十一五 Vocational Technology

全国高职高专院校规划教材

高等数学

Advanced Mathematics

主编／孙　伟　　副主编／杜彦娟 庞淑萍

海洋出版社

十一五 Vocational Technology 全国高职高专院校规划教材

高等数学

Advanced Mathematics

主编／孙　伟　　副主编／杜彦娟 庞淑萍

海洋出版社

北京

内 容 简 介

本书是专为全国高等职业技术院校和高等专科院校高等数学课程编写的教科书。本书从易教与易学的目标出发，采用**技能目标 + 任务驱动 + 范例讲解 + 提高与练习**的全新教学模式，生动详细地介绍了高等数学的基础知识与实际应用。

本书内容：根据全国高等职业技术院校和全国高等专科院校高等数学课程基本要求编写，由12章构成。内容包括：函数4项技能12个任务；极限与连续5项技能14个任务；导数与微分7项技能16个任务；导数的应用7项技能14个任务；不定积分4项技能6个任务；定积分5项技能9个任务；定积分的应用3项技能7个任务；常微分方程初步4项技能8个任务；空间解析几何4项技能19个任务；多元函数微分学6项技能20个任务；多元函数积分学2项技能7个任务；级数2项技能16个任务。

本书特点：1. 多年教学、实践、教改经验的总结：本书是多年一线教学、实践、教改经验的积累和总结，实用性强。**2. 突出技能训练和培养动手能力：**本书以"技能目标"和"任务驱动"的形式组织内容，用丰富鲜活的案例，重点突出数学建模能力、职业岗位能力、创新能力和解决实际工程问题能力的培养，强化职业技能训练。**3. 以就业为导向、以实践为主体：**学科教育与认证培训相结合，以社会职业或行业技能认证标准为能力依据，强化解决实际问题的技能与技巧，激发强烈的学习欲望，活学即用，为就业提前打好基础。**4. 易教易学：**理论知识浅显易懂，实践内容丰富且比重较大，范例典型、实用性，讲解通俗形象、生动具体，方便教学；精心总结，配置提高与练习题，及时巩固与检测所学知识，易教易学。

适用范围：全国高等职业院校和高等专科院校高等数学教材，成人教育和自学考试、专升本的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/孙伟，杜彦娟，庞淑萍编著. —北京：海洋出版社，2007.9
ISBN 978-7-5027-6871-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①孙…②杜…③庞… Ⅲ.高等数学—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第125384号

总 策 划：WISBOOK	发 行 部：（010）62132549 （010）62113858
责任编辑：王勇	（010）62174379（传真） 86489673
责任校对：肖新民	网　址：www.wisbook.com
责任印制：周京艳　魏志新	承　印：廊坊市时嘉印刷有限公司
排　版：海洋计算机图书输出中心　晓阳	版　次：2008年5月第1版第1次印刷
出版发行：海洋出版社	开　本：787mm×1092mm　1/16
地　址：北京市海淀区大慧寺路8号（716房间）100081	印　张：12
经　销：新华书店	字　数：284千字
技术支持：www.wisbook.com/bbs	印　数：1～5000册
	定　价：22.00元

本书如有印、装质量问题可与发行部调换

前　言

在高职高专教学工作中，高等数学教育受到了越来越多的重视，各院校开始注重结合各专业在职业岗位能力方面的需求及人才培养的目标，不断地进行课程改革，依据不同专业的需求有针对性地实施数学教育，使高等数学教学水平不断得到提高。但是，多年来“认识跟不上发展，步伐赶不上变化”的现象仍较为严重。为此，信息产业部国家信息化工程师认证考试管理中心、教育部职成司教材处和相关出版社，共同研发以“任务驱动式”和“项目策划式”教学法，组织编写技能型教材，将学科的应用技能教育与各类职业资格认证紧密结合。在内容组织方面以“必须、实用”为本，以“够用、适度”为纲，删繁就简，打破原教课书过于追求系统性、完整性的旧框框。重点突出数学建模能力，职业岗位能力，创新能力和解决实际工程问题能力的培养，强化职业技能训练。针对各专业不同的教学需要，在广度优先的基础上保证所“必须”的深度，在“够用”的理论知识基础上，更注重应用能力的培养与训练。本教材主要特色有如下几点：

