高等学校教材

MATHEMATICS

线性代数与空间解析几何

邢 伟 李建华 樊复生 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数与空间解析几何

邢 伟 李建华 樊复生 编

高等教育出版社

内容提要

本书主要介绍线性代数，最后一章介绍空间解析几何，共 8 章，内容包括：行列式、矩阵、向量线性关系及矩阵的秩、线性方程组、线性空间与线性变换、矩阵的特征值与特征向量、二次型、空间解析几何等。每章后配有 A，B 两套习题，其中习题 A 作一般要求之用，习题 B 难度增加，作补充要求之用。绝大多数习题书后都给出了答案或提示，以便于读者自学与复习。

全书内容系统、丰富、精练，突出了知识的模块化结构编排，可读性强。书中不乏作者自己的独到创意。本书既可作线性代数课程的教材，又可作空间解析几何课程的教材，也可两者兼顾。

本书可供高等院校非数学类各专业使用，亦可供广大科技工作者或者有兴趣的读者阅读与参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何/邢伟，李建华，樊复生编.
北京：高等教育出版社，2005.6（2006 重印）
ISBN 7-04-016704-2

Ⅰ.线... Ⅱ.①邢...②李...③樊... Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②空间几何：解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 036720 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005 年 6 月第 1 版
印　　张	13.5	印　　次	2006 年 4 月第 2 次印刷
字　　数	240 000	定　　价	14.60 元

物料号　16704-00

前　言

对于日益呈现出高技术化(通常表现为数字化)社会的今天,线性代数是一门应用最为广泛的大学数学课程。

线性代数内容丰富,自成体系,比较抽象。空间解析几何是以线性代数为工具建立起来的,具体直观,同时也为线性代数提供了一个“可视”背景。本书主要介绍线性代数的基本理论与方法,最后一章介绍空间解析几何。如此安排的目的之一是为了给读者一个更大的学习、思考空间:在单纯学习线性代数时,希望能够注意到它隐藏着的几何直观;在单纯学习几何时,也希望能够探究到它的代数根源。毋庸置疑,代数与几何有着天然的联系,兼容并包、相得益彰有利于数学思想的升华。

考虑到目前大学本科线性代数教学学时偏少,而学生应掌握的内容又偏多的特点,我们在内容的安排上力求全面、精练,注重系统性、模块化,增加易读性,使学生少走弯路地接受新知识。在学习本书时,善于运用矩阵的思想与方法处理问题,并试着理解或统一全书内容不失为一个能够融会贯通的好方法。

本书形成过程中,获得了东北大学教材计划建设立项项目(“线性代数教材建设”)及东北大学教务处的有力支持,获得了高等教育出版社高等理科分社的有力支持,借此我们表示衷心地感谢。东北大学理学院车向凯教授自始至终给予了本书多方面的帮助,孙艳蕊副教授、张秀华副教授在本书试用期间也给予了有益的建议,在此,向他们表示由衷的谢意。我们也对审稿人表示真诚谢意。

邢伟写了第一、二、三章,樊复生写了第四、五、六章,李建华写了第七、八章。由于时间较紧,尽管做了很大努力,但恐有不当、遗漏之处,恳请专家、读者批评指正或给出您的宝贵建议(联系方式 Email:awxing@mail. neu. edu. cn)。

