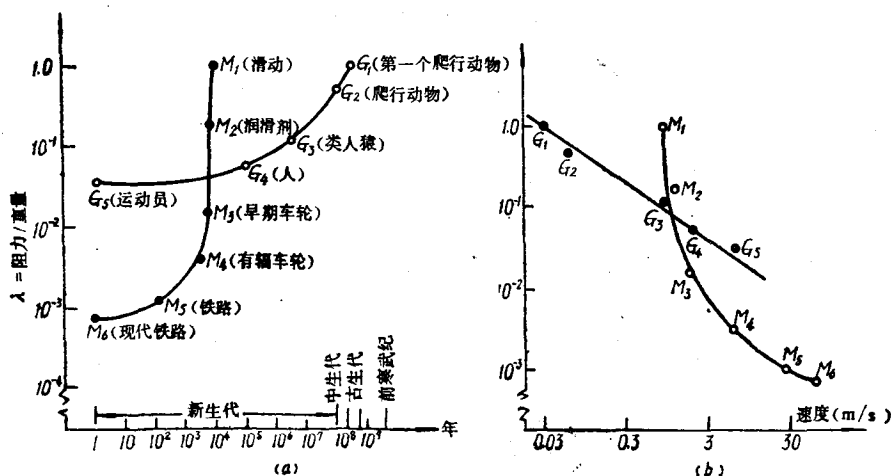


图 2—1 摩擦对人类进化的影响
(a) 历史上地面运输的进步; (b) 进化的结果和实现的速度。

图 2—1 中 λ 表示运动阻力, 可以视为当量摩擦系数, 它是运动难易程度的表征。若把所需要克服的阻力的减少比拟为从爬行到运动员的运动, 那么现代铁路无疑代表了人类智能的进化结果。如果用所能实现的运动速度来描述, b) 图给出了很有趣的结论, 即人的智能进化接近于直线, 几乎具有 -45° 的斜率, 该直线表明

$$\log \lambda = -1 \times \log V + \log C$$

式中, V 为速度, C 为某个常数, 故 $\lambda V = C$ 。定义 $\lambda = F/W$, 故 $C = \frac{FV}{W}$, 其中 F 为阻力, W 为重量 (力), 意味着进化程度取决于恒定的功率和重量之比。

最早对于滑动表面作用的认识始于 1699 年艾蒙顿 (Amonton) 的第一和第二摩擦定律, 即摩擦力和载荷成正比, 而和名义接触面积无关。1780 年, 库仑提出了摩擦力和速度无关的第三定律。然而, 对于滚动接触的表面作用而言, 这些建立在滑动摩擦基础上的定律是不适

用的, 因此需要对滚动接触传力过程更科学的认识。

就目前而论, 卡尔克理论为我们提供了较完整的认识。然而, 就卡尔克理论以赫兹椭圆接触面及库仑滑动摩擦极限为条件而论, 仍然是不完善的。考虑到卡尔克理论对于更完整的传力机制是普遍公认的起点, 本章将以卡尔克理论为基础, 讨论滚动接触的传力理论, 进而引伸出对未来研究的展望。

第二节 弹性接触的理想化^[1]

图2-2为卡尔克分析的物理模型, 它描述了两个完全的弹性体由 N 力压在一起而彼此相互滚动的情形。这时, 沿两物体的接触部分形成一个接触面。可以用弹性力学中的半空间来近似表示上体和下体, 并用上标“+”表示有正曲率的半空间。取 z 轴向下, 故下体为 $z \geq 0$ 的半空间, 上体为 $z \leq 0$ 的半空间。

根据赫兹理论, 当两个物体有相反的形状时, 接触面是一个椭圆。由于摩擦的结果, 两物体可以在接触面上相互施加切向力。倘向一个物体施加一力矩, 则在不出严重滑动的条件下, 两个物体的圆周速度就不再相等。两物体的圆周速度差除以滚动速度, 称为弹性滑动率*。

