信号与系统

（第二版）

徐天成　谷亚林　钱　玲　编著

哈尔滨工程大学出版社

再版前言

本书是由徐天成等编著的“信号与系统”课程教材的第二版。它是在第一版应用实践的基础上，通过对国内外许多大专院校的广泛调研和相互交流，并结合广大读者与专家意见修订而成的。它又是南京理工大学重点建设课程“信号与系统”的一个重要组成部分，也是进行“电路”、“信号与系统”和“控制工程基础”等电类学科基础教学整合优化的必要措施。同第一版相比，教学目的、教学要求及教学内容基本相同，但前后内容次序的衔接上有所调整，此外部分内容有所增删。

“信号与系统”课程是通信工程、电子信息工程、自动化以及计算机等专业的一门重要的专业基础课程。它主要研究确定性信号和线性时不变系统的基本概念与基本理论，包括信号的频谱分析以及确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本分析方法。在体系安排上，采用从时间域到变换域(频域、复频域(s 域或 z 域))、从连续到离散、从输入输出分析法到状态变量分析法的内容编排结构，力求用统一的观点阐明基本概念和方法。

“电路”、“信号与系统”和“控制工程基础”是通信工程、电子信息工程及自动化等电类专业的三大重点技术基础课程。这三门课程从大二的上学期开始，按照以上次序被安排在连续的三个学期内授课，以往这三门课程部分教学内容重复，既浪费了时间，又淡化了每门课程各自的特色。为了使这三门课程既保持相互独立、各有特色、又融会贯通，在系统性、完整性、科学性和教学适用性方面高度有机结合，构成结构严谨、整体和谐、体系科学、学生欢迎的技术基础课系列课程，必须对这三门课从教学内容及课程体系上进行有机整合。因此，我们在修订“信号与系统”教材时考虑了以上因素，删除了教材上与另两门课程重复的部分内容，如删除了第一版的第 3 章中系统对周期信号的响应一节(“电路”课程中详细分析过)。又如“控制工程基础”课程中全面而系统讲述的“系统稳定性”的概念也是“信号与系统”中不可缺少的组成部分，因此，在第二版中我们还是对稳定性的概念作了简单介绍，但将判定系统稳定性的准则放在附录中供参考。再如在第二版中删除了第 8 章中系统的可控性与可观性一节(属于“控制工程基础”课程的内容)。

此外，我们还考虑了目前课程学时的减少，教材也应相应地压缩，这样，还删去了非电系统的模拟、卷积积分的数字计算、希尔伯特变换、相关函数与功率谱、拉氏变换与傅氏变换的关系、周期信号与取样信号的拉氏变换、Z 变换与拉氏变换的关系以及状态方程的时域求解等内容。

由于“数字信号处理”课程是与“信号与系统”密切相关的一门后续课程，为了更好地与“数字信号处理”课程相衔接，在再版过程中，增加了模拟滤波器的基本概念与设计方法一节，这样可以为“数字信号处理”课程中学习数字滤波器的设计打好基础。

本书第二版的另一特色是在专业术语后标注了英文，这样为后续课程“数字信号处理”采用双语教学打下必要的基础。同时，在附录 F 中还列出了中英文对照的专业术语表，以供读者查阅。

此外，书中许多例题与习题也作了较大的修改。

全书仍包括 8 章。1 至 5 章讨论连续时间信号与系统，6 至 7 章讨论离散时间信号与系

统,第 8 章研究连续时间系统与离散时间系统的状态变量分析。

本书第二版由徐天成主编,第 1 章至第 3 章由徐天成执笔,第 4 章至第 5 章由钱玲执笔,第 6 章至第 8 章由谷亚林执笔。多年来作者与教研组的各位同事经常研讨,以及在授课过程中及时听取学生对教材的反馈意见,对本书的修订起到了很大的帮助。作者在此表示衷心感谢。

书中若有错误或不妥之处,恳请读者批评指正。

作 者

2004 年 10 月

于南京理工大学

目　录

第 1 章　信号与系统基本概念

1.1 引　论

“信号与系统”的理论和分析方法，潜在的和实际的应用范围不断地在扩大着，几乎渗透到各个科学技术领域之中。那么，什么是信号（signal），什么是系统（system）呢？又为什么要把信号与系统这两个概念联系在一起呢？这是应该首先必须弄清楚的问题。