- 教材中理论知识浅显易懂，实践内容丰富且比重较大。
- 教材中有丰富鲜活的案例，以任务驱动为主线。
- 学科教育与认证培训相结合。
- 全书内容体系追求实用，避免较烦琐的理论推证。
- 每单元均有重点内容提要和单元总结与问题剖析，有利于学生掌握知识点和捕捉学科的精华，更方便于读者自学。

通过对社会职业岗位需求的广泛调查，结合职业院校理工科专业公共技能课程的教学实践，业内人士普遍认为高等数学教学贵在确定如何设置教学内容，使学生具有较完备的分析问题和解决问题的能力，具有自我知识更新和创新能力，以满足社会职业岗位对职业院校毕业生在知识结构及技术技能体系上的需求。同时，以社会职业或行业技能认证标准为能力依据，在教材内容组织方面我们作了较大的调整，通过典型的“任务”课题，给学生营造一个带着问题学，学以致用的学习氛围，使其对知识的掌握达到形象、生动和具体，以强化解决实际问题的技能与技巧。全书内容力求新颖、严谨、实用。

通过本课程学习，学生能在较短的时间内提高自身利用数学建模的能力。全书内容广泛，实用性强。使读者容易入门、便于自学。每章后附有实训题和习题，全书共分为 12 章。

第 1～4 章由杜彦娟副教授编写，第 5～8 章由孙伟副教授编写，第 9～12 章由庞淑萍副教授编写。全书的习题由孙伟审校。由于时间仓促，疏漏难免，敬请批评。

在本书编写过程中，得到王首义、许洪军、赵荣凯、郭鋆飞、王鹏华、高洪志、柏英、肖春艳、梁晶、樊任军、祖国强、程显林、孔祥春、解展光、靳恩丽、左晓英、王小树、李传鸿、徐翠娟、何蕴峥、靳敏、贾晓芳、宋涛、钟啸剑、郭志强、王国娟、吕强等人的大力支持，在此一并表示衷心感谢。

编　者

目　录

第 1 章　函　　数

高等数学是以函数为研究对象的一门数学，函数的思想贯穿高等数学的始终. 所谓函数是指变量之间的对应关系. 本章内容不是中学所学函数简单的重复，而是延伸和补充. 本章将对函数进行较系统地复习，为今后的学习打下坚实的基础.

1.1　技能 1　函数的概念

任务 1　函数的定义

1. 常量和变量

在研究问题的过程中，经常会遇到两种不同的量：一种是在运算过程中始终保持同一数值的量，称为常量；另一种是在运算过程中可以取不同数值的量，称为变量. 例如，某圆的半径是 R，圆的面积 S 与半径 R 之间的关系是 $S=\pi R^2$，其中 π 是常量，S，R 是变量.

注 意　常量和变量的概念是相对的，某些变量在相应的限制条件下可以看成常量，如 2005 年某商品的价格可以看作常量，而要考虑 1995～2005 年间该商品的价格，就是一个变量.

对于一个变量来说，它的所有可能取值构成的集合，成为这个变量的变域.

常量一般用 a，b，c 等表示；变量用 x，y，z 等表示.

2. 函数的概念及表示

定义　在某一变化过程中，设有两个变量 x，y. 若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作：$y=f(x)$，$x\in D$.

其中，x 称为自变量，y 称为因变量或函数；f 是函数符号，它表示 x 与 y 的对应规则. 有时也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$ 等.

集合 D 称为函数的定义域；对于 $x_0\in D$ 所对应的 y 值，记作 $y=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的函数值，相应的 y 值的集合 $\{y|y=f(x)$，$x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的值域，记作 M.

从函数的定义可以看到，构成函数的要素有两个：对应规则和定义域. 如果两个函数的对应规则和定义域都对应相同，那么它们就是同一函数. 例如，$y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是同一函数，而 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 因对应规则不同，不是同一函数.

任务 2　函数定义域的确定和求函数值

1. 函数定义域的确定

有两个原则：

（1）对于用解析式表示的函数，自变量的取值要使其解析式有意义. 通常有以下几种情况：

- 含偶次方根，被开方数非负；
- 含对数式，真数部分大于零；
- 含分式，分母不为零；
- 含反正弦或反余弦的部分，绝对值小于或等于 1；
- 含多种函数的解析式，求公共解集.