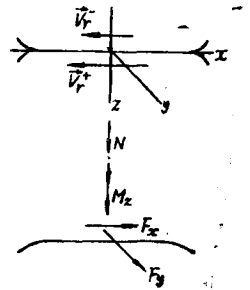
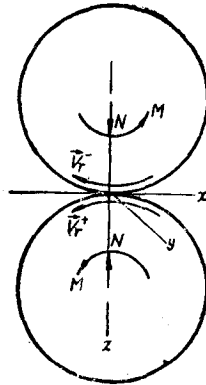


图 2-2 两个相互滚动的弹性体

倘若物体绕接触面法线的转动也不相同, 那就要论及回旋了。本物理模型要讨论的问题, 是要寻求纵向、横向弹性滑动率和回旋率之间的联系, 以及两个总切向力分量和绕接触面法线的力矩之间的关系。

假定以常摩擦系数的干摩擦库仑定律联系接触面上的切向牵引力, 又假定两物体自身的相对速度已达到稳定。

取直角坐标系 ($oxyz$)。正压力用 Z 标示, 并把切向牵引力 (X, Y) 定义为由上体作用在下体上的单位面积局部切向 (摩擦) 力。接触面积 E 和正压力分布 Z 由下列赫兹理论的边界条件确定

$$\left. \begin{aligned} w(x, y) &\equiv w^+(x, y, 0) - w^-(x, y, 0) = -Ax^2 - By^2 + \alpha; \quad Z \geq 0, \text{ 在 } E \text{ 内} \\ w(x, y) &\equiv w^+(x, y, 0) - w^-(x, y, 0) > -Ax^2 - By^2 + \alpha; \quad z = 0, Z = 0, \text{ 在 } E \text{ 外} \end{aligned} \right\}$$

(2-1)

式中, $w^\pm$ 为 z 轴方向的位移分量, 而 $w(x, y)$ 称为在 z 方向的位移差, 简写为 w 。 A 和 B 是由两物体的曲率半径确定的, α 为两物体的贯入度。

卡尔克的第一个理想化假定是: 在两物体之间作用的切向牵引力 (X, Y) 不会干扰位移差 $w(x, y)$ 。笛佩特 (de pater) 指出, 当两物体有相同的弹性常数时, 理想化是完全正确的。这个理想化意味着接触面积 E 和正压力分布 Z 均不受切向牵引力的干扰, 并可由赫兹的无摩擦接触理论给定。可以选择原点 and x, y 轴线, 使得

*弹性滑动系由英文 “Creep” 转译而来, 在国内文献中一般译为 “蠕滑”。

$$E = \left\{ x, y, z: z = 0, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\} \quad (2-2a)$$

并由下式给出正压力

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{3N}{2\pi ab} \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}, \text{ 在 } E \text{ 内} \\ Z &= 0, \quad z = 0, \text{ 在 } E \text{ 外} \end{aligned} \right\} \quad (2-2b)$$

式中, N 为总法向力, a, b 为椭圆半轴。

在某点上的局部滑动速度定义为上体相对于下体的局部速度, 故相对滑动 (s_x, s_y) 等于局部速度除以滚动速度。当 x 方向有稳态滚动时, 相对滑动将由下式给出:

$$s_x = v_x - \phi y + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad s_y = v_y + \phi x + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2-3a)$$

式中, (v_x, v_y) 为纵向和横向弹性滑动率; ϕ 为回旋率, 简称回旋; 而 u 和 v 为下体相对于上体的 x 和 y 方向的位移分量, 且有

$$u = \{u^+(x, y, 0) - u^-(x, y, 0)\}, \quad v = \{v^+(x, y, 0) - v^-(x, y, 0)\} \quad (2-3b)$$

于是卡尔克的第二个理想化假设是: 正压力分布 Z 不会干扰切向位移差 (u, v)。笛佩特证实, 当两物体有相同的弹性常数时, 假设完全正确。

w 对 (X, Y) 独立的假设, 把模型的讨论分解成两部分。一是正压力和接触面积完全确定的法向问题; 二是一法向条件已知的切向问题。把 (u, v) 对 Z 独立作为假设的理由在于: 等弹性常数的情形在工程上是最重要的情形, 也可同时使理论变得更为简单得多, 这时, 可以不把摩擦系数作为独立参量来考虑。