“信号”来源于拉丁文“signum(记号)”一词，其含意甚广。“信号”这一术语不仅出现于科学技术领域之中，而且在日常生活之中每时每刻几乎都与信号打交道，人们对信号并不陌生。上课的铃声就是一种信号，火车、船舶的汽笛声，汽车的喇叭声也都是一种信号，这些都是声信号。道路交叉路口和铁路轨道旁设置的红绿灯光是一种信号，发射信号弹的闪烁亮光也是一种信号，这些都是光信号。收音机和电视机天线从天空中接收到的电磁波是个信号，它们每一级电路的输入、输出电压（voltage）或电流（current）也是信号，这都是电信号。除此之外，还有电视机和计算机显示器屏幕上的图像文字信号，交警指挥的手势信号，军舰使用的旗语信号等。所有这些五花八门的信号，虽然它们的物理表现形式各不相同，但是它们却存在两个共同特点。无论是声信号、光信号、电信号，还是其它形式的信号，其本身都是一种变化着的物理量，或者说是一种物理体现，这个特点是显而易见的。而另一个特点则表现为，信号都包含有一定意义，也就是说，信号载有被描述、记录或传输的消息所包含其中的信息（information）（消息和信息是两个不同概念，可参阅有关信息论的书籍。通常在不追究术语的严密性时，可将消息和信息视为等同概念）。上课的铃声信号，表示上课时间到了的信息；雷达荧光屏上的光点信号，表示有飞机出现的信息，生物细胞中 DNA 的结构图案信号，表示了一定的遗传信息等。因此我们可以说，信号就是用于描述、记录或传输的消息（或者说信息）的任何对象的物理状态随时间的变化过程。简单而言，信号就是载有一定信息（或消息）的一种变化着的物理量。也可说，信号就是载有一定信息的一种物理体现。信号是消息（或信息）的表现形式，消息（或信息）则是信号的具体内容。人们相互问讯、发布新闻、广播图像或传递数据，其目的都是要把消息（或信息）借助于一定形式的信号传递出去。

自古以来，人们就在不断地寻求各种方法，将信息（消息）转化为信号，以实现信息（消息）的传输、记忆与处理。我国古代利用烽火台的狼烟报警，希腊人利用火炬位置表示字母符号，就是利用光信号进行信息传递的早期范例。击鼓鸣金报送时刻或传达命令，是利用声信号进行信息传递的例证。以后出现了信鸽、驿站和旗语等传送信息（消息）的各种方法。然而，这些方法无论在距离、速度还是在有效性与可靠性方面，都没有得到较满意的解决。19 世纪初叶之后，人们开始研究如何利用电信号进行信息（消息）的传送，使人类在信息传输、记忆与处理等诸方面取得了显著的进步和满意的效果。1837 年，莫尔斯（F.B.Morse）发明了电报，使用点、划、空的适当组合构成了所谓的莫尔斯电码，以表示字母和数字。1876年，贝尔（A.G.Bell）发明了电话，直接将语音变换成电信号沿导线传递。19 世纪末，赫兹（H.Hertz）、波波夫（A.C.Попов）、马可尼（G.Marconi）等人研究用电磁波传送无线电信号问题。1901 年，

马可尼成功地实现了横跨大西洋的长距离无线电通信(即信息传输)。从此,传输电信号的通信方式得到了广泛的应用与迅速发展。现在,电话、电报、无线电广播、电视等利用电信号的通信方式,已成为我们日常生活不可缺少的内容和手段。不仅实现了遍绕地球的全球电信号通信,而且已实现了太阳系范围的电信号通信。还要指出,电信号与许多种非电信号之间可以比较方便地相互转换。上课电铃声的这种声信号和指挥交通的红绿灯这种光信号,都是由电信号控制和推动而得到的。作为声信号的语音通过话筒变换成电信号,放大之后推动扬声器又将其复原成语音信号,使之在较远处也能听到。景物图像的光信号通过电视摄像机变成电信号,电视发射台加工处理之后以电磁波形式辐射到空间,远处的电视接收机收到辐射的电磁波后再一次加工处理使之在电视机屏幕上显示原景物的图像信号。实际应用中常常将各种物理量,如声波动、光强度、机械运动的位移或速度等转换成电信号,以利于远距离的信息传输。经传输后在接收端再将电信号还原成原始的消息。

我们在本书中只研究电信号的各种特性和分析方法。所谓电信号(以后简称为信号),一般是指载有信息的随时间而变化的电压或电流,也可以是电容上电荷、线圈中的磁通及空间中的电磁波等电量。信号特性可以从两个方面来描述,一是时间特性,亦称为时域特性;二是频率特性,亦称为频域特性。信号是随时间而变化的电量,那么描述信号的数学表达式是时间的函数。绘出函数的图像称为信号的波形。波形表现出信号的时间特性,如信号出现的时间先后,持续的时间长短,重复周期的大小以及随时间变化的快慢等。信号的另一个特性是,任一信号总可以分解为许多不同频率的正弦分量,表现出信号具有一定的频率特性。如各频率的正弦分量之间相对大小,主要频率分量占有的范围即频带宽度等。信号的形式有所不同,就在于它们有各自的时间特性和频率特性。信号的时间特性与频率特性之间具有一定相互对应关系。不同的时域特性将导致不同的频域特性,这将在第3章频谱分析中详细讨论。随着问题的深入,需用其它正交变换的方式来描述和研究信号。

随着信号传输理论与技术的发展,信号处理的理论与技术亦迅猛发展。所谓信号处理可以理解为对信号进行某种加工或变换。加工或变换的目的在于削弱信号中多余的内容;滤除混杂的噪声和干扰;或者将信号变换成容易分析与识别的形式,便于估计或选择它的特征参量。近年来数字电子计算机的迅猛发展与广泛应用,更大大促进了信号处理的研究,使得信号处理的应用遍及许多科学技术领域。例如,月球探测器发来的电视信号可能被淹没在噪声之中,而利用信号处理技术就可以使有用的信号增强,在地球上得到清晰的图像。资源勘探、地震测量以及核试验监测中所得到的数据分析需要利用信号处理技术。信号处理还可以应用于心电图、脑电图的分析,语音或图像识别以及各种类型的数据通信等。信号传输与信号处理有着密切的联系,又是相对独立的学科体系。但它们共同的理论基础是信号分析与系统分析。信号与系统分析的理论研究将服务于解决信号传输与信号处理方面的理论与实际问题。