（2）在实际问题应用中，除了要根据解析式自身来确定自变量的取值范围以外，还要考虑变量的实际意义.

例 1 求下列函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{2}{x^2-4x+3}$；（2）$y=\sqrt{x^2-9}$；

（3）$y=\lg(3x-1)$；（4）$y=\arcsin(x-2)$；

（5）$y=\dfrac{2}{x^2-4x+3}+\lg(3x-1)$.

解：（1）在分式中，由 $x^2-4x+3\neq 0$ 解得 $x\neq 1$ 且 $x\neq 3$，即 D 为 $(-\infty，1)\cup(1，3)\cup(3，+\infty)$.

（2）在偶次根式中，$x^2-9\geqslant 0$ 解得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3$，即 D 为 $(-\infty，-3)\cup(3，+\infty)$.

（3）在对数式中，$3x-1>0$，解得 $x>\dfrac{1}{3}$，即 D 为 $\left(\dfrac{1}{3}，+\infty\right)$.

（4）在反正弦式中，$|x-2|\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant 3$，即 D 为 $[1，3]$.

（5）由（1）和（3）题，定义域为（1）和（3）解集的交集，D 为 $\left(\dfrac{1}{3}，1\right)\cup(1，3)\cup(3，+\infty)$.

2. 求函数值

当自变量取定 $x_0\in D$ 时，函数的对应值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

如果函数是用解析式表示的，求函数值时，只要将解析式中的 x 换成自变量值.

例 2 若 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(0)$，$f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$，$f(f(x))$ 的值.

解：$f(0)=\dfrac{1}{1-0}=1$；$f(-2)=\dfrac{1}{1-(-2)}=\dfrac{1}{3}$；$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x}{x-1}$；

$f(x+1)=\dfrac{1}{1-(1+x)}=-\dfrac{1}{x}$；$f(f(x))=\dfrac{1}{1-f(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$.

任务 3 分段函数

在实际问题中，有些函数对于其定义域内自变量取不同的值时，不能用一个数学表达式表示，而是把定义域分成若干部分，函数关系用不同的式子分段表达，这样的函数称为分段函数.

如符号函数，$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 和 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 都是定义在（$-\infty$，$+\infty$）上的分段函数，如图 1-1 和图 1-2 所示.

★ 注 意 分段函数是由几个关系式合起来表示的一个函数，而不是几个函数. 对于分段函数要分段表达，分段画图，它的定义域是各段自变量取值的并集.

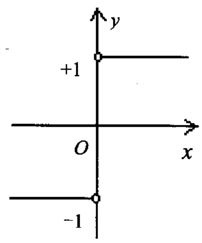

图 1-1

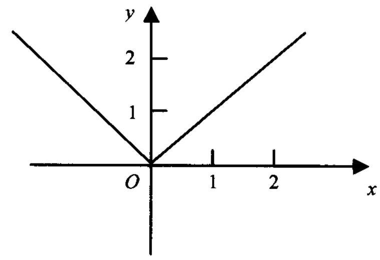

图 1-2

例 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & -2<x<0\\ 1 & x=0\\ 2x & 0<x<3\end{cases}$$，求定义域及 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ 的值.

解： 定义域为 $(-2,0)\cup\{0\}\cup(0,3)=(-2,3)$，

$f(-1)=1^2=1$，$f(0)=1$，$f(1)=2\cdot 1=2$.

任务 4 隐函数

用解析式表示函数关系，通常有两种形式．一种是把 y 直接表示成自变量 x 的函数 $y=f(x)$，$x\in D$，称为显函数；另一种是函数 y 与自变量 x 的关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定，称为隐函数.

例如：方程 $e^x+e^y=xy$ 和 $2x-y+1=0$ 所确定的都是隐函数.

有些隐函数可以化成显函数有些则不能．把一个隐函数化成显函数，称为隐函数的显化．如：$2x-y+1=0$ 可以化为 $y=2x+1$，而 $e^x+e^y=xy$ 不能显化.

1.2 技能 2 函数的性质

任务 1 函数的奇偶性

定义 1 设 I 为关于原点对称的区间，如果对于任意 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数，若 $f(-x)=-f(x)$，则称为 $f(x)$ 奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

任务 2 函数的单调性

定义 2 若对于区间 I 内任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少．单调增加或单调减少的函数，统称为单调函数，使函数保持单调的自变量的区间称为单调区间．如果一个函数 $y=f(x)$ 满足当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），那么 $y=f(x)$ 就是不减（或不增）的函数.