按照卡尔克的理想化, 切向问题将由下列条件确定:

(X, Y) 和 (u, v) 用半空间的弹性方程联系起来,

在 E 外, 无穷远处应力和位移变为零, 且 $z = 0$ 时, $X = Y = 0$

(2-4)

$$\left. \begin{aligned} (X, Y) &= \mu Z(w_x, w_y), \quad w_x = \frac{s_x}{s}, \quad w_y = \frac{s_y}{s}, \quad s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}, \text{ 在滑动面积 } E_s \text{ 内} \\ s_x &= s_y = 0, \quad |X, Y| \leq \mu Z \quad \text{在粘着面积 } E_a \text{ 内} \end{aligned} \right\}$$

(2-5)

从式 (2-4) 和式 (2-5) 知, 切向问题自然地分解为两部分, 第一部分必须研究牵引力分布 (X, Y) 对位移差的影响, 以便求得牵引力和滑动之间的联系 (可以用某种构成完整系统的标准牵引力分布来给出这种联系), 第二部分, 可加上标准牵引力, 以使近似地适合于边界条件式 (2-5)。必须指出, 把接触面积划分为滑动和粘着两部分事先是不知道的, 必须通过计算得到。

第三节 弹性半空间

这一节要求寻找牵引力和与其相对应的位移差的完备集合。除了处理切向问题给出 (X, Y) 而 Z 是不重要的之外, 还要处理 (X, Y) 是不重要的而 Z 是任意规定的法向问题。由于泊桑比 σ 变为零时, 法向问题等效于切向问题, 这样作既扩大了问题的视野, 困难也不大。

这里, 将从接触时产生的应力和位移差入手, 假定接触是沿椭圆接触面 E 发生的。坐标原点取在椭圆的中央, z 轴取指向下半空间的内法线, x 和 y 轴为椭圆的轴线。用 (X, Y, Z) 表示表面牵引力, 用 (u^+, v^+, w^+) 表示下半空间的弹性位移, 而用 (u^-, v^-, w^-) 表示上半空间的弹性位移。

首先解法向问题, 它等效于一个无摩擦的接触问题。用 Z 和位移差 $w(x, y) = w^+(x, y, 0) - w^-(x, y, 0)$ 描述其边界条件, 而最重要的条件是在 E 内取 $w(x, y)$ 为一定值。

法向问题

在 $z = 0$ 的整个边界上, $(X, Y) \equiv 0$, 而 Z 在椭圆面积 E 之外变为零。在 E 上的表面位移差用 x 和 y 的 M 次多项式给出, 如:

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{M-m} c_{mn} x^m y^n \quad (2-6)$$

求作用在接触面积 E 上的法向力 Z 。

这样做似乎是人为的。根据多项式逼近理论, 存在着一种多项式形式的完备集合。虽然幂级数不一定是这种完备集合的唯一形式, 这里取幂级数是为了便于化为代数方程。此外, 完备集合通常要取无穷级数, 但可根据精度要求来确定 M 的大小, 以便使有限级数和无穷级数相差无几。这样, 多项式位移可以通过求解线性方程组的有限集合得到法向牵引力 Z 。

从弹性力学的观点看, 切向问题等效于边界上没有法向力的问题。在粘着面积内最重要的边界条件是: $[u(x, y), v(x, y)] = [u^+(x, y, 0) - u^-(x, y, 0), v^+(x, y, 0) - v^-(x, y, 0)]$ 。因此, 按下列方程式求解是合适的。

切向问题

在 $z = 0$ 的整个边界上法向力 Z 恒为零, 而在椭圆接触面 E 外 (X, Y) 变为零。在 E 内的位移差 $[u(x, y), v(x, y)]$ 用 x 和 y 的 M 次多项式给出:

$$[u(x, y), v(x, y)] = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{M-m} [a_{mn}, b_{mn}] x^m y^n \quad (2-7)$$