近代,人们在研究自然界、社会和思维规律时,普遍地引用系统的概念、理论和方法。从一般意义上来说,所谓系统是指一个由若干个相互联系、相互作用的单元(事物)组合而成的具有某种特定功能的整体。系统可以是太阳系、生态系统和动物神经组织等自然系统;也可以是计算机网、交通运输网和电力系统等人工系统。系统可以是生物系统、化学系统、政治体制系统和经济结构等非物理系统。本书只讨论无线电电子学领域中的电系统。

在无线电电子学领域中,常常利用通信系统、控制系统和计算机系统等进行信号的传输与处理。信号的传输与处理,要由许多不同功能的单元组合而成的一个复杂系统来完成。从

广义上来说，一切信息的传输过程都可以看作是通信，一切完成信息传输任务的系统称为信息传输系统，亦可称为通信系统，电话、电报、电视、雷达、导航等系统均属之。以电视系统来说，它所要传输的信息包含在配有声音的画面之中。传输这些画面时，先要借助电视摄像机把画面的光线彩色转换成图像信号，并利用话筒把声音转换成伴音信号，这些就是电视要传输的带有信号的原始信号。然后把这些信号送入电视发射机。它能够产生一种反映上述信号变化的便于传播的射频电视信号。最后，由天线将这个射频电视信号转换为电磁波发射出去，在空间传播。电视接收者用接收天线截获一小部分电磁波能量，它转换成射频信号送入电视接收机。接收机的作用正好和发射机相反，它能将送入的射频电视信号恢复出原有的图像信号和伴音信号，并把这两种信号分别送到显像管和喇叭，使接收者能看到传输的图面，并听到配有的伴音。这个信息传输过程，可以用图 1 – 1 所示的方框图表示。这个方框图也表

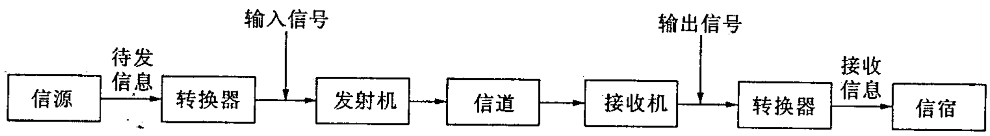


图 1 – 1　通信系统的组成

示了一般通信系统的组成。图中，信源是产生载有信息之消息(语言、文字、图像或数据等)的设备或人，输入转换器是把消息转换为信号，如摄像管、话筒之类；发射机是把输入转换器输出的信号转换成便于传输的另一种形式信号的装置。信道是指信号传输的通道，在有线电话中它是一对导线；在利用电磁波传播的无线电通信中它可用空间、卫星通信中的人造卫星，也可以是波导或同轴电缆；在近来的光通信中，它则是光导纤维。接收机是接收信道传输来的信号，并把它转换为能适宜于输出转换器工作的装置。从广义而言，发射机和接收机也可以看成是信道，因此也称它为信道机。输出转换器是将接收机输出的信号转换为消息的装置，如显像管、喇叭之类。转换器完成从一种形式的能量转换为另一种形式的能量这一工作，信宿是接收消息的装置或人。不同的通信系统可以有不同的信源和不同的信道而已。

构成系统的单元可小可大，可简可繁。如果将通信系统、控制系统、计算机系统与指挥系统共同组合而成一个繁杂的整体，则可以构成一个宇宙航行的综合系统。一个电阻和一个电容可以构成具有一定微分或积分功能的简单系统。通常，无线电电子学领域中系统的主要部件包括大量的、多种类的电路。电路亦称为网络。当研究一般性的抽象规律时往往用网络一词，而讨论一些指定的具体问题时常称之为电路。

在一定意义上，系统与电路(circuit)或网络(network)是同义词。电路和网络就是一个系统。系统所关心的问题是，对于给定的信号形式与传输、处理的要求，系统能否与之相匹配，系统为此而需要具有怎样的功能和特性。网络问题的着眼点在于，为实现系统的功能与特性，网络应具有怎样的结构，其各种参数如何确定。系统与网络的差异，主要体现在观察事物的着眼点或处理问题的角度方面。系统问题侧重注意全局，而网络问题则侧重关心局部。例如，仅由一个电阻和一个电容组成的简单电路，在网络分析中，注意研究其各支路、回路的电压或电流；而从系统的观点来看，可以研究它如何构成具有微分或积分功能的运算器。近年来，由于大规模集成电路技术的发展，各种极其复杂的网络系统可以直接做在一个很小的集成电路芯片上，使得系统、网络、电路以及器件之间的差别日益缩小，无需严格区分各名词之

