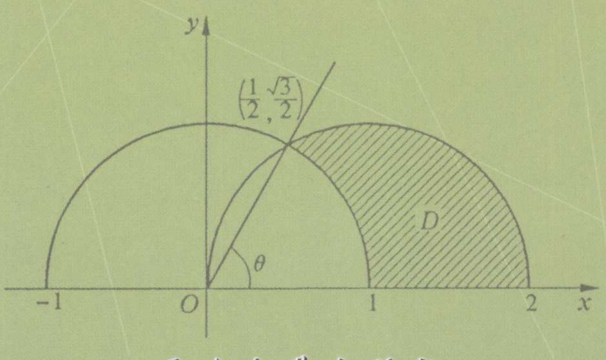
21世纪高职高专规划教材

高等数学

（下册）

GAO DENG SHU XUE

张曙光 田德宇 主编



西北大学出版社

21世纪高职高专规划教材

高等数学

（下 册）

张曙光 田德宇 主 编

西北大学出版社

内容提要

本书分为上、下两册，上册包含函数与极限、函数的连续性与函数的可导性、函数的可微性与微分、函数的可积性与定积分、函数与定积分的应用；下册包含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分、无穷级数、微分方程等内容.带“*”的章、节可以根据需要进行取舍.习题大多以基本概念与基本方法为主，是学生必须掌握的；部分习题有一定难度，综合性较强，能较好地适应学生进一步深造的需要.书末附有习题答案或提示，便于教师和学生参考.

本书可作为高等院校相关专业的高等数学教材，亦可作为自学和数学爱好者的参考教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/张曙光，田德宇主编/—西安：西北大学出版社，2007.8

ISBN 978-7-5604-2340-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②田… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 119374 号

高等数学

出版发行：西北大学出版社
地　　址：西安市太白北路 229 号
经　　销：全国新华书店
印　　刷：黄委会勘测规划设计研究院印刷厂
开　　本：890×1240 毫米　1/32
字　　数：590 千字
印　　张：20.625
版　　次：2007 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：(上下册)45.00 元　(本册)22.20 元

前　言

高等数学(上、下册)是根据全日制大学专科教学大纲以及教育部颁发的“专升本”入学考试的基本要求编写的.

本书尽可能做到概念清楚,重点突出,条理清晰,文字准确,通俗易懂,并与初等数学紧密衔接,便于教师讲解和学生学习;同时,注重运算能力的培养,通过对大量例题的讲解,帮助学生加深对基本内容的理解,提高其解决问题的能力;在内容的安排上,对枝节问题避免冗长的叙述,贯彻“少而精”和“够用”的原则.书末附有习题答案或提示,以便于教师和学生参考.

上册包含函数与极限、函数的连续性与函数的可导性、函数的可微性与微分、函数的可积性与定积分、函数与定积分的应用;下册包含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分、无穷级数、微分方程等内容.

需要指出的是,带“*”的章、节可以根据开课专业的需要进行取舍.习题大多以基本概念与基本方法为主,是学生必须掌握的;部分习题则有一定难度,综合性较强,希望能较好地适应学生进一步深造的需要.

本书由焦作师范高等专科学校张曙光、漯河职业技术学院田德宇任主编;由焦作建筑经济学校焦留旺、焦作师范高等专科学校杨秀芹、李中方、刘瑞华、任勤任副主编;由焦作师范高等专科学校朱青堂、李长武、焦作建筑经济学校梁栋、漯河职业技术学院张和平任编委.全书由张曙光、田德宇负责统稿工作.

由于编者的水平有限,书中难免有疏漏和不当之处,敬请广大读者指正.

编　者

2007年3月

目　录

第 8 章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中,通过坐标法把平面上的点与一对有序实数建立了对应关系,从而把平面上的图形和方程对应起来,这样就可以利用代数的方法研究几何问题.

空间解析几何与平面解析几何一样,是通过空间坐标系,把空间的点与三个有序实数建立对应关系,把空间的曲面和曲线用相应方程表示,从而就可以用代数方法研究空间几何问题.