须要求作用在接触面积 E 内的切向牵引力 (X, Y) 。

一、作为积分方程组的问题表述

可用积分表达式给出表面牵引力和半空间位移差之间的联系。当在 origin 沿 z 轴有集中力 Z 作用时, 下体上的位移按弹性力学的 Boussinesq 解, 有下列形式:

$$\left. \begin{aligned} u^+ &= \frac{Z}{4\pi\mu} \frac{xz}{r^3} - \frac{Z}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{x}{r(z+r)} \\ v^+ &= \frac{Z}{4\pi\mu} \frac{yz}{r^3} - \frac{Z}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{y}{r(z+r)} \\ w^+ &= \frac{Z}{4\pi\mu} \frac{z^2}{r^3} + \frac{Z(\lambda+2\mu)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

式中, λ, μ 为拉姆常数。

显然, 倘为分布压力 $Z(x, y)$ 作用时, 下体位移将由叠加给出。当以 x', y' 作为积分变量时有:

$$\left. \begin{aligned}
 u^+(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi G^+} \iint_E Z(x', y') \left\{ \frac{(x-x')z}{r^3} - \frac{(1-2\sigma^+)(x-x')}{r(z+r)} \right\} dx' dy' \\
 v^+(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi G^+} \iint_E Z(x', y') \left\{ \frac{(y-y')z}{r^3} - \frac{(1-2\sigma^+)(y-y')}{r(z+r)} \right\} dx' dy' \\
 w^+(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi G^+} \iint_E Z(x', y') \left\{ \frac{z^2}{r^3} + \frac{2(1-\sigma^+)}{r} \right\} dx' dy' \\
 r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}, \quad z \geq 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

式中, G 为材料的刚度模量, $G = \mu$, σ 为泊桑比。为以后应用方便计, 把弹性常数的关系录后:

$$\mu = G, \quad \lambda = \frac{2\sigma G}{1-2\sigma}, \quad \lambda + \mu = \frac{G}{1-2\sigma}, \quad \lambda + 2\mu = \frac{2G(1-\sigma)}{1-2\sigma}, \quad E = 2\mu(1+\sigma). \quad (2-10)$$

上体的位移是由 $Z(x, y)$ 的反作用产生的, 可用与上述相同的方程给出, 但在坐标系 (x, y, z') 中, $z' = -z$ 。为在 (x, y, z) 系中求解, 应把 z 变为 $|z|$, 把 w^+ 改为 $-w^-$ 。这时两个半空间的位移为:

$$\left. \begin{aligned}
 u^+(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi G^+} \iint_E Z(x', y') \left\{ \frac{(x-x')|z|}{r^3} - \frac{(1-2\sigma^+)(x-x')}{r(|z|+r)} \right\} dx' dy' \\
 v^+(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi G^+} \iint_E Z(x', y') \left\{ \frac{(y-y')|z|}{r^3} - \frac{(1-2\sigma^+)(y-y')}{r(|z|+r)} \right\} dx' dy' \\
 w^+(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi G^+} \iint_E Z(x', y') \left\{ \frac{z^2}{r^3} + \frac{2(1-\sigma^+)}{r} \right\} dx' dy'
 \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

在法向力的作用下产生的切向和法向位移差为:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1-2\sigma^+}{G^+} - \frac{1-2\sigma^-}{G^-} \right\} \iint_E Z(x', y') \frac{x'-x}{R^2} dx' dy' \\
 v(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1-2\sigma^+}{G^+} - \frac{1-2\sigma^-}{G^-} \right\} \iint_E Z(x', y') \frac{y'-y}{R^2} dx' dy' \\
 w(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1-\sigma^+}{G^+} + \frac{1-\sigma^-}{G^-} \right\} \iint_E Z(x', y') \frac{dx' dy'}{R} \\
 X &= Y = 0, \quad R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}
 \end{aligned} \quad (2-12)$$