差异。本书中,系统、网络与电路等名词通用。

信号与系统有着十分密切的联系。离开了信号,系统将失去意义;离开了信号,系统不会发生作用。信号是待传递消息的表现形式,是运载消息的工具;而系统则是为传输信号或对信号进行加工处理而构成的某种组合。也就是说,要产生信号,要对信号进行传输、处理、存储或转化,必定需要一定的物理装置,这种物理装置就是系统。从系统功能而言,系统就是一个转换器,它总是对某个特定的输入信号 $x(t)$ 变换成另一个输出信号 $y(t)$。为了方便地表示不同的系统,把输入输出信号之间的关系写成如下函数的形式

$$y(t) = T[x(t)] \tag{1-1}$$

式中,$x(t)$ 亦可称为激励;$y(t)$ 亦可称为响应;$T[\cdot]$ 可以看作是一种算子,不同系统对应不同算子。这样,系统可用图 1-2 所示的方框图表示。这里表示的是单输入单输出系统,复杂系统可以是多个输入多个输出的。系统的功能和特性,就是通过由怎样的激励产生怎样的响应来体现的。不同的系统具有各种不同的特性。

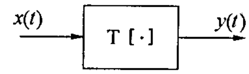


图 1-2　系统的方框图

近年来,随着计算机技术应用的迅速发展,系统仿真技术的日益进步,使系统的研究和信号的研究已经进一步融合起来了。本书不但将信号与系统这两个概念联系在一起,而且将信号分析与系统分析并重讨论。

1.2　信号的分类和典型信号

引论中指出,信号是随时间而变化的,它的数学表达式是时间的函数,这是信号的基本描述方法。当然,可以用它的函数图像即信号波形来表示。为了讨论方便,本书中常常把信号与函数两个术语视为同义词。除了时间表达式与波形这两个直观的信号描述方法之外,还可以用频谱分析或其它正交变换的方式来描述信号和研究信号。

本节首先介绍信号分类,然后介绍一些典型信号。

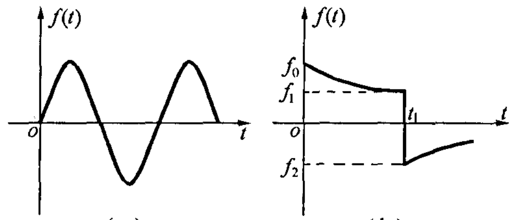
1.2.1　信号分类

信号种类很多,从不同角度可以有不同分类方法。

按分布性质不同,信号可以区分为**确定性信号**(deterministic signal) 和**随机信号**(random signal)。若信号能表示成为一个确定的时间函数,对于给定的某一时刻,有确定的函数值相对应,这种信号称为确定性信号或规则信号。例如,大家熟知的正弦信号,就是确定性信号。然而,实际传输的信号往往具有不可预知的不确定性,这种信号称为随机信号或不确定信号。语音信号就是一种随机信号,空中传来的噪音、电路元件中的热噪声电流都是随机信号的例子。随机信号在每一确定时刻上的取值难于确定,只能通过大量试验测出取某些值可能性的分布(概率分布)。这类信号是一种随机过程,它是统计无线电理论专门研究的对象。本书只讨论确定性信号的分析。确定性信号分析亦是随机信号分析的基础。

按函数自变量取值的连续性与否,信号可以区分为**连续时间信号**(continuous time signal) 和**离散时间信号**(discrete time signal)。如果对于所讨论的时间范围内,在任意时刻点上(除若干不连续点之外) 函数都有确定的值与之对应,这种信号就称为连续时间信号。例如,正弦信号和图 1-3 所示的信号等都是连续时间信号。而离散时间信号,在时间上是离散

的，它只在某些时间的离散点上给定函数值，而在其它时间上都没有定义。图 1－4 所示的信号，就是离散时间信号。离散时间信号，可以在均匀时间间隔上给出函数值，也可以在不均匀的时间间隔上给出函数值。本书采用在均匀时间间隔点上给出离散时间信号的函数值。



(a)　　(b)

图 1－3　连续时间信号

离散时间信号又可分为取样信号(sampling signal)与数字信号(digital signal)两种。其中，取样信号是指时间不连续、但幅度取值连续的离散时间信号；而数字信号是指时间不连续、幅度也不连续的离散时间信号。一般可将取样信号经量化后变为数字信号。与模拟信号相比，数字信号具有抗干扰能力强、传输精度高、保密性好等优点。

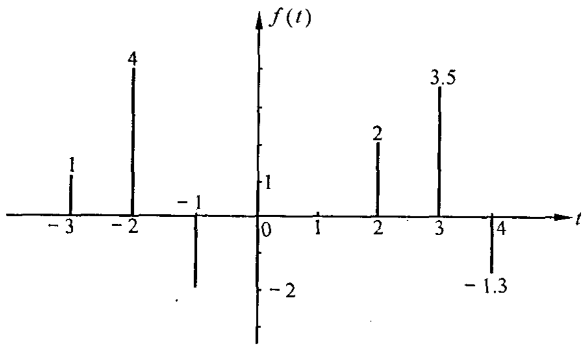


图 1－4　离散时间信号

按函数的周期性与否，信号可以区分为**周期信号**(periodic signal)和**非周期信号**(nonperiodic (aperiodic)signal)。如果对所有的 $t \in (-\infty, \infty)$ 存在一个最小的常数 T，使得

$$f(t) = f(t + nT) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1-2}$$

就称 $f(t)$ 是以 T 为周期的周期信号，否则就称为非周期信号。周期信号就是依一定时间间隔 T 周而复始，而且是无始无终的。只要给出此信号在任一周期内的变化过程，便确知它在任一时刻的数值。非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。若令周期性信号的周期 T 趋于无限大，则成为非周期信号。

