

3.21
XYY

結構學新編

(一名 結構矩陣法)

謝元裕 著

文笙書局 印行

結構學新編

(一名 結構矩陣法)

謝元裕 著

文笙書局 印行

* 版權所有 *
* 翻印必究 *

結構學新編

著作者：謝 元 裕

出版者：文 笙 書 局

發行人：黃 清 笙

台北市重慶南路一段 69 號

電話：3810359 郵撥：100165 號

登記證：行政院新聞局台業字第1263號
字 號

印刷者：中 大 打 字 印 刷 公 司

定 價：精 裝：210 元
平 裝：170 元

中華民國六十八年七月十五日出版

序

本書係就著者在台大土木系所授結構學(一)講義擴充而成，大致上可視為著者八年前在美出版結構基本理論一書之續篇，因結構基本理論範圍限於靜力作用下平面結構之線性分析，而茲書更涉及空間構架；結構穩定；及結構動力等部份。又結構基本理論之撰寫，大體依照結構學發展之程序取材，故包括若干古典理論在內，而茲書則悉用新法矩陣分解。

著者撰寫此書，心存二事：其一為行文力求明白曉暢，使學生無艱澀難通之苦；其二為內容力求汰繁就簡，使教者有春風化雨之樂。此書之作，主要為供大學三四年級生已修普通結構學後，進一步研讀之用。至其較高深之章節，亦足為研究生及結構工程師之參考。

茲略述本書之章次內容如下：

第一章緒論，二三兩章能量定理，旨在介紹結構分析之基本觀念，及對能量定理之全般瞭解。能量定理之所以分成兩章，純為求每章篇幅之平衡，使讀者得一休息思考之機會。

自第四章至第八章，集中於矩陣法解構架，出以三種不同之方式：(一)以古典力法與變位法為基礎，加以矩陣化，普遍化，從而建立矩陣解構架之通式，此蓋以整個結構為處理對象。一般教本中雖亦多提及，然語焉不詳。本書則探本溯源，逐步推展，完成此項工作，使學者對古典分析，得融會貫通之益。(二)以有限元素觀念，運用能量定理，推導力法與變位法之矩陣通式。此係集合結構元素之柔度與勁度，輔以力與變位之轉換矩陣，進而求結構之柔度與勁度者。(三)以結構元素為對象，在各自之本位（或局部）坐標上建立勁度，再應用坐標轉換，建立各元素在共同坐標上之勁度，疊加以得結構之勁度，此所謂

直接勁度法是也，最適合大規模系統化之演算。

第九章討論柱與剛架之彈性穩定，對於彈性穩定之涵義，有詳盡之詮釋。至求臨界荷重，悉用矩陣勁度法求解。

第十章為結構動力，於堆積質量系與諧合質量系，分頭並舉；各類動態，皆所涉及。然以篇幅所限，止於簡介層次。

第十一章為有限元素法解聯體問題。按有限元素法範圍既廣且深，通常與一般矩陣解構架者別為一類。著者有意安插一章於本書，使學者對此一方法有初步之瞭解。

附錄兩篇，一為矩陣代數，備學者之參考；一為非均勻元素之處理，補正篇專論均勻桿件之不足。

本書重點在結構理論之統一及矩陣通式之建立，故所舉例則以簡明便於手算為主，複雜之問題，須賴電子計算機處理者，除一二項外，概不闖入。讀者如有需要，參考坊間專著可也。

本書第七章及十一章例題承林聰悟教授協助計算，又全稿蒙顧海昌博士校讀一過，併致謝忱。本書之能出版，虞師兆中之鼓勵為多，先生執教杏壇，於今滿四十年，學不厭，誨不倦，為士林表率，著者謹獻此書，以示崇敬。

中華民國六十八年暮春之初 謝元裕序於台北明安別墅

目 錄

	頁次
第一章 緒論	1
1.1 結構與元素.....	1
1.2 力與變位.....	2
1.3 結構分析之基本觀念.....	3
1.4 力法與變位法.....	5
1.5 柔度與勁度.....	5
1.6 柔度矩陣與勁度矩陣之對稱性.....	10
第二章 能量定理	14
2.1 概述.....	14
2.2 功，虛功；補功，補虛功.....	15
2.3 應變能，虛應變能；補應變能，補虛應變能.....	19
2.4 虛功原理與補虛功原理.....	25
2.5 單位變位定理與單位力定理.....	28
2.6 能量定理運用舉例.....	30
第三章 能量定理（續）	43
3.1 最小總勢能與最小總補勢能原理.....	43
3.2 卡氏定理第一部份（Ⅰ）與第二部份（Ⅱ）.....	46
3.3 最小應變能原理與最小補應變能原理.....	47
3.4 例則.....	50