正像平面解析几何知识对学习一元函数微积分是不可缺少的基础一样,空间解析几何知识对学习多元函数微积分也是必要的.

本章先建立空间直角坐标系,并引进在工程技术上有着广泛应用的向量.介绍向量的运算规律,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后讨论一些常用的二次曲面及空间曲线.

8.1　空间直角坐标

8.1.1　空间直角坐标系

研究空间图形和多元函数微积分,空间直角坐标系是不可缺少的重要工具.下面介绍空间直角坐标系.

我们知道,表示直线上的点,只需要一个数,这就是数轴上点的坐标,表示平面上的点需要两个有序实数,这就是平面上点的坐标,而表示空间的点,则需要三个有序实数,也就是说要用三个有序的实数才能确定空间点的位置.为此引出空间直角坐标系的概念.

空间直角坐标系规定如下:过一定点 O,作三条互相垂直有方向的

直线,其正方向为 Ox,Oy 与 Oz,分别称为 x 轴(横轴),y 轴(纵轴)与 z 轴(竖轴),统称为坐标轴,点 O 称为坐标原点.三个坐标轴其方向的配置按右手坐标系来确定(就是把右手的拇指、食指、中指伸成互相垂直的形状,拇指指向 Oz 的正向,食指指向 Ox 的正向,中指指向 Oy 的正向).在三个坐标轴上取相同的长度单位,这样就构成了空间直角坐标系 $Oxyz$(图 8－1),任意两个坐标轴所构成的平面叫坐标面,如 xOy,yOz 及 zOx 坐标面.

建立了空间直角坐标系以后,就可以建立空间点与数组之间的对应关系.

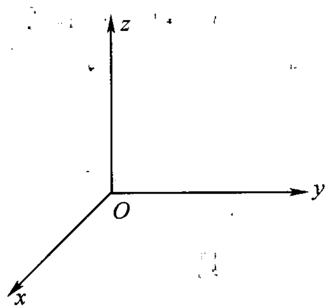


图 8－1

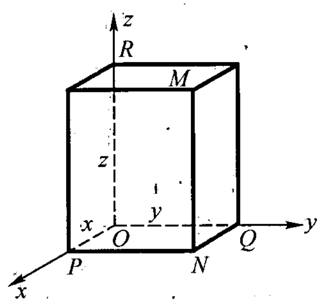


图 8－2

设 M 为空间内任一点,过点 M 做三个平面分别垂直三个坐标轴,相交于 P,Q,R(图 8－2),设 P,Q,R 三点分别在 x 轴,y 轴,z 轴上的坐标为 x,y,z,这样空间内任一点 M 和一组有序实数 x,y,z 对应.反之,设 x,y,z 为一组有序实数,则在 x 轴上取点 P,使它的坐标为 x,在 y 轴上取点 Q,使它的坐标为 y,在 z 轴上取点 R,使它的坐标为 z,过 P,Q,R 分别作平面与 x 轴,y 轴,z 轴垂直,它们相交于唯一的一点 M.由此可见,任何一组有序实数 x,y,z 唯一地确定空间一点 M.所以取定坐标系以后,就建立起空间的点 M 和一组有序实数 x,y,z 之间的一一对应关系,把 x,y,z 叫做点 M 的坐标,用记号 $M(x,y,z)$ 表示.其中,称 x 为它的横坐标,y 为纵坐标,z 为竖坐标.

三个坐标面把空间分成八部分,每一部分叫做一个卦限,其顺序规

定如图8-3所示.不同卦限内的点、坐标面及坐标轴上的点,其坐标都有自己的特征.例如点 $M(x,y,z)$ 在第一卦限,则 $x>0,y>0,z>0$;点 $M(x,y,z)$ 在第八卦限,则 $x>0,y<0,z<0$;若点 $M(x,y,z)$ 在 xOy 面上,则 $z=0$;在 yOz 面上,则 $x=0$;在 zOx 面上则 $y=0$.若点 $M(x,y,z)$ 在 x 轴上,则 $y=z=0$;在 y 轴上,则 $x=z=0$;在 z 轴上,则 $x=y=0$.