任务 3 函数的周期性

定义 3 若存在不为零的实数 T，使得对于任意 $x\in I$，有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 是它的周期.

若T是周期函数$f(x)$的周期，则对任意整数n，nT一定也是$f(x)$的周期．因此，周期有无穷多个，满足等式$f(x+T)=f(x)$的最小正数T就是最小正周期．通常所说的周期指的是最小正周期．

如$f(x)=\sin x$，$f(x+2\pi)=\sin x$，…，$f(x+2n\pi)=\sin x$，即$2n\pi$（$n=0$、± 1、$\pm 2\cdots$）都是$f(x)=\sin x$的周期，但是最小正周期是$T=2\pi$．对于$y=\cos x$也是以2π为周期的周期函数，而$y=\tan x$，$y=\cot x$是以π为周期的周期函数．

注意 （1）并非所有周期函数都有最小正周期．

（2）周期T是一个与n无关的量．

任务 4 函数的有界性

定义 4 若存在正数M，使得在区间I上，对任意$x\in I$，有$|f(x)|\leqslant M$，则得$f(x)$在I上有界，$f(x)$是I上的有界函数．如$y=\cos x$在（$-\infty$，$+\infty$）内是有界的，因为存在$M\geqslant 1$，对于任意x，有$|\cos x|\leqslant M$.

注意 如果一个函数在I上有界，则界不是惟一的，但一定存在最小的界．函数是否有界与定义域有关．如$y=\frac{1}{\pi}$在（0，2）内无界，但在（0.1，2）内有界．

例 1 判别下列函数的奇偶性．

（1）$f(x)=2^{x}+2^{-x}$；　　（2）$g(x)=x^2+x$；

（3）$\varphi(x)=\lg\frac{x+1}{x-1}$　（$|x|>1$）　x的绝对值．

解：（1）$f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^{x}=f(x)$，故$f(x)=2^{x}+2^{-x}$是偶函数．

（2）$g(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x\neq g(x)$，故$g(x)=x^2+x$是非奇非偶函数．

（3）$\varphi(-x)=\lg\frac{-x+1}{-x-1}=\lg\frac{-(x-1)}{-(x+1)}=\lg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\lg\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}=-\lg\frac{x+1}{x-1}$，

故$\varphi(x)=\lg\frac{x+1}{x-1}$是奇函数．

例 2 验证函数$f(x)=x^2-1$在（0，$+\infty$）是单调增加的函数．

证：在区间（0，$+\infty$）内任取x_1，x_2且$x_1<x_2$，

那么$f(x_2)-f(x_1)=(x_2^2-1)-(x_1^2-1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$．　①

因为$0<x_1<x_2$，

所以$x_1+x_2>0$，$x_2-x_1>0$，

故$f(x_2)-f(x_1)>0$，

所以函数$f(x)=x^2-1$在（0，$+\infty$）是单调增加的函数．

涉及两个函数时，对于定义在对称区间上的函数，了解和掌握以下结论：

（1）两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

（2）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数；

（3）$f(x)+f(-x)$为偶函数；$f(x)-f(-x)$为奇函数．

1.3 技能 3 反函数与基本初等函数

任务 1 反函数

函数 $y=f(x)$ 表示自变量 x 与因变量 y 间的依赖关系. 其实，在很多情况下哪个变量为自变量也不是绝对的.例如,已知某种商品的价格为 p,当销售量为 q 时的销售收入为 R,则 $R=pq$,收入 R 是自变量 q 的函数；反之若已知销售收入 R 求销售量 q，则 $q=R/p$，销售量 q 是自变量 R 的函数. 我们把 $q=R/p$ 叫做 $R=pq$ 的反函数.

定义 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 M，若对 M 中的任意一个 y 值，都有惟一确定的 x 值使得 $y=f(x)$ 成立，则得到一个定义在 M 上以 y 为自变量 x 为因变量的函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称 $y=f(x)$ 为直接函数.

习惯上用 x 表示自变量，于是用 $y=f^{-1}(x)$ 表示 $y=f(x)$ 的反函数，且二者的图形关于直线 $y=x$ 对称.

显然，单调函数一定有反函数.

