ANALYSIS THEORY ON ILL-CONDITIONED SYSTEM WITH APPLICATION IN SURVEYING

# 病态系统分析理论及其在测量中的应用

卢秀山 冯遵德 刘纪敏 著

测绘出版社

# 病态系统分析理论及其在测量中的应用

**Analysis Theory on Ill-conditioned System with Application in Surveying**

卢秀山　冯遵德　刘纪敏　著

测绘出版社

·北京·

# 内 容 简 介

病态性问题存在于测量数据处理、地球物理参数反演、回归分析等与参数估计有关的许多领域，而且其危害性是非常严重的，因而受到相关领域科技人员的广泛关注。本书在给出参数估计系统病态性分类的基础上，以 Hilbert 空间分析理论为工具，分别研究了参数空间、观测空间中子空间关系的度量，给出了几种参数关系、观测结构以及观测信息量度量的空间分析方法；分别研究了参数选择、病态系统参数估计方法，并给出了相应的应用示例。

本书可供测绘、统计、数值计算等与参数估计有关的学科的研究生，相应学科的科技工作者参考。



图书在版编目(CIP)数据

病态系统分析理论及其在测量中的应用/卢秀山　冯遵德　刘纪敏著. 一北京：测绘出版社，2007.12

ISBN 978-7-5030-1772-8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 196646 号

| | | | |
|---|---|---|---|
| 责任编辑 | 金　君 | 封面设计 | 李　伟 |
| 出版发行 | 测绘出版社 | | |
| 社　　址 | 北京西城区复外三里河 50 号 | 邮政编码 | 100045 |
| 电　　话 | 010－68512386　68531609 | 网　　址 | www.sinomaps.com |
| 印　　刷 | 北京通州区次渠印刷厂 | 经　　销 | 新华书店 |
| 成品规格 | 169mm×239mm | 印　　张 | 7.75 |
| 字　　数 | 150 千字 | | |
| 版　　次 | 2007 年 12 月第 1 版 | 印　　次 | 2007 年 12 月第 1 次印刷 |
| 印　　数 | 0001－1500 | 定　　价 | 28.00 元 |

书　　号　ISBN 978-7-5030-1772-8/P・466

如有印装质量问题，请与我社发行部联系

# 序 言

近年来，参数估计中的病态问题引起越来越多的人的关注，成为数据处理中的一个研究热点。

所谓病态问题是指由于系统结构不好，观测信息量偏少，导致参数估计（主要指最小二乘法估计）的不稳定，结果严重偏离真实值的现象。在许多实际的反演问题中都会遇到这种现象。

例如，GPS 精密快速定位中，由于要求测量时间短，GPS 卫星与测站之间的几何关系变化不明显，导致观测结构很差，要同时解算坐标分量和相位模糊度参数，就会遇到严重的病态问题。不采取有效的措施，就得不到精确的定位结果。又例如，如果仅利用局部区域的跟踪站的观测资料，确定地球同步卫星的精确轨道，这时的数学模型也是严重病态的。在研究电离层的电子含量的变化特征或中性大气（对流层）的水汽分布时，进行层析成像处理，也需要研究克服病态性影响的好办法。几乎大多与现代高新技术的数据处理有关的问题，也都涉及病态性问题。因此，从理论和方法上，系统研究病态问题，不仅有重要的学术意义，而且有广泛的实用价值。

事实上，研究病态问题的有效解决办法，早在一百多年前就有学者在探讨了。这类探索可以用“前赴后继”来形容。然而人们并没有找到在实际应用中，普遍适用且很有效的办法。例如讨论很多的岭估计、广义岭估计、截断奇异值分解以及共轭梯度法等数值解法，只限于条件苛刻而精度要求不太高的情况下采用，才会感到有效。解决病态影响问题，需要新的研究思路和方法。