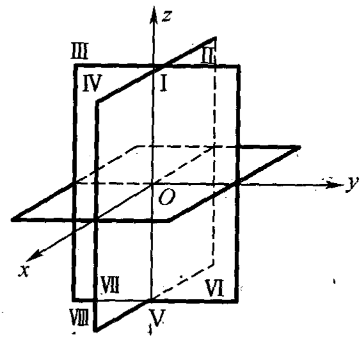


图8-3

8.1.2　空间两点间的距离

设空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$,求这两点间的距离 d. M_1, M_2 两点在 xOy 坐标面上的垂足分别为 m_1 和 m_2.过 M_1 作 M_1M_3 平行于 m_1m_2(图8-4),由于 $\triangle M_1M_3M_2$ 是直角三角形, $\angle M_1M_3M_2=\dfrac{\pi}{2}$,故由勾股定理得

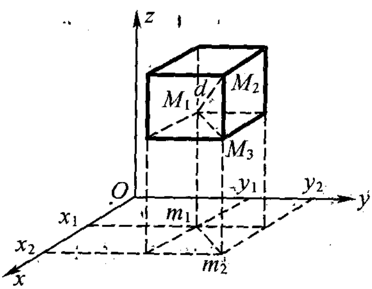


图8-4

$$d=\sqrt{|M_1M_3|^2+|M_3M_2|^2}=\sqrt{|m_1m_2|^2+|M_3M_2|^2},$$

由平面解析几何得

$$|m_1m_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

而 $\quad m_1M_1=m_2M_3=z_1, M_3M_2=m_2M_2-m_2M_3=z_2-z_1,$

于是有 $\quad |M_3M_2|^2=(z_2-z_1)^2.$

将 $|m_1m_2|^2$, $|M_3M_2|^2$ 代入上式得

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是用坐标计算两点间的距离公式.特殊地,点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 已知两点 $(-1,0,2)$,$(3,-2,4)$.求两点间的距离.

解 将坐标代入两点距离公式得

$$d=\sqrt{(3+1)^2+(-2-0)^2+(4-2)^2}=\sqrt{24}$$

例 2 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点在 z 轴上,所以设该点为 $M(0,0,z)$,由题意

$$|MA|=|MB|,$$

即
$$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2},$$

两端平方去掉根号,解得

$$z=\frac{14}{9}.$$

故所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

例 3 求证以 $M_1(4,3,1)$,$M_2(7,1,2)$,$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解
$$|M_1M_2|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14},$$
$$|M_2M_3|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6},$$
$$|M_3M_1|=\sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6}.$$

因为 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$,所以 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

习　题　8-1

1. 在空间直角坐标系中,定出下列各点的位置:$A(1,2,3)$,$B(-2,3,4)$,$C(2,-3,-4)$,$D(3,4,0)$,$E(0,4,3)$,$F(3,0,0)$.
2. xOy,yOz,zOx 坐标面上的点的坐标有什么特点?
3. x,y,z 轴上的点的坐标各有什么特点?

4. 求下列两点之间的距离：

(1) $(0,0,0),(2,3,4)$；　　(2) $(0,0,0),(2,-3,-4)$；

(3) $(-2,3,-4),(1,0,3)$；　　(4) $(4,-2,3),(-2,1,3)$.

5. 在 x 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

6. 试证明三点 $A(4,1,9),B(10,-1,6),C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

8.2　向量代数

8.2.1　向量的基本概念

在实际问题中所遇到的量可分为两种：一种是只有大小的量，叫做数量. 如时间、温度、距离、体积、质量等. 另一种是不仅有大小而且还有方向的量，这种量叫做向量. 如位移、速度、加速度、力等.

