HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

工程数学解题方法

GONGCHENG SHUXUE JIE TI FANGFA

湖北工学院数学教研室 主编

华中理工大学出版社

工程数学解题方法

湖北工学院数学教研室　　主编

编写人员名单（按姓氏笔画为序）

第一篇　线性代数
叶盛标　杨策平　陈津汉
统稿　扬策平
第二篇　概率论与数理统计
欧宜贵　胡汉儒　黄小平　黄斌
统稿　黄斌
第三篇　复变函数
李鸿丽　徐树祥　彭志刚
统稿　李鸿丽
第四篇　计算方法
王小雷　田天海　许松林
统稿　田天海

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

工程数学解题方法/湖北工学院数学教研室主编

武汉:华中理工大学出版社, 1995 年 9 月

ISBN 7-5609-1158-7

Ⅰ.工…

Ⅱ.湖…

Ⅲ.工程数学-解题

Ⅳ.TB11-44

工程数学解题方法

湖北工学院数学教研室主编

责任编辑:李立鹏　张培炼

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山　邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

湖北省石首市人民印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16　印张:15.25　字数:356 000

1995 年 9 月第 1 版 1995 年 9 月第 1 次印刷

印数:1-8000

ISBN　7-5609-1158-7/O・137

定价:14.00 元

内容提要

本书是根据国家教委批准的高等工科院校《工科数学课程教学基本要求》编写的，全书共有线性代数、概率论和数理统计、复变函数和计算方法等 4 篇共 27 章，每章均分为内容提要、例题和习题三大部分。本书每章都首先提出教学基本要求，简要介绍基本概念和基本内容，然后通过精选的典型例题介绍工程数学各类问题的解题方法和技巧，并进行了分析和归纳，以便读者全面系统地掌握工程数学的基本理论和基本方法。

本书可作工科高等院校本、专科学生的教学参考书，也可供工程技术人员自学参考。

序 言

据我所知，本书的作者们是为了帮助读者解决学习“工程数学”的困难，是运用他们自己多年教学经验，是根据高等工科院校《工科数学课程教学基本要求》编写而成讲义的。后来，又在教学实践中，反复琢磨、改进、完善，因此，正式出版这样一本书，已是水到渠成的自然结果。

本书的鲜明特点是：每章均分“内容提要”，“例题”和“习题”三大部分。在每一章的“内容提要”里，介绍了该章的基本理论和方法，并阐明了对这些理论和方法的理解；在每章的“例题”部分，着重分析了题意，提出解题思路，制订解题步骤，并根据解题方法对该章的基本内容进行了小结，所选例题是对现行教材中例题的补充；每章的习题，是本书的重要部分。为了充分领会这些内容，认真的读者应当尽力解答大量问题。如果读者不能应用这些思想方法，那么他们就不能有很大的进步。

我个人认为，广大读者，特别是对于有志掌握“工程数学”知识而又限于少人帮助的读者们，应对作者们在撰写这本书时，所表现出的奉献精神和付出的辛勤劳动，致以衷心敬意。

林 化 夷

1995 年 6 月于武昌

前　言

工程数学(包括线性代数、概率论与数理统计、复变函数、数学物理方程和计算方法)是高等工科院校最主要的基础课之一,它包含有后续专业基础课和专业课所必需的数学方法。为了提高工程数学的教学质量,在对长期的教学经验提炼加工的基础上,根据我院教学工作的特点,我们编写了这本《工程数学解题方法》,该书曾作为内部教学参考资料在我院使用过多年,并作过两次较大修订,此次再修改后我们将它正式出版。

本书共包含线性代数、概率论与数理统计、复变函数和计算方法等四篇,在编写该书时,我们参照了国家教委批准的高等工科院校《工科数学课程教学基本要求》以及现有教材的系统性,但又不完全受该系统的限制,对某些教学内容及解题方法进行了适当地集中和归纳,以便读者全面系统地掌握这些理论和方法。本书每章均分为内容提要、例题和习题三大部分。