近年来，本书的作者一直结合测绘领域的数据处理，研究病态问题的有效解决办法。他们分析现有解法的不足，提出了不同于已有方法的研究思路。

他们分析了病态问题的特征和规律，将病态问题分为两类：一类是由于模型参数选择不当，参数相关引起的，另一类是因为观测值提供的信息量不足引起的。在此基础上，他们以空间分析的理论为工具，分别研究参数空间和观测空间的子空间之间的关系，尝试给出参数之间的关系以及观测信息量的度量办法，以求查明原委，进而找到相关机理。这种做法，称为病态问题的诊断分析。这对于系统设计以及模型参数选择是有参考价值的。

在病态问题的解法方面，他们把研究重点放在如何创造条件，增加有用信息。例如，提取参数的先验信息，附加合理的约束条件，都能有效地改善系统的病态性。他们改造经典的正则化算法，强调结合实际，注重算法的物理意义。

这本专著系统介绍了病态性的诊断和削弱病态性的相关理论和办法，以及病态性系统的有效参数估计理论，这些内容初步形成了“系统病态性分析理论”。该书有明显的特色，包含了作者在国家自然科学基金的资助下，取得的最新研究成果，它们丰富了线性模型的参数估计理论。

笔者和本书的作者交流较多，从他们的研究思路和研究方法中受到启发，得到鼓舞。像这本书这样专门系统介绍和探讨病态性问题的著作还不多见。笔者以为，这本著作值得一读。

欧吉坤　于武昌
中国科学院测量与地球物理研究所
2007 年 12 月

# 前 言

通常，对于 G-M 模型，参数 LS 估值具有无偏且方差最小的优良特性。但是，当参数估计系统存在病态性时，参数 LS 估值的性质就会明显地变坏，参数的估值质量难以保证。

病态问题存在于测量数据处理、地球物理参数反演、回归分析等与参数估计有关的各个方面，而且其危害性是非常严重的，受到相关领域科技人员的广泛关注。分析系统的病态性质、克服或减弱系统病态性、取得更为准确的参数估值，是当前测量平差中的一个重要问题，它已被国际大地测量协会“大地测量数学与物理基础研究组”的第一子专题组 Statistics 确立为现代测量误差理论及数据处理研究中的一项重要内容，也是当前卫星定位、干涉雷达、低空数字摄影等重大测量工程数据处理中所关注的一个重要课题。

系统病态性分析理论有三个核心内容，一是系统病态性诊断理论和方法，二是克服或减弱系统病态性的理论和方法，三是病态系统的参数估计方法。本书针对系统病态性产生的原因，将其分为Ⅰ类与Ⅱ类病态性问题。以 Hilbert 空间分析理论为工具，分别研究了参数空间、观测空间中子空间关系的度量，给出了几种参数关系、观测结构以及观测信息量度量的空间分析方法；分别研究了参数选择、病态系统参数估计方法，并给出了相应的应用示例。初步构成了诊断系统病态性、克服或减弱系统病态性的空间分析理论。

本书共分 10 章。第 1 章简要介绍了向量范数与矩阵范数、G-S 正交化方法以及 $\boldsymbol{H}$ 空间的参数最小二乘估计等相关基础知识。第 2 章主要介绍参数估计系统病态性的表现特征、产生原因以及分类方法。第 3 章和第 4 章，基于 $\boldsymbol{H}$ 空间分析理论，研究参数间关系的度量、观测子空间关系的度量，给出了相应的诊断方法。第 5 章主要研究观测结构和观测信息量的度量方法。第 6 章至第 10 章，在介绍处理病态系统常用方法的基础上，研究参数选择的新方法、病态系统数据处理的新方法，以及相应的方法在卫星定位数据处理中的应用。

卢秀山，作者之一，1997 年开始研究参数估计病态性问题，于 1998 年发表了第一篇相关论文，提出了基于空间分析理论的系统病态性分析方法，并在后续研究中得到发展。作者冯遵德、刘纪敏分别于 2002 年、2005 先后加入了研究队伍，着手相同方向的研究工作。

本书成果的研究，得到 2 项国家自然科学基金课题“病态系统分析理论及其在测量中的应用研究(40144018)”和“Ⅱ类病态系统分析理论及其应用研究(40474005)”的资助和 1 项教育部重点实验室基金课题“观测有效性分析理论”的