按函数自变量数目不同，信号可以区分为**一维信号**(one-dimensional signal)和**多维信号**(multi-dimensional signal)。若信号只可以表示为时间 t 的函数，则这种信号是一维信号。一维信号的这种时间函数关系可以用数学表达式、波形图、数据表等方式来表达。$\sin t$、e^{-t} 等具体函数表达式可以表示信号，亦可用 $f(t)$、$x(t)$ 等抽象的函数表达式表示信号。对于一个函数，它的定义域是很重要的。用时间函数来表示的信号，其定义域就是信号存在时间范围。例如，$\cos t(-\infty < t < \infty)$ 和 $\cos t(t \geq 0)$ 就是两个信号，因为它们的时间范围不相同。为方便起见，以后，凡时间范围为 $-\infty < t < \infty$ 的，可以省略不写。也就是说，凡没有特别标明时间范围时，都认为 $t \in (-\infty, \infty)$。对应一维信号，还有二维信号、三维信号等多维信号。电视图

像信号是典型的三维信号 $f(x、y、t)$，即它是平面空间 x, y 和时间 t 的三维函数。多维信号可以采用扫描等措施变换成一维信号，电视图像信号就是这样。本书只讨论表示为时间函数的一维信号。

按信号的能量(energy) 和功率(power) 是否有限，信号可以区分为**能量信号**(energy singal) 和**功率信号**(power singal)。要知道信号的能量特性或功率特性，需研究信号(电压或电流) 在单位电阻上所消耗的能量或功率。信号 $f(t)$ 在单位电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$，在区间 $-T<t<T$ 的能量为

$$\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

在区间 $t\in(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ 的平均功率(average power) 为

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

信号能量定义为在区间 $(-\infty,\infty)$ 信号 $f(t)$ 的平均能量(average energy)，用字母 W 表示，即

$$W \triangleq \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-3}$$

信号功率定义为在区间 $(-\infty,\infty)$ 信号 $f(t)$ 的平均功率，用字母 P 表示，即

$$P \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-4}$$

若信号 $f(t)$ 是实函数，则其能量和平均功率的定义式可分别写为

$$W \triangleq \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{1-5}$$

$$P \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{1-6}$$

信号的能量 W 和平均功率 P 都是非负的实数。

若信号 $f(t)$ 的能量是有限的，即 $0<W<\infty(P=0)$，则称其为能量有限信号，简称为能量信号；若信号 $f(t)$ 的平均功率是有限的，即 $0<P<\infty(W=\infty)$，则称其为功率有限信号，简称为功率信号。

1.2.2 典型信号

下面，将给出一些常见的典型信号的表示式和波形。此处只介绍连续时间信号，而离散时间信号将在第 6 章中讨论。

1. 指数信号(exponential signal)

在信号与系统分析中，指数信号是重要的基本信号之一，它的表示式为

$$f(t) = Ae^{\alpha t} \tag{1-7}$$

式中，α 是实数。若 $\alpha>0$，则信号将随时间增大而增长，且 α 越大，增长速度越快。若 $\alpha<0$，则信号随时间增大而衰减，且 $|\alpha|$ 越大，衰减速度越快。当 $\alpha=0$ 时，信号不随时间而变化，称为直流信号。其波形如图 1－5 所示。

实际上，常见的指数信号是单边指数衰减信号，其表示式为

$$f(t) \doteq \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \tag{1-8}$$

式中，$\alpha > 0$。其波形如图 1－6 所示。

α 的倒数称为指数信号的时间常数（time constant），记作 τ，即

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \tag{1-9}$$

时间常数 τ 的含义是，若在 $t = 0$ 点，$f(0) = 1$，则在 $t = \tau$ 处，$f(\tau) = \frac{1}{e} = 0.368$。也就是说，经时间 τ，信号将衰减到初始值的36.8%。

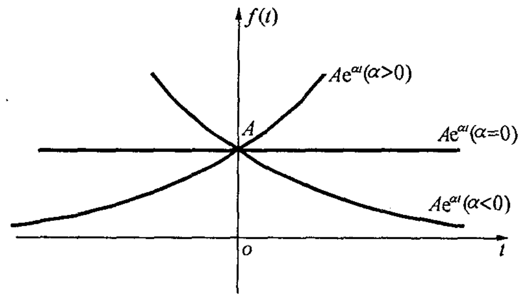


图 1－5　指数信号

2. 正弦信号（sine signal）

正弦信号与余弦信号（cosine signal），两者只是在相位上相差$\frac{\pi}{2}$，可以统称为正弦信号。其一般形式为

$$f(t) = A\sin(\omega t + \theta) \tag{1-10}$$

式中，A 为振幅（amplitude），ω 是角频率（angular frequency），θ 为初相位（initial phase）。上述三量是正弦信号的三要素。它的波形见图1－7。