3.5	能量定理摘要	60
第四章	古典力法與變位法之矩陣普遍式	65
4.1	概述	65
4.2	諧合變位法	65
4.3	諧合變位法之矩陣表式	68
4.4	轉角撓度法	72
4.5	轉角撓度法之矩陣表式	77
4.6	力法與變位法之比較	85
4.7	例則	87
第五章	構架之有限元素力法分析	95
5.1	概述	95
5.2	符號	96
5.3	平衡；力之轉換矩陣	97
5.4	諧合	98
5.5	內在力 - 變位關係；元素柔度矩陣	99
5.6	外在力 - 變位關係；結構柔度矩陣	103
5.7	力法解靜定構架	108
5.8	力法解靜不定構架	116
第六章	構架之有限元素變位法分析	131
6.1	概述	131
6.2	諧合；變位轉換矩陣	131
6.3	內在力 - 變位關係；元素勁度矩陣	134
6.4	外在力 - 變位關係；結構勁度矩陣	136
6.5	平衡	137
6.6	變位法解構架	138

6.7	變位法之通式	147
第七章	直接勁度法：平面結構	156
7.1	概述	156
7.2	本位坐標下之元素勁度矩陣	157
7.3	坐標系之轉動轉換	159
7.4	共同坐標下之元素勁度矩陣	162
7.5	特例：桁桿之元素勁度矩陣	164
7.6	結構勁度矩陣	167
7.7	直接勁度法解構架之步驟	170
7.8	例則	171
第八章	直接勁度法：空間結構	190
8.1	概述	190
8.2	符號	191
8.3	本位坐標下之元素勁度矩陣	192
8.4	坐標系之轉動轉換	195
8.5	共同坐標下之元素勁度矩陣	200
8.6	特例一：空間桁桿之勁度矩陣	202
8.7	特例二：格子結構之元素勁度矩陣	204
8.8	轉動矩陣之方向餘弦	206
8.9	構架分析之計算機程序	211
第九章	構架之彈性穩定	214
9.1	穩定之涵義	214
9.2	舉一個例	219
9.3	柱之屈挫	225
9.4	樑-柱元素之勁度矩陣	232

9.5	剛架之彈性穩定	238
9.6	數字例則	241
第十章	結構動力學	256
10.1	概述	256
10.2	堆積質量與諸合質量	258
10.3	運動方程之建立	264
10.4	堆積質量一度自由系之無阻尼自由振動	265
10.5	堆積質量多度自由系之無阻尼自由振動	270
10.6	分佈質量多度自由系之無阻尼自由振動	277
10.7	有阻尼自由振動	282
10.8	強迫振動：穩定狀態解	287
10.9	正常坐標	289
10.10	動力反應：運動之不相聯屬方程	292
第十一章	有限元素法解彈性聯體	297
11.1	概述	297
11.2	有限元素法程序撮要	298
11.3	變位法應注意事項	301
11.4	元素勁度矩陣之建立	305
11.5	受板面力作用薄板之分析（用三角元素）	309
11.6	高次變位函數及改良元素	316
11.7	面積坐標	322
11.8	元素本位坐標之勁度矩陣與共同坐標之勁度矩陣	327
11.9	數字例則	334
附錄A.	矩陣代數	341
A.1	矩陣之定義與符號	341

A.2	相等；加法；減法；及純量之乘法	344
A.3	矩陣乘法	347
A.4	矩陣之分隔	350
A.5	乘積之轉置	352
A.6	逆矩陣	354
A.7	連續變換法解逆轉	360
A.8	綫性聯立方程之解法	361
附錄B	非均勻截面桿之處理	364
B.1	概述	364
B.2	固端作用	364
B.3	樑元素之柔度矩陣	367
B.4	樑元素之勁度矩陣	370
B.5	其他力 - 變位之關係	373
B.6	辛蒲生法則與梯形法則	374
參考書		380