向量的表示法　向量可以用有向线段表示，有向线段的方向表示向量的方向，其长度表示向量的大小，叫做向量的模. 有向线段的起点和终点表示向量的起点和终点，如起点为 O，终点为 M 的有向线段所表示的向量用符号 $\overrightarrow{OM}$ 表示，它的模记为 $|\overrightarrow{OM}|$，它的方向是由 O 到 M 的方向，这就是向量的几何表达法. 如果没有必要表示向量的起点和终点，也要用带箭头的字母或黑体字母来表示向量，如 $\vec{a},\vec{b},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$；$\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\boldsymbol{A}|$ 来表示，如图 8－5.

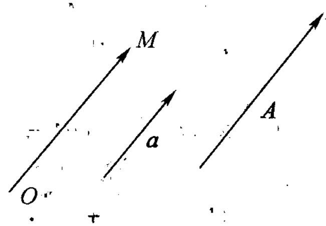


图 8－5

向量相等　如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，彼此平行且其指向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 注意两个向量不能比较大小.

自由向量　很多向量常常与起点无关，在保持长度和方向不变的条件下可以自由平移，称这种向量为自由向量. 通常在数学上我们研究与始点无关的自由向量，即只考虑向量的大小和方向，而不考虑它的始

点在什么地方.因此,一个向量,经过平行移动(即模和方向都不变的向量)后得到的向量,都认为是同一个向量.

逆向量 与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的逆向量,记为 $-\boldsymbol{a}$.

单位向量 模等于1的向量称为单位向量.

零向量 模等于零的向量称为零向量,记为 $\mathbf{0}$,零向量没有确定的方向,也可以说它的方向是任意的.

8.2.2 向量的加、减法、与数的乘法

1.向量的加法

在力学中若有两个力 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$,作用在质点 O 上,那么它们的合力就是以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 所表示的力.于是,我们规定向量的加法规则如下.

加法规则 两向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的和是以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线,即向量 $\overrightarrow{OC}$,记为

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

利用平行四边形的对角线求两向量和的方法叫做平行四边形法则.

从图8-6看出,$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$,所以以向量 $\overrightarrow{OA}$ 的终点为起点,作向量 $\overrightarrow{AC}$ 等于向量 $\overrightarrow{OB}$,连接 O,C,则向量 $\overrightarrow{OC}$ 等于 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 之和,即

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}.$$

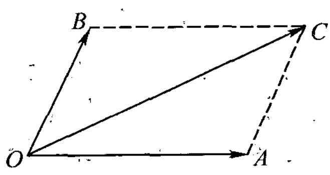


图8-6

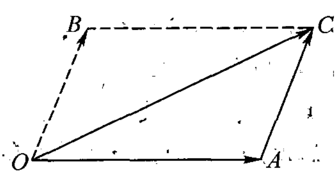


图8-7

如图8-7,以第一个向量 $\overrightarrow{OA}$ 的终点为起点,作第二个向量 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$,连接 OC,则 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 两向量的和,这种求两向量和的方法叫做三角形法则.这个法则可以推广到多个向量求和.例如求三个向量 $\boldsymbol{a}$,

$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的和时，可将相加的各向量平行移动，使首尾相接，然后以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点作向量，该向量即为所求的三个向量的和，如图 8－8.

向量加法满足以下的运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，　　(交换律)

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，　　(结合律)

(3) $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$，

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$.

2. 向量的减法

向量的减法可作为加法的逆运算. 若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即将 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平移使它们的起点重合，则由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图 8－9）.

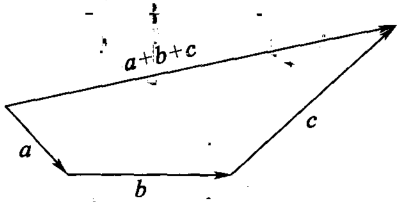


图 8－8

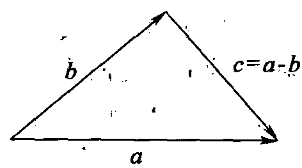


图 8－9

事实上，由向量加法可知

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a},$$

于是

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

3. 数与向量的乘积

数量 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$.