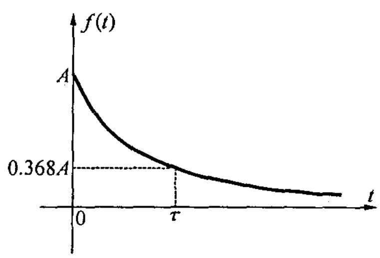


图 1－6　单边指数衰减信号

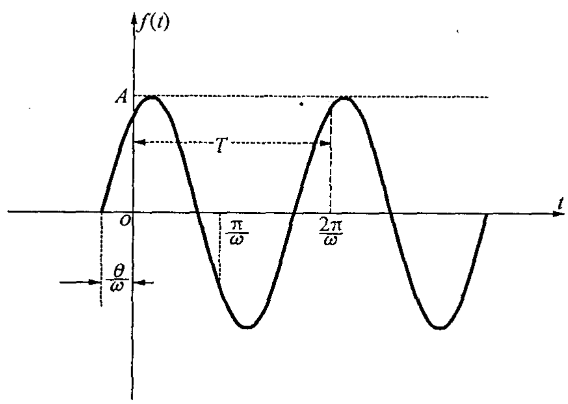


图 1－7　正弦信号

正弦信号是周期信号，其周期（period）T 与频率（frequency）f 及角频率 ω 之间的关系为

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1-11}$$

正弦信号和余弦信号可表示成复指数信号。由欧拉公式（Euler's formula）可知

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

所以有

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \tag{1-12}$$

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \tag{1-13}$$

在信号与系统分析中，经常要遇到单边指数衰减的正弦信号，其波形如图 1－8 所示。其表示式为

$$f(t)=\begin{cases}Ae^{-\alpha t}\sin\omega t & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases} \tag{1-14}$$

3.复指数信号(complex exponential signal)

将指数信号的指数因子换成复数,则称为复指数信号,其表示式为

$$f(t)=Ae^{st} \tag{1-15}$$

式中,s 称为复频率(complex frequency),它可以写成

$$s=\sigma+j\omega.$$

σ 为复指数 s 的实部(real part),ω 为其虚部(imaginary part)。借助欧拉公式,可将式(1-15)展开成如下形式

$$f(t)=Ae^{st}=Ae^{(\sigma+j\omega)t}=Ae^{\sigma t}\cos\omega t+jAe^{\sigma t}\sin\omega t \tag{1-16}$$

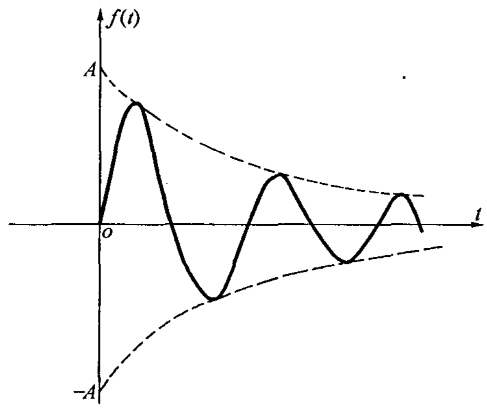


图 1-8 指数衰减的正弦信号

上式表明,一个复指数信号可分解为实部与虚部两部分。其中,实部为余弦信号,虚部为正弦信号。指数因子的实部 σ 表征了正弦与余弦的振幅随时间变化的情况。若 $\sigma>0$,则正弦、余弦信号是增幅振荡;若 $\sigma<0$,则为衰减振荡。指数因子的虚部 ω 则表示正弦和余弦信号的角频率。

现实世界总是实的,所以实际上不能够产生复指数信号,引入复指数信号是为了数学处理的方便。但是复指数信号概括了多种情况,可以利用复指数信号来描述各种基本信号,如直流信号($\sigma=0,\omega=0$)、指数信号($\omega=0,\sigma\neq 0$)、正弦或余弦信号($\sigma=0,\omega\neq 0$)以及增长或衰减的正弦与余弦信号($\sigma\neq 0,\omega\neq 0$)。

4.抽样函数 Sa(t)(sampling (Sa)function)

抽样函数 Sa(t) 的表示式为

$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t} \tag{1-17}$$

抽样函数的波形如图 1-9所示。由图可知,Sa(t) 函数是偶函数(even function),在 t 的正、负两方向振幅都逐渐衰减,且当 $t=\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi\cdots$ 时,函数值为零。

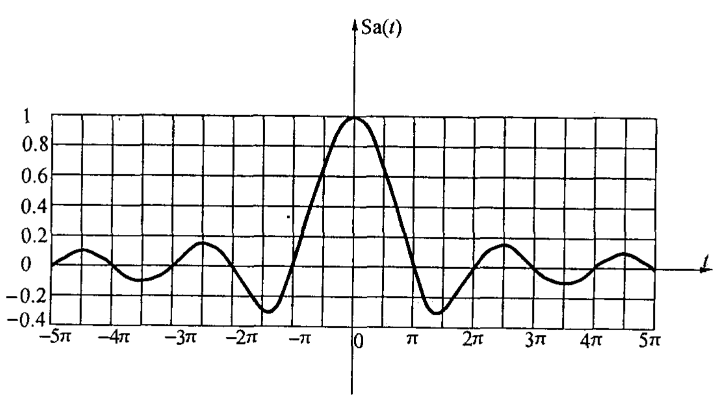


图 1-9 抽样函数 Sa(t)