第一章 緒論

1.1 結構與元素 (Structures And Elements)

土木結構通見者有房屋、橋梁、水壩、隧道、堤壩、塔架等等。如以其形狀與受力方式之不同而分，可有：(1)堆積型；(2)桁架型；(3)剛架型；(4)拱壁型；(5)板殼型；(6)吊索型等等。例如堤壩水壩大部為材料堆積而成，持其重力而穩定。橋梁、屋架及塔架多採用桁架，其特性為桿件僅受軸向力。剛架屬梁柱交叉組成，構成高樓大廈之骨格。拱壁藉擠壓而撐持，發明較早，近世水壩亦常採用拱壁型。以薄殼為屋頂發展最遲，然流行甚廣，以其式樣多變化，且較經濟。圓筒管道，亦均屬薄殼之一種。吊索與拱壁相反，係以張力維繫，典型如金門大橋，以長跨見雄。現亦普遍用於房屋建築。

結構物之功能一方面在承擔重量及其他外來之作用。一方面限制因此而產生之結構變形，使止於細微不察覺程度。結構有以平面稱者，所謂“平面結構”意指結構分析可以平面問題處理，即結構各桿件之軸線，在分析時用以代表整個結構或其部份者，均在同一平面上；而結構之作用力亦在此平面上。一般橋桁與房屋構架，常可作為平面結構加以分析。設若結構不能簡化為平面（二維）處理時，則稱之為“空間結構”（三維），分析上自較複雜，如圓頂、塔架、及薄殼等皆是。

結構在分析上常可視為由若干單元或元素集合而成。最簡單之元素為桁桿，僅受軸向力之作用（一維）。梁件亦屬一維，主要承受彎力，連續梁與剛架可視為若干梁件所組成。

2 結構學新編

薄板之分析係取其中層平面爲處理對象，可視爲由一串三角形或四邊形之元素集合而成，爲二維元素。

薄殼之近似分析，往往採用環狀體或錐體爲元素。其餘較複雜結構之分析，有採用四面體或磚狀元素者，凡此皆爲三維元素。

1.2 力與變位 (Force and Displacement)

結構受外力作用後，必然產生細微之變位，但爲肉眼所不能察覺。力與變位同爲發生於結構之兩類事件 (Event)。廣義之力，指力與力偶；而廣義之變位，指移動與轉動。結構功用之一，爲將外力傳遞至支承，而支承則係建立於地基或其他結構上。如將整個結構取爲自由體，亦即自支承處將其分離，則支承之反力，亦將構成外力之一部份。故結構上之外力實包含結構荷重及支承反力兩部份。顯然支承之反力適可平衡結構上之荷重。結構荷重或爲分立 (集中荷載) 或爲分佈。通常分析，荷重係作爲已知量；而支承反力視爲未知量，並由支承設計情況決定反力之分量。

如取結構之一部份爲分離之自由體時，則此部份將包含切割斷面處之內力。所謂內力，即此斷面應力之合成 (剪力、正交力、或二者均有)。應力實際分佈情況，可能異常複雜，一如支承反力之情形，然究其合成，則常可簡化爲一作用於斷面中心之廣義力 (或此力之分量) 爲代表。按內力在切割斷面之兩面，呈相等相反之形式。

於結構分析時，力與變位“相應” (Correspondence) 一詞，常加使用，宜先闡明。設有一組外力 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 作用於結構，今有變位 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 分別發生於此組力之作用點，且順其力之方向進行，則吾人謂此組變位相應與此組力。故如圖 1.1 相應於重力 R_1 之變位，爲載重點之垂直撓度 r_1 ，取向下方爲正。而相應於力矩 R_2 之變位，爲力矩作用點之轉角 r_2 ，取力矩方向爲正 (以本例而論，爲順時鐘方向)。所須注意者： r_1 與 r_2 實由作用力 R_1, R_2 共同造成，即相應於某力之變位，並非由該力單獨造成。以上“相應”