资助。本书是几位作者多篇研究论文和两篇博士论文的核心成果。

不论是博士论文还是基金课题，都得到了导师欧吉坤研究员的指导、支持和帮助，在此表示由衷的敬意！中国石油大学的王振杰教授，山东科技大学的独知行教授、郭英博士、王萍教授、崔先国教授等参与了国家自然科学基金课题的研究工作，取得了丰富的研究成果，支持了本书成果的研究工作，在此一并致谢！

本书可供测绘、统计、数值计算等与参数估计有关的学科的研究生，相应学科的科技工作者参考。

由于作者水平有限，谬误之处在所难免，恳请各位专家和读者批评指正。

作者

2007 年 11 月

# Abstract

The ill-conditioned problem lies in many fields connected with parameters estimate, such as data processing, geophysical parameters counter evolvement, regression analysis and so on. Its harm is extremely serious, so it is reasonable for many corresponding scientists and technicians to pay much attention to it. Based on the ill-conditioned classification of parameters estimate system, according to H spaces analysis theory, this paper makes a research into the measurement of relationships about parameter spaces and subspaces in observation spaces respectively. It puts forward several analysis methods about parameter relationships, observation structure and measurement of observation information. It also makes a research on methods about parameters selection and estimate of ill-conditioned system, and gives some relative examples. It may provide some information for the postgraduates who studies surveying, statistics and calculating connected with parameters estimate, and also for some corresponding scientists and technicians.

# 目　录

# Contents

# 第1章　相关基础知识

本书关于病态系统分析理论的研究基于矢量空间。在其上定义的范数矢量空间为赋范空间，定义的内积矢量空间为内积空间，完备的内积空间为 Hilbert 空间（简称 $H$ 空间）。向量范数、矩阵范数和向量的内积是研究矢量空间的基本工具。本章简要介绍向量范数与矩阵范数、$H$ 空间的最小二乘估计、G-S 正交化方法的基础知识。

## §1.1　向量范数与矩阵范数

### 1.1.1 向量范数

**定义 1.1**　对于任一向量 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{X}\| \in R$ 与之对应，且满足

1. 正定性：$\|\boldsymbol{X}\| \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{X} = 0$ 时，$\|\boldsymbol{X}\| = 0$；

2. 齐次性：$\|c\boldsymbol{X}\| = |c|\,\|\boldsymbol{X}\|$，$c \in R$；

3. 三角不等式：$\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\| \leqslant \|\boldsymbol{X}\| + \|\boldsymbol{Y}\|$ $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{R}^n)$，则称 $\|\boldsymbol{X}\|$ 为向量 $\boldsymbol{X}$ 的范数。

在矢量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上赋范，就是在 $\boldsymbol{R}^n$ 上定义一个满足上述三条性质的实函数 $f(\boldsymbol{X}) = \|\boldsymbol{X}\|$。这种函数可以找到很多，但是最常用的范数有三种。

对于 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，有

1. 向量 1 范数

$$\|\boldsymbol{X}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{1-1}$$

2. 欧氏范数

$$\|\boldsymbol{X}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1-2}$$

3. $\infty$ 范数

$$\|\boldsymbol{X}\|_\infty = \max_i |x_i| \tag{1-3}$$

这三种范数可以统一为

$$\|\boldsymbol{X}\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}},\quad 1 \leqslant p < \infty \tag{1-4}$$

上式定义的范数称为 $p$ 范数，上述三种范数是 $p$ 范数的特例。如不特别指

出，书中所用向量范数均为欧氏范数。

### 1.1.2 矩阵范数

**定义 1.2**　对于任一矩阵 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$，都有 $\|\boldsymbol{A}\| \in R$ 与之对应，且满足

1. 正定性：$\|\boldsymbol{A}\| \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{A} = 0$ 时，$\|\boldsymbol{A}\| = 0$；