求反函数的方法：

（1）确定直接函数 $y=f(x)$ 的值域为反函数的定义域；

（2）从解析式中求出 x，即 $x=f^{-1}(y)$；

（3）互换 x、y，得到 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 表达式. 应注意写出它的定义域.

任务 2 基本初等函数

基本初等函数包括六大类函数：

（1）常数函数：$y=c$；

（2）幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为任意实数)；

（3）指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq 1$)；

（4）对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$，$a\neq 1$)；

（5）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

（6）反三解函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这些函数，中学都已学过，在这里，我们将系统地讨论它们的定义域、值域和函数的性质.

1. 常熟函数 $y=c$

定义域：$(-\infty,+\infty)$

值域：$\{c\}$

图形：经过点（O，c）平行于 x 轴的一条直线；是偶函数，如图 1-3 所示.

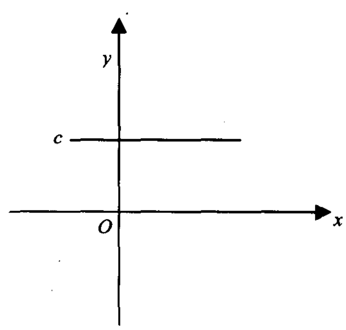

图 1-3

2. 幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）

定义域与 α 有关，下面分 $\alpha>0$，$\alpha<0$ 来讨论.

当 $\alpha>0$ 时，图形通过原点（0，0）和点（1，1)，在（0，$+\infty$）内单调增加且无界；

当 $\alpha<0$ 时，图形不过原点，但仍通过点（1，1)，在（0，$+\infty$）内单调减少，无界，曲线以 x 轴为渐近线.

3. 指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）

定义域：$(-\infty, +\infty)$

值域：$(0, +\infty)$

图形通过（0，1）点，当$a>1$时，函数单调增加，以x轴负半轴为渐近线；当$0<a<1$时，函数单调减少，以x轴正半轴为渐近线，非奇非偶函数且无界.

4. 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）

定义域：$(0, +\infty)$

值域：$(-\infty, +\infty)$

图形全部在y轴右方，经过点（1，0），当$a>1$时，函数单调增加且无界，曲线以y轴负半轴为渐近线；当$0<a<1$时，函数单调减少且无界，曲线以y轴为渐近线.

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）和指数函数 $y=a^x$（$d>0$，$a\neq1$）互为反函数，二者的图形关于 $y=x$ 对称.

常见的对数：

自然对数：以 e=2.718 281 8…为底的对数，$y=\log_e x=\ln x$.

常用对数：以 10 为底的对数，$y=\log_{10} x=\lg x$，它们是微积分中常用的函数.

5. 三角函数包括 6 个函数

（1）正弦函数 $y=\sin x$；

（2）余弦函数 $y=\cos x$；

（3）正切函数 $y=\tan x$；

（4）余切函数 $y=\cot x$；

（5）正割函数 $y=\sec x$；

（6）余割函数 $y=\csc x$.

★注意 x是自变量，代表角的弧度数.

表 1-1 所示为三角函数的定义域、值域、奇偶性、周期性、是否有界.

表 1-1 三角函数

三角函数	定义域	值域	奇偶性	周期性	是否有界
$y=\sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	奇	2π	有界
$y=\cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	偶	2π	有界
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in z$	$(-\infty, +\infty)$	奇	π	无界
$y=\cot x$	$x\neq k\pi$，$k\in z$	$(-\infty, +\infty)$	奇	π	无界

6. 反三角函数常见有 4 种

（1）反正弦函数 $y=\arcsin x$；

（2）反余弦函数 $y=\arccos x$；

（3）反正切函数 $y=\arctan x$；

（4）反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\, x$.

它们是相应三角函数在某区间的反函数定义出来的；反三角函数的自变量代表函数值，函数值代表相应的角的弧度数.

表 1-2 所示为反三角函数的定义域、值域、奇偶性、是否有界、单调性.

表 1-2　反三角函数

反三角函数	定义域	值域	奇偶性	是否有界	单调性
$y=\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	奇	有界	增
$y=\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	非奇非偶	有界	减
$y=\arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	奇	有界	增
$y=\mathrm{arc}\cot x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$	非奇非偶	有界	减

1.4　技能 4　初等函数

任务 1　复合函数

在现实中，我们常会遇到由几个基本初等函数组合而成的较为复杂的函数.