作者

于东北大学理学院

2005 年 1 月 6 日

本书使用符号说明

符　　号	意　　义
$:=$	定义式
$\sum$	求和号
$\prod$	求积号
$K,K^n,K^{m\times n}$	一般的数域，数域 K 上所有 n 维列(或行)向量集(它是 K 上 n 维线性空间)，数域 K 上所有 $m\times n$ 阶矩阵集(它是 K 上 $m\cdot n$ 维线性空间)
$\mathbf{R},\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^{m\times n}$	实数域，实数域 $\mathbf{R}$ 上所有 n 维列(或行)向量集(它是 $\mathbf{R}$ 上 n 维线性空间)，实数域 $\mathbf{R}$ 上所有 $m\times n$ 阶矩阵集(它是 $\mathbf{R}$ 上 $m\cdot n$ 维线性空间)
$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$	n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数
$\|a_{ij}\|_n$ 或 $\|a_{ij}\|$	n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
D^{T}	行列式 D 的转置
(i,j)	行列式或矩阵的第 i 行、第 j 列位置
M_{ij}	行列式(i,j)位置的余子式
A_{ij}	行列式或矩阵(i,j)位置的代数余子式
δ_{ij}	Kronecker 符号：当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$；当 $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$
$(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij})	$m\times n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{E}$	单位矩阵
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{A}^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵
$\det(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

续表

符　号	意　义
$R(\boldsymbol{A}),R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩
$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$	矩阵经初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价
$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似
$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同
$r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$	初等行(列)变换之一，互换矩阵的第 i,j 两行(列)
$k\cdot r_i(k\cdot c_i)$	初等行(列)变换之一，第 i 行(列)乘以非零常数 k
$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$	初等行(列)变换之一，第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)
$\boldsymbol{P}[i,j]$	初等矩阵之一，单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经第 i,j 两行互换后所得
$\boldsymbol{P}[i(k)]$	初等矩阵之一，单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经第 i 行乘以非零常数 k 后所得
$\boldsymbol{P}[i+j(k)]$	初等矩阵之一，单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经第 j 行的 k 倍加到第 i 行后所得
$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$	(n 维)标准单位向量，即 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的列向量组或行向量组
$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的数量积，又称内积
$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角
$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的向量积，又称外积
$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$	向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 的混合积
$\|\boldsymbol{\alpha}\|$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模
□	定理等的证明结束

目　录

第一章　行　列　式

行列式起源于线性方程组的求解问题. 早在 1693 年德国数学家 Leibniz 就使用了行列式,1750 年瑞士数学家 Cramer 建立了求解线性方程组的行列式基本公式. 今天,行列式已经是数学中的一个基本概念.

第一节　二、三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

易知,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,式(1.1)有惟一解:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

这种解的表达式略显凌乱. 如果引入了二阶行列式的记号,情况就不一样了.

所谓二阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} :=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为四个数. 上式右边的代数式也可视为左边二阶行列式的展开式:位于行列式的主对角线(从左上角到右下角的连线,即实线)上两个元 a_{11},a_{22} 的乘积取正号,位于次对角线(从右上角到左下角的连线,即虚线)上两个元 a_{12},a_{21} 的乘积取负号.

例 1.1　$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2.$

有了二阶行列式的概念,我们再来看方程组(1.1)的解的表达式. 令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

行列式 D 是由方程组(1.1)的系数构成的,称为方程组(1.1)的系数行列式. 而 $D_i(i=1,2)$是系数行列式 D 的第 i 列由方程组(1.1)的常数项列代换而

得. 现在,前面关于方程组(1.1)的结论就转化为:

当方程组(1.1)的系数行列式 $D\neq 0$ 时,方程组有惟一解: $x_i=D_i/D(i=1,2)$. 这个结论就是著名的 Cramer 法则(Cramer's rule).

类似地,可以引进三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{23}a_{12}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

这里 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为数. 如上所示,三阶行列式的展开式为:位于三条实连线上的三个元的乘积分别取正号,位于三条虚连线上的三个元的乘积分别取负号.

例 1.2 $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}=90+1+20-8-5-45=53.$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.2}$$

与二元的情况一样,仍然有 Cramer 法则成立:当方程组(1.2)的系数行列式 $D\neq 0$ 时,它有惟一解: $x_i=D_i/D(i=1,2,3)$,其中 D_i 是系数行列式 D 的第 i 列由方程组(1.2)的常数项列代换而得.

二、三阶行列式的这种展开方法不妨形象地叫做"画线法". 从以上的讨论看出,方程组解的表达用行列式描述是非常清晰且易于接受的. 自然要问:对于四元或四元以上的线性方程组,还有没有相应的 Cramer 法则呢? 回答是肯定的. 但是,对于四阶或四阶以上的行列式,却没有了直观的"画线法"展开式了. 为了引进一般阶的(当然也包括二、三阶)行列式定义,我们需要一个"工具"——排列.