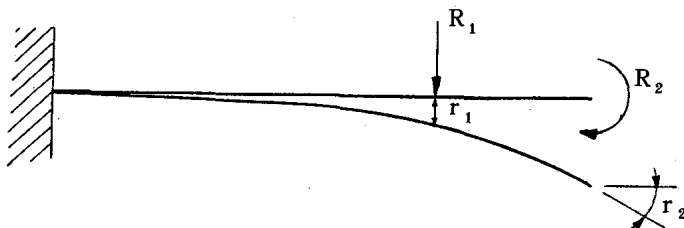


圖 1.1

之觀念，自亦可援用於扭力與扭轉角之關係上。總之，設若一廣義力與一廣義變位，其乘積適可代表功量時，則吾人稱此力與變位為相應。

1.3 結構分析之基本觀念 (Basic Concepts of Structural Analysis)

結構分析目的之一，在決定結構各部份因外在作用所生之力，包括支承點之反力，及各桿件之內力等。結構之外在作用計有荷重，溫度變化，材料收縮，或預力等等。結構分析亦同時求定結構控制點之變位，及其與相應力間之關係。描述結構行為之基本定律，大要有三部份：

- (1) 力之平衡 (Equilibrium of forces)
- (2) 變位之諧合 (Compatibility of displacements)
- (3) 力與變位之關係 (Force-displacement relationship)

力與變位之關係與結構幾何及材料性質相關。

以上條件，不論所用分析方法為何，皆須遵照。如力與變位間，存有線性之關係，則此結構稱為“線性結構”，而疊合原則 (principle of superposition) 乃可適用。線性關係之成立，應滿足下列兩條件：

- (1) 結構之材料為彈性，且在載重範圍內悉遵虎克定律。
- (2) 結構之變位甚小，於計算力與應力時，可不計是項變位，而仍遵原結構形狀進行。

4 結構學新編

疊合原則在矩陣分析線性結構時，非常有用。是項原則可述於次：由各種原因（例如力與變位）對結構所產生之總效果，可由各種原因分別對結構所產生之效果相加得之。

按疊合原則不能用於非線性結構。設若結構材料並非彈性，或雖在彈性範圍內，但結構變位較大，足使計算不能由原幾何形態得其準確值，皆可稱之為非線性結構。

結構在靜力狀態為平衡，乃指外力作用於結構互相制衡，造成靜止狀態而言。若將結構某部分離，則分離斷面之內力（此時看成外力）與分離體上之外力，亦須平衡，所謂平衡力系，指此力系之合力不存在而言。凡力系之合成，要為一合力，及一合力矩。如其合成為零，則其在 x ， y ， z ，三方向之分力，亦必為零。故平衡方程可書如下：

$$\begin{array}{lll}\Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0\end{array} \quad (1.1)$$

上式通用於三維力系。設其為平面力系，則僅須取式 (1.1) 中之三個方程。例如所有力皆作用於 $x-y$ 面時，三個平衡方程為：

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (1.2)$$

所須附帶說明者，在複式結構中，往往在建造上安裝有鉸接或輾接之設置，以連繫數個簡單結構而成一複式結構。此類裝置，對力系構成某種限制，謂之條件方程（Condition equations）視為平衡方程之補充式。

“諧合”者指維持結構之連續性而言。諧合條件構成結構幾何之變位方程。例如有數桿相連於結構一結點上，結點移動時，則相連於該結點之各桿端，亦應與結點作相同之移動，始為諧合。又如各支承點變位，必須諧合裝置上特定之情況。以鉸承而言，如基礎堅實，則承接處僅許轉動，而制止移動。諧合亦要求於結構之內部，例如割開

某斷面易以內力時，該斷面應密切無間，即切開處之兩面，應無相對之變位產生。

吾人作結構分析時，有時用能量原理，以替代平衡方程，與諧合條件。能量原理，名稱甚多，概言之，可歸納於“虛功原理”與“補虛功原理”兩大項下，前者用虛位移，後者用虛力，將於下章討論之。

1.4 力法與變位法 (The Force Method and The Displacement Method)

結構分析法可分為兩大類，即力法與變位法。

力法係以力為基本未知量。結構任何部份內外力，及已知未知力間之關係式，先可由靜力學加以建立（平衡）。如靜力方程不足以解得時，則此結構謂之“靜不定”或“超靜定”。此由於未知力較靜力方程數多出之故，此多出之數，稱為“靜不定度”；而此超出靜定之力謂之“贅力”（Redundant forces）。分析靜不定結構，必須引進諧合條件始足得其解。即將變位以贅力之函數為表達。吾人用贅力作用點之諧合條件，適足以解所有之贅力。贅力既解，則其餘力的未知量，皆可從靜力方程解得。如欲進而求結構之變位，亦可由力與變位之關係式得之。