例如，设有幂函数 $y=u^2$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$，而三角函数 $u=\cos x$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 可以看出，当取 $x\in(-\infty, +\infty)$ 时，函数 $u=\cos x$ 的全部函数值都能使函数 $y=u^2$ 有定义，即当 $x\in(-\infty, +\infty)$ 时，通过变量 u，函数 y 都有确定的值与之对应，所以变量 y 是 x 的函数. 这个函数可能通过把 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 而得到，即 $y=\cos^2 x$. 也就是说，函数 $y=\cos^2 x$ 可以看作是由幂函数 $y=u^2$ 与函数 $u=\cos x$ 组合而成的，它的定义域与 $u=\cos x$ 的定义域相同，为 $(-\infty, +\infty)$.

又如，设有对数函数 $y=\ln u$，定义域为 $(0, +\infty)$，而 $u=x-10$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 可以看出，当 $x\in(10, +\infty)$ 时，函数 $u=x-10$ 的全部函数值都是正数，显然使函数 $y=\ln u$ 有定义，但当 $x\in(-\infty, 10)$ 时，函数 $u=x-10$ 的全部函数值都是负数，不能使函数 $y=\ln u$ 有定义，所以当 $x\in(10, +\infty)$ 时，通过变量 u，函数 y 都有确定的值与之对应，所以变量 y 是 x 的函数，这个函数可以通过把 $u=x-10$ 代入 $y=\ln u$ 而得到，即 $y=\ln(x-10)$. 也就是说 $y=\ln(x-10)$ 可以看成是由对数函数 $y=\ln u$ 与函数 $u=x-10$ 组合而成，它的定义域为 $(10, +\infty)$，只是 $u=x-10$ 的定义域的子集.

定义 1　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，$x\in A$，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域是 $y=f(u)$ 的定义域的子集，则变量 y 通过变量 u，都有确定的 $y=f(u)$ 与 x 对应，那么 y 是 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 u 叫中间变量，其定义域为函数 $u=\varphi(x)$ 定义域 A 的子集. $y=f(u)$ 为外层函数，$u=\varphi(x)$ 为内层函数.

根据上述定义可知 $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 复合而成；函数 $y=\ln(x-10)$ 是由 $y=\ln u$ 与 $u=x-10$ 复合而成.

★注意　(1) 不是任意两个函数都可复合为一个函数，如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$，就不能构成 x 的复合函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$，而 $u=x^2+2$ 的值域为 $[2, +\infty]$ 不是 $y=\arcsin u$ 定义域的子集.

(2) 复合函数可以有多个中间变量，一般用 u，v 表示中间变量名.

任务 2 初等函数

定义 2 由基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除四则运算或有限次复合步骤构成的并能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如：$y=1+x^2$，$y=\sin 2x$，$y=xe^x$，$y=\ln(\ln x)$ 等都是初等函数．但 $y=x\cdot x^2\cdot x^3\cdot\cdots\cdot x^n\cdot\cdots$ 不是初等函数．分段函数一般不是初等函数.

由于分段函数 $y=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 能化为 $y=\sqrt{x^2}$，它是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成，所以它是初等函数.

双曲函数是初等函数.

双曲正弦：$y=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，定义域为 R，是 R 上增的奇函数，值域为 R.

双曲余弦：$y=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，定义域为 R，是 R 上偶函数，值域为 $[1，+\infty]$.

双曲正切：$y=\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，定义域为 R，是 R 上增的奇函数，值域为 $(-1，1)$.

例 1 将下列函数表示成复合函数.

（1）$u=x^2-1$，$y=\ln u$；

（2）$u=x^2$，$y=\sin u$；

（3）$u=\sin x$，$y=u^2$；

（4）$v=x-1$，$u=v^2$，$y=\ln u$．

解：把中间变量代入函数，即得：

（1）$y=\ln(x^2-1)$，定义域为：$(-\infty，-1)\cup(1,+\infty)$；

（2）$y=\sin(x^2)$，定义域为：$(-\infty，+\infty)$；

（3）$y=(\sin x)^2=\sin^2 x$，定义域为：$(-\infty，+\infty)$；

（4）$y=\ln(x-1)^2$，定义域为：$\{x|x\neq 1\}$．

例 2 把下列复合函数分解.