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\lambda|$ 的乘积，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反向；$\lambda=0$ 时，它是零向量.

数量与向量的乘积满足以下规律：

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$，　　(结合律)

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，　　(对数量的分配律)

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$, (对向量的分配律)

其中 λ,μ 为实数.

把与 $\boldsymbol{a}$ 同向,模为 1 的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$.显然有

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\text{或 }\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

8.2.3 向量在轴上的投影

为了用数量研究向量,需要建立向量与有序数组之间的对应关系,为此讨论向量在轴上的投影.

设向量$\overrightarrow{AB}$与轴 L 正向间的夹角为$\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$,过 A 点和 B 点分别作平面垂直于轴 L,这两个平面与 L 轴的交点 A_1 和 B_1 分别称为点 A 和点 B 在轴上的投影(图 8-10).在 L 轴上的有向线段$\overline{A_1B_1}$的"值",记为 A_1B_1.A_1B_1 是一个实数,当$\overline{A_1B_1}$与 L 的指向相同时,它的值 A_1B_1 为正,否则为负.

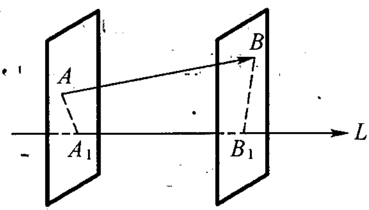


图 8-10

定义 有向线段$\overline{A_1B_1}$的值 A_1B_1,叫做向量$\overrightarrow{AB}$在 L 轴上的投影,记为

$$\mathrm{prj}_L\overrightarrow{AB}=A_1B_1,$$

轴 L 叫做投影轴.

由图 8-11 可看出,向量$\overrightarrow{AB}$在轴 L 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角余弦,即

$$\mathrm{prj}_L\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

事实上,通过向量$\overrightarrow{AB}$的起点A引轴 L' 使之与轴L平行,且有相同的正方向,则轴 L' 和向量$\overrightarrow{AB}$ 间的夹角等于轴 L 和$\overrightarrow{AB}$ 间的夹角 φ.且有

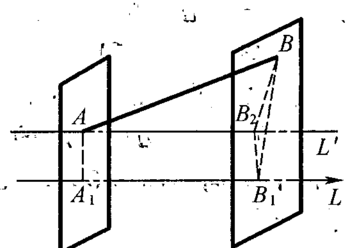


图 8-11

$$\text{prj}_L \overrightarrow{AB} = \text{prj}_{L'} \overrightarrow{AB}$$

由图 8 - 11 知

$$\text{prj}_{L'} \overrightarrow{AB} = AB_2 = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi,$$

所以　$$\text{prj}_L \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

向量在轴上的投影是一个数量，当 φ 为锐角时，投影为正；当 φ 为钝角时，投影为负；当 φ 为直角时，投影为 0. 容易看出，相等的向量在同一轴上的投影相等.

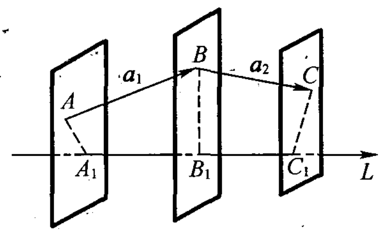


图 8 - 12

由图 8 - 12 可看到两个向量 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 的和在 L 轴上的投影

$$\begin{aligned}\text{prj}_L(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) &= A_1C_1 \\ &= A_1B_1 + B_1C_1 \\ &= \text{prj}_L\boldsymbol{a}_1 + \text{prj}_L\boldsymbol{a}_2.\end{aligned}$$

即两个向量的和在轴上的投影，等于这两个向量在轴上投影的和. 推广到 n 个向量的和的投影，得到

$$\text{prj}_L(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \text{prj}_L\boldsymbol{a}_1 + \text{prj}_L\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \text{prj}_L\boldsymbol{a}_n.$$

8.2.4　向量的坐标表示法

前面引进了向量概念及向量的一些运算，它们都需要画图表示，这对于向量的运算和应用极不方便. 为此，在引入向量投影的基础上，介绍向量的坐标，利用向量的坐标可以简化向量计算. 在空间直角坐标系的三个坐标轴的正向上，分别取三个单位向量，记为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，叫做基本单位向量，于是空间任意一个向量，先将该向量平移使其起点落在原点 O，终点为 M，则 $\overrightarrow{OM}$ 可以用这三个基本单位向量表示出来.