變位法係以結構變位作為基本未知量（通常取結點之變位）。法先以諧合條件，聯繫桿件端點變位與結點變位，次將桿端力以變位函數表達；然後用結點之平衡方程，解得變位之未知量，進而解未知力。結構中獨立之結點變位量，即為“動不定度”，亦稱為結點變位之自由度。

1.5 柔度與勁度 (Flexibility and Stiffness)

於矩陣法分析結構時，前述力法可稱為柔度法，而變位法可稱為勁度法，並為建立力與變位關係之兩條平行大道。力法將變位以力之函數表式，而以柔度矩陣建立其關係；變位法將力以變位之函數表式，

6 結構學新編

而以勁度矩陣建立其關係。

茲舉一最簡單之例，以明此項關係。看圖 1.2，張力 R 將彈簧端

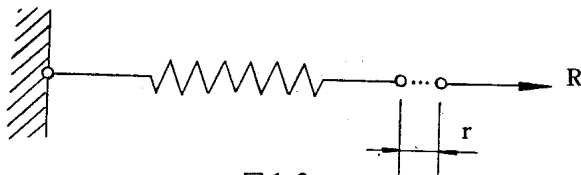


圖 1.2

點延伸 r 之變位。既然變位與力成正比，乃有

$$r = fR \quad (1.3)$$

式中 f 爲一比數，稱爲“彈簧柔度”，用以聯繫 r 與 R 。其值視彈簧材料性質而定。由式 (1.3) 知：當 $R=1$ ， $f=r$ 。故 f 可定義爲單位力所產生之變位。力與變位之關係式又可寫成：

$$R = sr \quad (1.4)$$

式中 s 稱爲“彈簧勁度”。當 $r=1$ ， $s=R$ 。故 s 可定義爲產生單位變位所需之力。顯然在本例單向力與變位情形下，柔度與勁度適爲倒數。

如將彈簧改爲一均勻之桿件，長 L ，截面積爲 A ，楊氏彈性模數爲 E ，則有

$$r = \left(\frac{L}{AE} \right) R \quad (1.5)$$

式中 L/AE 爲桿之軸向柔度，或者

$$R = \left(\frac{AE}{L} \right) r \quad (1.6)$$

式中 AE/L 爲桿之軸向勁度，柔度與勁度，視桿件材料與形狀（幾何）而定。

進而再考慮一線性結構，受一組力之作用。以圖 1.3 之樑為例，梁荷載集中力 R_1 ， R_2 ，及力矩 R_3 。其相應變位分別為 r_1 ， r_2 ，及 r_3 。利用疊加原則，吾人可將 r_1 寫成：

$$r_1 = r_{11} + r_{12} + r_{13} \quad (1.7)$$

式中： r_{11} 為由坐標 1 作用力 R_1 所產生對坐標 1 之撓度；

r_{12} 為由坐標 2 作用力 R_2 所產生對坐標 1 之撓度。

餘可類推。按此處“坐標”（Coordinate）一辭，係用以標明力或變位之所在點，及其作用方向，而以箭頭示於結構圖上。同樣吾人可

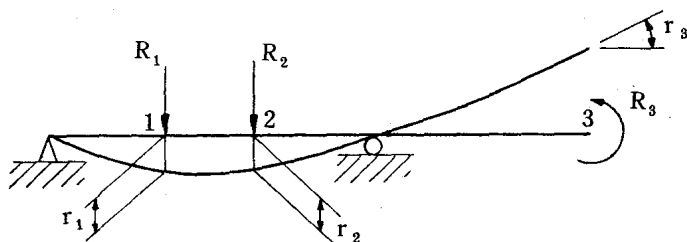


圖 1.3

寫

$$r_2 = r_{21} + r_{22} + r_{23} \quad (1.8)$$

$$r_3 = r_{31} + r_{32} + r_{33} \quad (1.9)$$

既然力與變位間存有線性關係（成正比），則 r_{11} 必等於一比數乘以 R_1 ，亦即 $r_{11} = f_{11}R_1$ 。同理 $r_{21} = f_{21}R_1$ ， $r_{31} = f_{31}R_1$ 等等。以此代入式（1.7）至（1.9），并集合得矩陣式為：

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$