2. 齐次性：$\|c\boldsymbol{A}\| = |c|\,\|\boldsymbol{A}\|,\quad \forall c \in R$；

3. 三角不等式：$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$ $(\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^{m\times n})$，则称 $\|\boldsymbol{A}\|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的范数。

常见的矩阵范数为：$\|\boldsymbol{A}\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{i,j}|a_{ij}|$ 和 $\|\boldsymbol{A}\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}(p \geqslant 1)$。这些范数均可用于定性地研究收敛性问题。而最常采用的是 Frobenius 范数：

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1-5}$$

在矢量空间的分析研究中，要求矩阵范数具备相容性条件，因此定义矩阵范数不能和定义向量范数完全相同。相容性矩阵范数定义如下。

**定义 1.3**　在矩阵空间 $\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 上的任一实数，记为 $\|\cdot\|$，如果对于所有的 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$，$c \in \boldsymbol{R}$ 都满足

1. $\|\boldsymbol{A}\| \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{A} = 0$ 时，$\|\boldsymbol{A}\| = 0$；

2. $\|c\boldsymbol{A}\| = |c|\,\|\boldsymbol{A}\|$；

3. $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$；

4. $\|\boldsymbol{AB}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{B}\|$

则称 $\|\cdot\|$ 为相容的矩阵范数，或简称矩阵范数。

**定义 1.4**　如果一个矩阵范数 $\|\boldsymbol{A}\|$ 和一个向量范数 $\|\boldsymbol{X}\|$ 对一切向量 $\boldsymbol{X}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都满足

$$\|\boldsymbol{AX}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{X}\|$$

则称这两个范数是相容的。

根据定义，矩阵的 F－范数是一种相容的范数，并且这种范数与向量 $\boldsymbol{X}$ 的欧氏范数（$\|\boldsymbol{X}\|_2$）是相容的。事实上，任意给定一种矩阵范数 $\|\boldsymbol{A}\|_m$，一定可以找到与之相容的向量范数 $\|\boldsymbol{X}\|_v$。因为，任取向量 $\boldsymbol{a} \neq 0$，令 $\|\boldsymbol{X}\|_v = \|\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_m$，有

$$\|\boldsymbol{AX}\|_v = \|\boldsymbol{AX}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_m \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_m\|\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_m = \|\boldsymbol{A}\|_m\|\boldsymbol{X}\|_v$$

与向量范数相容的矩阵范数是所谓的算子范数：

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sup_{\|\boldsymbol{X}\|=1}\|\boldsymbol{AX}\|$$

其中向量范数 $\|\boldsymbol{X}\|$ 与 $\|\boldsymbol{AX}\|$ 可以相同，也可以不同。不管怎样，总有 $\|\boldsymbol{AX}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{X}\|$ 成立。

对于 $A \in R^{m\times n}$，当向量分别取 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_\infty$，$\|\cdot\|_2$ 时，其对应的算子范数也记为

1. 最大列范数：

$$\|A\|_1 = \sup_{\|X\|_1=1}\|AX\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \tag{1-6}$$

2. 最大行范数

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|X\|_\infty=1}\|AX\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{1-7}$$

3. 谱范数：

$$\|A\|_2 = \sup_{\|X\|_2=1}\|AX\|_2 = (\lambda(A^{\mathrm{T}}A))^{\frac{1}{2}} = \sigma_1 \tag{1-8}$$

其中 $\sigma_1$ 为 $A$ 的最大奇异值。如不特别指出，本书中所用矩阵范数均为谱范数。

## §1.2　*H* 空间的参数最小二乘估计

用 $H$ 空间理论研究参数最小二乘估计，能更深入地理解最小二乘估计（简称 LS 估计）问题的实质和数学结构，提供更清晰直观的几何概念。

### 1.2.1 *H* 子空间 $H_L$ 的张成

令 $V \in R^m, A \in R^{m\times n}, \hat{X} \in R^n$，$L \in R^m$，则参数估计模型为

$$V = A\hat{X} - L,\quad 秩\ rank(A) = n \tag{1-9}$$

令

$$\hat{L} = A\hat{X} \tag{1-10}$$

则

$$V = \hat{L} - L \tag{1-11}$$

对于由 $L$ 所张成的矢量空间 $H_L$，在其上引进概率测度 $P_\Delta$（$P_\Delta$ 为 $m\times m$ 的正定对称阵），于是 $H_L$ 为概率测度空间。设 $L, L'$ 为任意观测向量，在 $H_L$ 中选择一个基底后，定义内积为