下体和上体弹性常数的组合有:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{G^+} + \frac{1}{G^-} \right], \quad \frac{\sigma}{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^+}{G^+} + \frac{\sigma^-}{G^-} \right), \quad \kappa = \frac{1}{4} G \left(\frac{1-2\sigma^+}{G^+} - \frac{1-2\sigma^-}{G^-} \right) \quad (2-13)$$

$$\text{对于弹性对称的情形有} \quad G = G^+ = G^-, \quad \sigma = \sigma^+ = \sigma^-, \quad \kappa = 0 \quad (2-14)$$

κ 在两个物体不可压缩时也为零, 它的最大值为 0.5, 但在实际上几乎都很小。用式 (2-14) 的常数, 位移差可表为接触面上的曲面积分:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{\kappa}{\pi G} \iint_E Z(x', y') \frac{x-x'}{R^2} dx' dy' \\ v(x, y) &= -\frac{\kappa}{\pi G} \iint_E Z(x', y') \frac{y-y'}{R^2} dx' dy' \\ w(x, y) &= \frac{1-\sigma}{\pi G} \iint_E Z(x', y') \frac{dx' dy'}{R} \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

若在接触面内的 w 给定, 则式 (2-15c) 为适用于未知正压力 $Z(x, y)$ 的积分方程。

对于切向问题, 程序完全相同。设原点的 x 方向有集中力 X 作用, 则问题又归结到弹性力学中给定面力时的通解, 只是把条件作某些改变, 即 $X_n \neq 0$, $Y_n = Z_n = 0$, 这时, 有:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \frac{X}{4\pi\mu} \left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} \right) - \frac{X}{2\pi(\lambda+\mu)} \frac{1}{r} + \frac{X}{4\pi(\lambda+\mu)} \left(\frac{1}{z+r} - \frac{x^2}{r(z+r)^2} \right) \\ v^* &= \frac{X}{4\pi\mu} \frac{xy}{r^3} - \frac{X}{4\pi(\lambda+\mu)} \cdot \frac{xy}{r(z+r)^2} \\ w^* &= \frac{X}{4\pi\mu} \frac{xz}{r^3} + \frac{X}{4\pi(\lambda+\mu)} \cdot \frac{x}{r(z+r)}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

同理, 对于分布剪切力 $X(x, y)$ 下的下体位移, 可以用式 (2-9) 的方式来写出。如果把式 (2-16) 的 x 和 y , u 和 v 以及 X 和 Y 对换, 则可得在 Y 力作用下, 下体所产生的位移。

就上体位移而言, 除 (x, y, z') 坐标系有 $z' = -z$ 外, 还必须计及上体剪切牵引力的反号, 即

$$-X, -Y, |z|, -w^- \longleftrightarrow X, Y, z, w^+$$

这样, 两个半空间的位移为:

$$\left. \begin{aligned} u^*(x, y, z) &= \mp \frac{1}{4\pi G^*} \iint_E \left\{ X(x', y') \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1-2\sigma^*}{|z|+r} + \frac{(x-x')^2}{r^3} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(1-2\sigma^*)(x-x')^2}{r(|z|+r)^2} \right\} + Y(x', y') \left\{ \frac{(x-x')(y-y')}{r^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(1-2\sigma^*)(x-x')(y-y')}{r(|z|+r)^2} \right\} \right\} dx' dy' \\ v^*(x, y, z) &= \mp \frac{1}{4\pi G^*} \iint_E \left\{ X(x', y') \left\{ \frac{(x-x')(y-y')}{r^3} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(1-2\sigma^*)(x-x')(y-y')}{r(|z|+r)^2} \right\} + Y(x', y') \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1-2\sigma^*}{|z|+r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(y-y')^2}{r^3} - \frac{(1-2\sigma^*)(y-y')^2}{r(|z|+r)^2} \right\} \right\} dx' dy' \\ w^*(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi G^*} \iint_E \left\{ X(x', y') \left\{ \frac{(x-x')|z|}{r^3} + \frac{(1-2\sigma^*)(x-x')}{r(|z|+r)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + Y(x', y') \left\{ \frac{(y-y')|z|}{r^3} + \frac{(1-2\sigma^*)(y-y')}{r(|z|+r)} \right\} \right\} dx' dy' \\ r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}, \quad Z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$