参加本书编写工作的有:线性代数,陈津汉(第一章)、杨策平(第二、三章)、叶盛标(第四、五章),由杨策平统稿;概率论与数理统计,黄斌(第一、九章)、胡汉儒(第二、五章)、欧宜贵(第三、四章)、黄小平(第六、七、八章),由黄斌统稿;复变函数,徐树祥(第一、二章)、李鸿丽(第三、四章)、彭志刚(第五、六章),由李鸿丽统稿;计算方法,田天海(第一、二章)、许松林(第三、四章)、王小雷(第五、六、七章),由田天海统稿。

国家教委高校工科数学课程教学指导委员会委员、华中理工大学林化夷教授仔细审阅了全书,并提出了许多宝贵意见,使本书增色不少,我们对林化夷教授的热情鼓励和大力支持表示衷心地感谢。本书的编写工作得到了湖北工学院和湖工基础课部领导的大力支持,在此我们表示衷心地感谢。

由于我们水平有限,加上时间仓促,本书不妥之处在所难免,恳切希望广大读者提出批评、建议,使本书能不断丰富完善。

湖北工学院数学教研室

1995 年 6 月

目　录

第一篇　线性代数

第二篇　概率论与数理统计

第三篇　复变函数

第四篇　计算方法

第一篇　线性代数

第一章　n 阶行列式

教学基本要求

1. 会正确叙述 n 阶行列式的定义。

2. 掌握行列式的性质，并会利用行列式的性质把行列式化成三角形行列式或对角行列式或按一行(列)展开。

3. 掌握二、三阶行列式的计算法，会正确计算四、五阶数字行列式的值。

4. 会计算简单的 n 阶行列式。

5. 了解用克莱姆法则计算线性方程组的方法，以及该法则的条件和结论。

内容提要

一、排列

定义 1　把 n 个不同的元素排成一列，称做这 n 个元素的全排列(简称排列)，n 个不同元素的全排列的总数用 P_n 表示，$P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!$。

定义 2　在 n 个元素的任一个排列中，当两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称这两个元素组成一个逆序。一个排列中所有逆序数的总和称做这个排列的逆序数，逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列。

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续称做对换。

定理 1　对换改变排列的奇偶性。

二、行列式

定义 3　设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号$(-1)^t$；得到如$(-1)^t a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}$的项，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，由于这样的排列共有 $n!$ 个，因此共有 $n!$ 项，所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^t a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\Delta(a_{ij})$，数 a_{ij}称为行列式 $\Delta(a_{ij})$的第 i 行第 j 列的元素。

定理 2 行列式有以下性质：

(1)$D'=D$，其中 D'为 D 的转置行列式。

(2)D 中的某一行(列)所有的元素同乘常数 k 所得行列式等于 k 乘以 D。

(3)互换 D 中任意两行(列)的元素，所得行列式等于$-D$。

(4)D 中某行(列)所有的元素同乘一数加到另一行(列)的对应元素上，其值不变。

(5)若：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

则 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n31} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$。

(6)行列式中如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式为零。

(7)行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

(8)行列式的任一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和为零。

三、克莱姆法则

设 n 个未知数 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2; \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n。 \end{cases} \quad (1)$$

如果(1)的系数行列式不等于零，即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组(1)有唯一解：$x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$，其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的自由项代替后所得到的 n 阶行列式。

定理3 如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零，即

$D=0$。

定理 4 设(1)中常数项均为零,此方程称为齐次方程组,记为(2),如果(2)中系数行列式 $D=0$,则(2)有非零解,如果 $D\neq 0$,则(2)只有零解。

四、拉普拉斯定理

定义 4 位于 n 阶行列式的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行及第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列 $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n, 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n)$ 交叉位置上的元素,按原来的位置构成的 k 阶行列式 M,称为一个 k 阶子式;不在这 k 行 k 列上的元素,按原来的位置所构成的一个 $n-k$ 阶子式 N,称为 M 的余子式,而称 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$ 为 M 的代数余子式。

定理 5 (拉普拉斯定理) 任意取定 n 阶行列式的某 k 行(列),位于这 k 行(列)中的 k 阶子式共有 C_n^k 个,则这 C_n^k 个子式与其相应的代数余子式的乘积之和等于 D,即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t。$$