$$\forall L, L' \in H_L : (L, L') = L^{\mathrm{T}} P_\Delta L' \in R \tag{1-12}$$

$H_L$ 是有限维内积空间，因而完备，故 $H_L$ 是 $m$ 维 *Hilbert* 空间。

由式(1-12)内积导出的范数为

$$\forall L \in H_L : \|L\| = \sqrt{(L, L)} \in R \tag{1-13}$$

定义距离 $d$ 为

$$\forall L, L' \in H_L : d(L, L') = \|L - L'\| = \sqrt{(L-L')^{\mathrm{T}} P_\Delta (L-L')} \in R \tag{1-14}$$

### 1.2.2 投影定理

对于式(1-9)中的矩阵 $A$，$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，其中 $\alpha_i$ 为 $m$ 维列向量，与 $x$（$x$

$\in X$) 对应。由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 张成向量空间 $\boldsymbol{H}_A$，$\boldsymbol{H}_A$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的值域空间。

**定义 1.5** 对于 $\boldsymbol{H}_A \subset \boldsymbol{H}_L, \boldsymbol{L} \in H_L$，如果有 $\hat{\boldsymbol{L}} \in \boldsymbol{H}_A, \boldsymbol{V} \perp \boldsymbol{H}_A$，使得

$$\boldsymbol{L} = \hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{V}$$

则称 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 在 $\boldsymbol{H}_A$ 上的(正交)投影。

**引理 1.1** 对于 $\boldsymbol{H}_A \subset \boldsymbol{H}_L, \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{H}_L$，如果 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 在 $\boldsymbol{H}_A$ 上的投影，那么对于 $\boldsymbol{H}_A$ 中的任意向量 $\hat{\boldsymbol{L}}^0$，有

$$d = \|\hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L}\| \leqslant \|\hat{\boldsymbol{L}}^0 - \boldsymbol{L}\| \tag{1-15}$$

**引理 1.2** 对于 $\boldsymbol{H}_A \subset \boldsymbol{H}_L, \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{H}_L$，$\hat{\boldsymbol{L}} \in \boldsymbol{H}_A$，如果 $\|\hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L}\| = d$，那么 $(\hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L}) \perp \boldsymbol{H}_A$。

投影定理：若 $\boldsymbol{H}_A \subset \boldsymbol{H}_L, \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{H}_L$，则 $\boldsymbol{L}$ 在 $\boldsymbol{H}_A$ 上的投影唯一存在。也就是说，有 $\hat{\boldsymbol{L}} \in \boldsymbol{H}_A$、$\boldsymbol{V} \perp \boldsymbol{H}_A$，使得 $\boldsymbol{L} = \hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{V}$ 成立，而且这种分解是唯一的(黄维彬，1992)。

### 1.2.3 参数最小二乘估计

根据投影定理，参数最小二乘估计可以叙述为：在值域空间 $\boldsymbol{H}_A$ 中找一个向量 $\hat{\boldsymbol{L}}$，使 $\boldsymbol{L}$ 到 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 的距离比到 $\boldsymbol{H}_A$ 中其他向量的距离都短。

$$\|\boldsymbol{V}\|^2 \doteq \|\hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L}\|^2 = \min \tag{1-16}$$

将 $\boldsymbol{L}$ 投影到 $\boldsymbol{H}_A$，有投影算子 $J_A$，使得

$$\boldsymbol{J}_A : \boldsymbol{L} \to \hat{\boldsymbol{L}} \in H_A, \hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{J}_A \boldsymbol{L} \tag{1-17}$$