（1）$y=\arcsin(x-1)$；

（2）$y=e^{(\sin x)^2}$．

解：（1）设 $u=x-1$，$y=\arcsin(x-1)$ 是由 $y=\arcsin u$，$u=x-1$ 复合而成，定义域为 $[0，2]$.

（2）设 $u=(\sin x)^2$，$y=e^{(\sin x)^2}$ 是由 $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 三个函数复合而成，定义域为 $(-\infty，+\infty)$.

例 3 判断下列函数是否为初等函数.

（1）$y=1+x+x^2+x^3+\cdots+\cdots$；

（2）$y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$．

解：（1）不是初等函数，因为不是有限次运算；

（2）是分段函数，且不能用一个表达式表示，所以不是初等函数.

1.5 本章小结

本章在理解定义时，要注意它的对应关系，其次要掌握函数的两要素：定义域和对应关系. 对照函数定义，常量 $y=c$ 是多对一的函数，将以前单值一对一对应进行引伸. 函数是微积分的主要研究对象，函数的定义、定义域、值域、反函数等概念以及六种基本初等函数的定义、定义域、图形和性质等内容，在中学都已讲过，本章是将以前所学知识作系统回顾，并作适当加深，使学生对初等函数形成比较完整的概念，为学习定积分奠定良好基础. 分段函数是一个函数而不是几个函数. 复合函数的概念不易理解，特别是函数定义域不太好求，在教学中需加强这方面练习.

1.6 提高与练习

1. 填空题

（1）若 $f(x-2)=x^2-2x+3$，则 $f(x)=$__________，$f(x+2)=$__________.

（2）函数 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的定义域为__________.

（3）函数 $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ 的定义域为__________.

（4）函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域为__________.

（5）函数 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\sqrt{x-1}$ 的定义域为__________.

（6）函数 $y=f(u)$ 的定义域为（0，1），则 $f(\lg x)$ 定义域为__________.

（7）函数 $y=\begin{cases}2+x & (x\leqslant 0)\\ x & (x>0)\end{cases}$ 的定义域为__________.

（8）$f(x)=2^x+1$ 的反函数为__________.

（9）$f(x)=2x^2+2x-4$，则 $f(x^3)$ =__________ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$__________ $f(a+b)$ =__________.

（10）函数 $y=\log_2(\arctan\sqrt{1+x^2})$ 的复合过程为__________.

2. 选择题

（1）已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f(-2)=10$，那么 $f(2)=$（　　）.

A. –26　　B. −18　　C. −10　　D. 10

（2）$f(x)=\sin x+\cos x$ 的奇偶性为（　　）.

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数

（3）$y=\sin^2 x$ 是（　　）.

A. 周期为 2π 的偶函数　　B. 周期为 2π 的奇函数

C. 周期为 π 的偶函数　　D. 周期为 π 的奇函数

（4）函数 $f(x)=\lg\left(\dfrac{2}{1+x}-1\right)$ 的图形（　　　）.

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称

C. 关于原点对称　　D. 关于直线 $y=x$ 对称

（5）下列（　　　）是无界的.

A. $y=\sin x+1 \quad x\in \mathrm{R}$　　B. $y=-\dfrac{1}{x} \quad x\in[0,\ 2]$

C. $y=\sqrt{x} \quad x\in[0,\ 4]$　　D. $y=\ln x \quad x>0$

3. 分解下列复合函数

（1）$y=\ln(\sin x)$；　　（2）$y=e^{x+1}$；

（3）$y=\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$；　　（4）$y=\sin[(2x)^2]$；

（5）$y=\ln(\ln x)$；　　（6）$y=\sqrt{\sqrt{x}}$.

4. 将下列函数表示成复合函数

（1）$y=u^2$，$u=\ln x$；　　（2）$y=\ln u$，$u=x^2$；

（3）$y=\sin x$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2-1$；　　（4）$y=2^u$，$u=x^2-1$.

5. 下列函数是否为同一函数

（1）$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；　　（2）$y=\dfrac{1}{x+1}$ 与 $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$；

（3）$y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$.

6. 证明题

（1）证明 $y=\lg x$ 在（0，$+\infty$）上的单调性.

（2）证明函数 $y=\dfrac{ax-b}{cx-a}$ 的反函数是其本身.