五、行列式的计算方法

1. 利用行列式的定义计算。

如果一个行列式,元素中零的个数较多时,常常用行列式的定义来计算。

2. 利用行列式的性质计算。

3. 利用递推公式计算。

4. 利用拉普拉斯定理计算。

5. 利用数学归纳法计算。

6. 化为范德蒙行列式计算。

7. 利用加边法计算。

把所要计算的行列式添加一行一列,得到加边行列式,使它与原来的行列式相等,且较容易计算。

例　题

例 1 写出第 1,2 个位置是 4,1 的全部 5 个元素的排列,并求它的逆序数,判断其奇偶性。

解

排列	逆序数	奇偶性
41235	3	奇
41253	4	偶
41325	4	偶
41352	5	奇
41523	5	奇
41532	6	偶

例 2 决定 i 与 j,使

$a)1245i6j$,为奇排列;$b)3972i15j4$ 为偶排列。

解 $a)i=7,j=3$; $b)i=6,j=8$。

注：解本类问题时，一般取小数在前，大数在后，这样逆序数易求，如果符合要求，即为所求，如果不合要求，则用定理 1，另一种情况必符合要求。

例 3 写出 5 阶行列式中所有形如 $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_1}a_{4\alpha_2}a_{5\alpha_3}$ 的项，若将其总和提出 $a_{14}a_{23}$，则所得是什么？

解 要使 $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_1}a_{4\alpha_2}a_{5\alpha_3}$ 为 5 阶行列式中的项，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的逆序数为 $5+[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，其中 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为 1,2,5 的排列的逆序数，这些项的总和为

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(-1)^{[4,3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]}a_{14}a_{23}a_{3\alpha_1}a_{4\alpha_2}a_{5\alpha_3}$$

$$=-a_{14}a_{23}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(-1)^{[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]}a_{3\alpha_1}a_{4\alpha_2}a_{5\alpha_3}$$

$$=-a_{14}a_{23}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}。$$

例 4 由行列式定义证明 $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$。

证明 由定义，行列式 Δ 的任一项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5}$ 中 (i_3,i_4,i_5) 为从 1,2,3,4,5 中取 3 个元素的某一排列，从而至少有一个元素取自 3,4,5 中，不妨设 i_3，则 $a_{3i_3}=0$，从而 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5}$ 中至少有一个因子为零，故 $\Delta=0$。

例 5 计算行列式：$D=\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$。

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} \times 2 \quad \times(-3) \quad \times(-2)$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}=13\begin{vmatrix} -1 & 25 & 17 \\ 2 & -34 & -26 \\ 2 & -33 & -24 \end{vmatrix}\times 2 \quad =13\begin{vmatrix} -1 & 25 & 17 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$=-13\times 8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 17 & 10 \end{vmatrix}=-13\times 8\times 3=-312。$$

注：此题解法虽简单，无技巧，但它却是一般方法，一个行列式，特别是数字行列式，如果没有什么特殊的方法来计算，则只能像此题用某行（列）的元素去消去其它行（列），使得这行（列）中的元素全部为零，再利用性质 7 可达到降阶，逐次降阶，直到可直接计算为止。

例 6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & a & \cdots & a \\ a & a & x & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}。$$

解法一

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}。$$

解法二

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}\times(-a)=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}。$$

解法三　加边法

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{(n+1)(n+1)}\times(-1)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}。$$

当 $x=a$ 时 $D_n=0$。

当 $x\neq a$，各行乘以$\frac{-a}{x-a}$加到第一行得：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+na/x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(1+\frac{na}{x-a})(x-a)^n=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}。$$

此结果对一切 x 均成立。

解法四　建立 D_n 的递推公式

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a+a & a & a & \cdots & a \\ 0+a & x & a & \cdots & a \\ 0+a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0+a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ 0 & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)D_{n-1}+\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}。$$

故有递推公式 $D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}$

$$(x-a)D_{n-1}=(x-a)^2D_{n-2}+a(x-a)^{n-1}$$

$$\cdots$$

$$(x-a)^{n-2}D_2=(x-a)^{n-1}D_1+a(x-1)^{n-1}\quad (D_1=x)。$$

等式两边分别相加，则得：

$$D_n=(x-a)^{n-1}[D_1+(n-1)a]$$

$$=[x+(n-1)](x-a)^{n-1}。$$

注：从此题的解法中，可大致归纳出计算 n 阶行列式的基本技巧：

1)利用行列式的性质把不便于直接计算的形状化为便于直接计算的形状，如三角形，对角形；2)设法将行列式表示成与原行列式同形，但低阶的行列式函数，从而建立递推公式；3)