上式中，$\boldsymbol{J}_A = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\Delta \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\Delta$。因此有

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\Delta \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\Delta \boldsymbol{L} \tag{1-18}$$

于是得参数及残差的表达式为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\Delta \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\Delta \boldsymbol{L} \\ \hat{\boldsymbol{X}} &= (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\Delta \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\Delta \boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{V} &= -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}_A)\boldsymbol{L} \end{aligned}\right\} \tag{1-19}$$

## §1.3 G-S 正交化方法

格拉姆—施密特(Gram-Schmidt，简记为 G-S)正交化方法，是由线性无关矢量组构造标准正交关系的一种方法。

### 1.3.1 G-S 正交化过程

**定义 1.6** 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是内积空间 $\boldsymbol{H}$ 中的一组元素，如果对于任意的 $i \neq j$ 均有 $(e_i, e_j) = 0$，则称 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 中的正交系；如果每一 $e_i$ 都是单位元素(即范数为 1)，则称为标准正交系。

换言之，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 中的标准正交系，是指

$$(e_i,e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\tag{1-20}$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}^{m\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}^{m\times n}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$，$\boldsymbol{\beta}_i$ 为 $m$ 维列向量，且 $\boldsymbol{B}^{m\times n}$ 为与 $\boldsymbol{A}^{m\times n}$ 相对应的正交阵。按照 G-S 正交化方法，有

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_n-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_{n-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_{n-1})}\boldsymbol{\beta}_{n-1}$$

取

$$e_i=\frac{\boldsymbol{\beta}_i}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|},\quad i=1,2,\cdots,n\tag{1-21}$$

则得规范正交系：$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$。

## 1.3.2 $\beta_i$ 与 $\alpha_j$ 的关系

$\boldsymbol{A}^{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}^{m\times n}$ 二者同构，并且 $\boldsymbol{B}^{m\times n}$ 是 $\boldsymbol{A}^{m\times n}$ 的线性变换，其一般表达式为

$$\boldsymbol{\beta}_i=k_{i1}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{i2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots k_{in}\boldsymbol{\alpha}_n\tag{1-22}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_l$ 是给定向量，故 $\boldsymbol{\beta}_i$ 取决于 $k_{il}$。根据 $(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=0\quad(i\neq j)$，有

$$k_{i1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+k_{i2}(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)+\cdots k_{in}(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_j)=0$$

$$k_{ih}=-\sum_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{n}k_{il}(\boldsymbol{\alpha}_l,\boldsymbol{\beta}_j)\tag{1-23}$$

式(1-23)表明，$k_{il}$ 取决于 $\boldsymbol{\alpha}_l$。因此，在 G-S 正交化过程中，$\boldsymbol{\beta}_i$ 完全取决于 $\boldsymbol{\alpha}_l$。如果 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的排序是任意的，那么 $\boldsymbol{\alpha}_l$ 有多种不同的排序，此时 $\boldsymbol{B}^{m\times n}$ 不是唯一的。

## 1.3.3 $B^{m\times n}$ 的特性

$\boldsymbol{B}^{m\times n}$ 具有两个重要特性：

(1) $\boldsymbol{B}^{m\times n}$ 的列向量是正交的。

(2)对应于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的不同排序，$\boldsymbol{B}^{m\times n}$ 具有相同维数的零向量。

证明：如果 $\boldsymbol{A}^{m\times n}$ 的列向量 $\boldsymbol{a}_l$ 存在复共线，$\boldsymbol{B}_{(i)}^{m\times n}$ 是 $\boldsymbol{A}^{m\times n}$ 的某一线性变换，在 $\boldsymbol{B}_{(i)}^{m\times n}$ 中有且仅有

$$\boldsymbol{\beta}_i=k_{i1}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{i2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots k_{in}\boldsymbol{\alpha}_n=0\quad(k_{in}\text{ 不全为零})\tag{1-24}$$

则在 $\boldsymbol{B}_{(j)}^{m\times n}$ 中必有且仅有