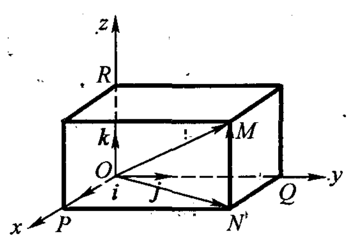


图 8 - 13

事实上,设点 M 的坐标为(x,y,z),过点 M 作三个平面,分别垂直于三个坐标轴,并相交于点 P,Q,R(图 8 - 13),即为点 M 在三个坐标轴上的投影,于是有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}.$$

由向量加法,得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

这就是向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示.而这组有序实数 x,y,z 叫做向量$\overrightarrow{OM}$ 的坐标,记为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}.$$

我们把$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 分别叫做向量$\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的分向量;也称 $x(y,z)$ 为向量$\overrightarrow{OM}$ 的横(纵、竖)坐标.

向量的模 向量可以用坐标表示,因此向量的两个要素 —— 模和方向,也能用坐标表示.向量$\overrightarrow{OM}$ 的模$|\overrightarrow{OM}|$就是线段$\overline{OM}$ 的长度(图 8 - 14),由两点距离公式得到

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

即向量的模等于向量的坐标的平方和再开方.

方向余弦 我们用向量与三个坐标轴的夹角来确定向量的方向.设$\overrightarrow{OM}$ 与三个坐标轴的夹角分别为α,β,γ(图 8 - 14),并规定$0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$,称$\alpha,\beta,\gamma$ 为$\overrightarrow{OM}$ 的方向角.因用坐标计算方向角比较复杂,改用方向角的余弦表示向量的方向,又方向角都在 0 到 π 之间,故当方向余弦确定了,方向角也就唯一确定,从而向量的方向也就确定了.

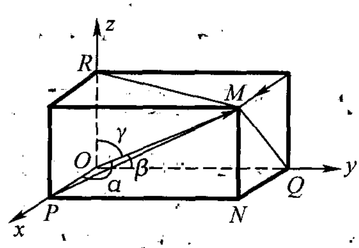


图 8 - 14

由图 8 - 14 我们得到

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

把 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 叫做向量$\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦.

直接验证可得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

即任何向量的方向余弦的平方和恒等于1.

前面我们给出向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量可表示为

$$\boldsymbol{a}^\circ = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

设$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a}$,于是 $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{a}^\circ = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{x}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{i} + \frac{y}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{j} + \frac{z}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{k}$$

$$= \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k},$$

因此,$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦就是$\boldsymbol{a}^\circ$ 的坐标,即

$$\boldsymbol{a}^\circ = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

方向数　与方向余弦成比例的一组实数 l, m, n,即

$$\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{m}{\cos\beta} = \frac{n}{\cos\gamma},$$

称为向量的方向数.

由方向数的定义可知,向量的方向数不是唯一的.

利用向量的坐标,很容易将两向量的加减运算及数量与向量的乘积运算,化为向量的代数运算.

设 $\overrightarrow{OM_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$,

$\overrightarrow{OM_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$,

则

$$\overrightarrow{OM_1} \pm \overrightarrow{OM_2} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \pm (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k})$$

$$= (x_1 \pm x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 \pm y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 \pm z_2)\boldsymbol{k}.$$

$$\lambda\overrightarrow{OM_1} = \lambda(x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) = \lambda x_1\boldsymbol{i} + \lambda y_1\boldsymbol{j} + \lambda z_1\boldsymbol{k}.$$

由此可见,对向量进行加、减、与数量相乘,只需对向量的各个坐标