灵活地应用其它的技巧，如加边，折开以造成 1、2 中的情形。

例 7　计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}。$$

解　原式$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$

$$=-2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}=(-2)(n-2)!\quad (n\geqslant 2)。$$

例 8　证明
$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha。$$

证明　当 $n=2$ 时

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha,$$

结论成立。

假设当 $n=k-1$ 时成立，对 k 阶行列式按最后一行展开，

$$D_k=2\cos\alpha\cos(k-1)\alpha-D_{k-2}$$

因为 $D_{k-2}=\cos(k-2)\alpha=\cos[(k-1)\alpha-\alpha]$

$$=\cos(k-1)\alpha\cos\alpha+\sin(k-1)\alpha\sin\alpha,$$

$$D_k=2\cos\alpha\cos(k-1)\alpha-\cos(k-1)\alpha\cos\alpha-\sin(k-1)\alpha\sin\alpha$$

$$=\cos(k-1)\alpha\cos\alpha-\sin(k-1)\alpha\sin\alpha$$

$$=\cos[(k-1)\alpha+\alpha]=\cos k\alpha。$$

故对一切 n，等式成立。

例 9　计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}。$$

解 把 D_n 按第一列展开，得

$$D_n=(\alpha+\beta)\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix}\alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2},$$

即 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$。

类似地，有

$$D_{n-1}-\alpha D_{n-2}=\beta(D_{n-2}-\alpha D_{n-3});$$

$$\cdots$$

$$D_3-\alpha D_2=\beta(D_2-2D_1);$$

所以 $$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)。$$

而 $D_1=\alpha+\beta$，$D_2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$，故 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)]=\beta^n$。

当 $\alpha=0$ 时，$D_n=\beta^n$。

当 $\alpha\neq 0$ 时，$$\frac{D_n}{\alpha^n}=\frac{D_{n-1}}{\alpha^{n-1}}+(\frac{\beta}{\alpha})^n=\frac{D_{n-2}}{\alpha^{n-2}}+(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}+(\frac{\beta}{\alpha})^n=\cdots$$

$$=\frac{D_1}{\alpha}+(\frac{\beta}{\alpha})^2+(\frac{\beta}{\alpha})^3+\cdots+(\frac{\beta}{\alpha})^n=1+\frac{\beta}{\alpha}+(\frac{\beta}{\alpha})^2+\cdots+(\frac{\beta}{\alpha})^n$$

$$=\frac{1}{\alpha^n}\cdot\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta},$$

因而 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$，$\alpha\neq\beta$。若 $\alpha=\beta$，$D_n=(n+1)\alpha^n$，则

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}，当\ \alpha\neq\beta；\\ (n+1)\alpha^n，当\ \alpha=\beta。\end{cases}$$

例 10 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}。$$

解 作加边行列式，使其构成 $n+1$ 阶范德蒙行列式：

$$g(y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & x_3^{n} & \cdots & x_n^{n} & y^{n} \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(y-x_1)$$

$$\cdot(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)(y-x_2)\cdots(y-x_n)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)。$$

从上式右端看，$x_i(i=1,2,\cdots,n)$是多项式 $g(y)$的根，由根与系数的关系可知：

$$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

是多项式 $g(y)$中 y^{n-1}的系数，但从左端，多项式 $g(y)$中 y^{n-1}的系数为$(-1)^{n+n+1}D=-D$。

所以 $D=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$。

例 11 计算 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$。

解 利用拉普拉斯定理

原式$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{4+5+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=(24-4-8)\cdot(-1)^{12}\cdot(1-6)=-60$。

例 12 用克莱姆法则解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8; \\ x_1-3x_2+6x_4=9; \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5; \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0。\end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27$， $D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81$，

$D_2=-108$， $D_3=27$， $D_4=27$，

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=-4$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1$，$x_4=\dfrac{D_4}{D}=1$。

习　题

1. 按自然数从小到大的标准次序，求下列排列的逆序数，并指出(1)(2)的奇偶性。