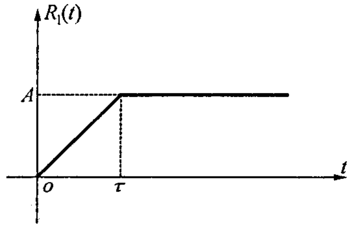


图 1 - 12　截平的斜变信号

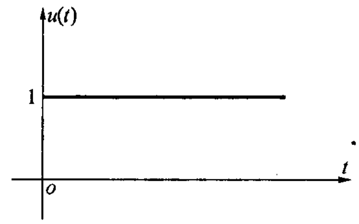


图 1 - 13　单位阶跃信号

如何得到单位阶跃信号呢?我们来考察图 1 - 14 所示的电路,假设开关 S、直流电源 E 以及电容 C 均为理想元件,无内阻。当 $t=0$ 时,开关 S 闭合,这样由于电路中无损耗电阻存在,所以电源电压立刻加到电容 C 的两端。从而使电容 C 两端的电压从 $t<0$ 时的 0 V 跳变到 $t>0$ 后的 $E=1$ V。这样,电容 C 两端的电压就是单位阶跃信号。

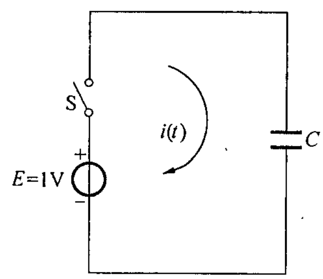


图 1 - 14　电容充电电路

如果开关 S 在 $t=t_0$ 时刻闭合,则电容 C 两端电压应是延时的单位阶跃信号。延时的单位阶跃信号的表示式为

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\0 & t<t_0\end{cases} \tag{1 - 24}$$

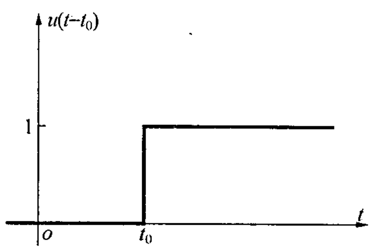


图 1 - 15　延时的单位阶跃信号

波形如图 1 - 15 所示。

如果跳变值不是 1,而是 E,则可以写成 $Eu(t)$ 或 $Eu(t-t_0)$。

容易证明,单位阶跃信号是单位斜变信号的导数,即

$$u(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t) \tag{1 - 25}$$

反之,单位斜变信号是单位阶跃信号的积分,即

$$R(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1 - 26}$$

阶跃信号具有鲜明的单边特性,当任意信号 $f(t)$ 与 $u(t)$ 相乘时,将使信号 $f(t)$ 在 $t=0$ 之前的幅度为零。例如,将余弦信号 $\cos t$ 与 $u(t)$ 相乘,使其 $t<0$ 的部分变为零,如图1 - 16 所示。

利用阶跃信号的单边特性,可以方便地表示分段信号。例如,图 1 - 17 所示的矩形脉冲 $G(t)$ 可表示为

$$G(t)=u(t)-u(t-t_0) \tag{1 - 27}$$

利用单位阶跃函数还可以表示“符号函数”(signum function)。符号函数定义为

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\-1 & (t<0)\end{cases} \tag{1 - 28}$$

波形如图 1 - 18 所示。显然,可以利用阶跃信号来表示 $\mathrm{sgn}(t)$

$$\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1 \tag{1 - 29}$$

反之,也可用 $\operatorname{sgn}(t)$ 来表示 $u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(t)] \tag{1-30}$$

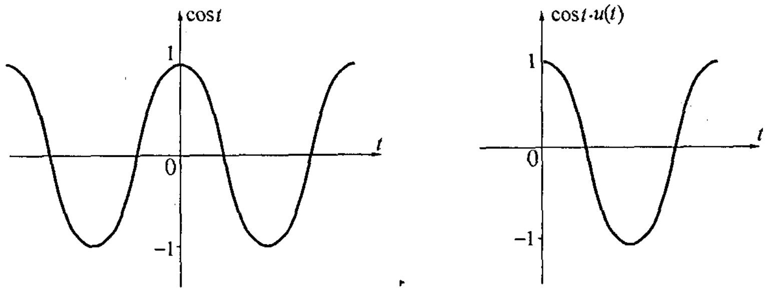


图 1 - 16　$\cos t$ 及 $\cos t \cdot u(t)$ 的波形

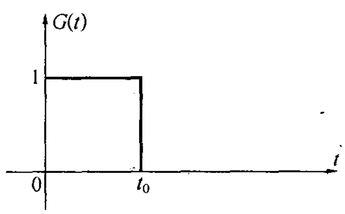


图 1 - 17　矩形脉冲

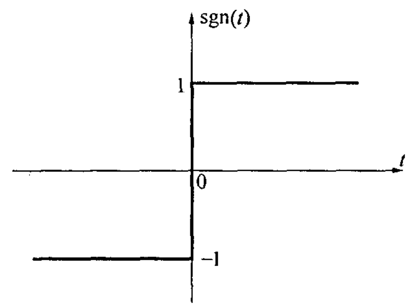


图 1 - 18　符号函数

3.单位冲激信号(unit impulse signal)

某些物理现象,需要用一个时间极短,但取值极大的函数模型来描述。例如,力学中瞬间作用的冲击力,电学中电容器中的瞬间充电电流,还有自然界中的雷击电闪等。冲激函数就是以这类实际问题为背景而引出的。

我们仍以图 1 - 14 的电路为例,从物理概念上来解释冲激函数的意义。前面我们已经知道,当 $t = 0$ 时开关 S 闭合,电容 C 上的电压 $v_C(t)$ 是一个单位阶跃电压 $u(t)$。现在来计算电容 C 中的充电电流 $i_C(t)$,若设 $C = 1$ F,显然充电电流

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

由于当 $t \neq 0$ 时,$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ 均等于零;而当 $t = 0$ 时,$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ 是一个无限值,因而充电电流 $i_C(t)$ 在 $t = 0$ 时也是一个无限大值,而在 $t \neq 0$ 时均为零。这是因为在讨论过程中是将图 1 - 14 电路中的电源、开关及电容予以理想化而引起的。实际电路中,必定存在损耗电阻,这时电容上的电压 $v_C(t)$ 将不会在 $t = 0$ 瞬间从 0 突变到 1,而是存在一个过渡过程。现在假设电容上电压 $v_C(t)$ 在一定时间范围 $0 < t < \tau$ 之内按线性规律从 0 逐渐增大到稳定值 1。也就是说,$v_C(t)$ 用图 1 - 19(a) 所示的截平的斜变电压来代替原理想的单位阶跃电压,则电容 C 在

$0 < t < \tau$ 范围内的充电电流 $i_C(t) = \dfrac{1}{\tau}$；而在 $t < 0$ 与 $t > \tau$ 范围内的充电电流 $i_C(t) = 0$。

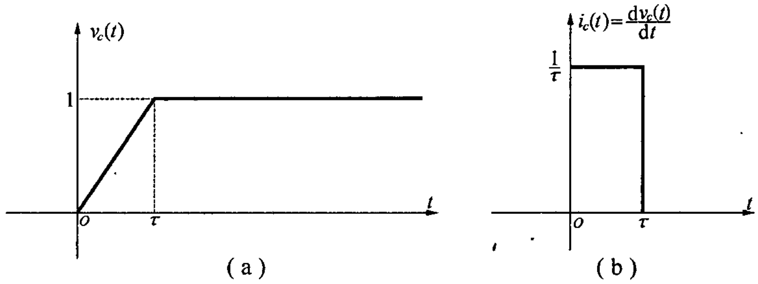


图 1 - 19

或者说，此时电容充电电流 $i_C(t)$ 是一个幅度为 $\dfrac{1}{\tau}$、宽度为 τ 的矩形脉冲，该矩形脉冲的面积为 1，如图 1 - 19(b) 所示。现在我们将脉冲宽度 τ 逐渐减小并趋于零，那么电压 $v_C(t)$ 将逐渐趋近于单位阶跃函数，同时电流 $i_C(t)$ 这个矩形脉冲的宽度 τ 也将趋于零，而其幅度 $\dfrac{1}{\tau}$ 则趋于无限大。但是，无论 τ 值如何变小，脉冲面积却始终保持为 1。由此引出单位冲激函数，用符号 $\delta(t)$ 来表示，它是这种特殊矩形脉冲序列的极限。单位冲激函数 $\delta(t)$ 可以定义为，在 $t \neq 0$ 时函数值均为零，而在 $t = 0$ 处函数值为无限大，且函数面积为 1，即可定义为

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \mathrm{d}t = 1 \end{cases} \tag{1 - 31}$$

函数面积称为冲激强度。若冲激强度为 E 的冲激函数，则应写作 $E\delta(t)$。上式定义是狄拉克(Dirac) 首先给出的，因此单位冲激函数 $\delta(t)$ 又称为狄拉克函数，亦称为 δ 函数。冲激函数用一带箭头的竖线表示，它出现的时间表示冲激发生的时刻，箭头旁边括号内的数字表示冲激强度。图 1 - 20(a) 是表示发生在 $t = 0$ 时刻的单位冲激函数。而图 1 - 20(b) 则表示发生在 $t = t_0$ 时刻的单位冲激函数，这是延时的单位冲激函数，其数学表示式为

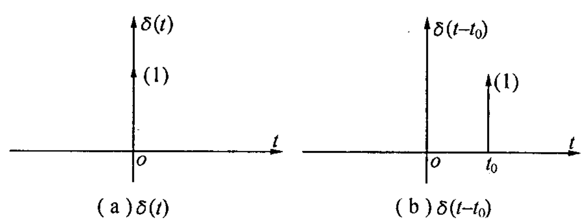


图 1 - 20　单位冲激函数

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = 0 & t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \mathrm{d}t = 1 \end{cases} \tag{1 - 32}$$

狄拉克是用式(1 - 31) 或式(1 - 32) 给出了单位冲激函数的定义。从上面引出 $\delta(t)$ 函数的过程可以看出，单位冲激函数 $\delta(t)$ 是面积为 1 的单边矩形脉冲的极限，因此单位冲激函数可以定义为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}[u(t) - u(t - \tau)] \tag{1 - 33}$$