第二节　排　　列

本节所讲的排列概念是比较狭义的.

定义 1.1　由前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 所组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

易知,所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个.

123456,654321,536241 是三个不同的 6 级排列,而 263521 却不是 6 级排列.对于前三个 6 级排列,可能你的直观感受是不一样的,即后面的排列不如前面的排列看起来“顺眼”.是什么因素造成了这样不同的感觉呢?这里面有个东西在作怪,它就是“逆序”.

在一个排列中,若有某两个位置上的一对数,大的排在前面,小的排在后面,则这两个位置上的数就叫做构成了一个逆序.在一个排列中,其所构成的逆序的总和叫做该排列的逆序数.用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.如 $\tau(123456)=0,\tau(654321)=15,\tau(536241)=11$.

称逆序数是偶数的排列为偶排列,逆序数是奇数的排列为奇排列.

在一个排列中,把某两个位置上的元素互换位置的变换叫做对换.

定理 1.1 对排列做一次对换改变了排列的奇偶性.

证 设

$$j_1j_2\cdots j_{k-1}j_k\cdots j_lj_{l+1}\cdots j_n \quad (l=k+r,1\leqslant r\leqslant n-k) \tag{1.3}$$

为一个 n 级排列.对换 j_k,j_l 后变为

$$j_1j_2\cdots j_{k-1}j_l\cdots j_kj_{l+1}\cdots j_n. \tag{1.4}$$

我们要证明,排列(1.3)与(1.4)的奇偶性正好是相反的.

先考虑特殊情况:$r=1$,即 j_k 与 j_l 相邻.若 j_k 与前 $k-1$ 个位置和后 $n-l$ 个位置上的数构成逆序,则对换后仍构成逆序;若不构成逆序时,对换后仍不构成逆序.j_l 也如此.但对换前,若 j_k 与 j_l 构成了逆序,则对换后就不再构成逆序了,若对换前 j_k 与 j_l 不构成逆序,则对换后就构成了.综上,有

$$\tau(j_1j_2\cdots j_{k-1}j_lj_kj_{l+1}\cdots j_n)=\tau(j_1j_2\cdots j_{k-1}j_kj_lj_{l+1}\cdots j_n)\pm 1,$$

奇偶性改变了.由此,相邻两个位置上的元素做对换后改变了奇偶性.

当 $r>1$ 时,将一次对换后的结果分解成一系列相邻位置上的对换来实现.

即先将 j_k 依次与其后相邻的元素做对换,做了 r 次后变为

$$j_1j_2\cdots j_{k-1}j_{k+1}j_{k+2}\cdots j_{k+r=l}j_kj_{l+1}\cdots j_n;$$

然后,再将 j_l 依次与其前面相邻的元素做对换,做了 $r-1$ 次后即变为式(1.4).如此这般,因共做了 $2r-1$ 次相邻位置上元素的对换,故改变了原排列的奇偶性. □

推论 1 对排列做奇数次对换改变奇偶性;对排列做偶数次对换不改变奇偶性.

推论 2 在所有 n 级排列中($n>1$),奇、偶排列的个数相等.

证 留作练习. □

推论 3 对于任意 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$,都可以经过至多 $n-1$ 次对换变为全自然序排列 $12\cdots n$,并且所做对换的次数与原排列有相同的奇偶性.

证 留作练习. □

第三节 一般阶行列式的定义

n 阶($n\geqslant 1$)行列式是由 n^2 个数所构成的含有 n 行 n 列的形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的式子. 它的展开式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1.5}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列,求和是对所有 n 级排列进行的.

有时将式(1.5)左边的行列式简记为 $|a_{ij}|_n$,其中右下角的 n 表示行列式的阶数. 下面对这个展开式来具体地分析一下.

首先,展开式(1.5)每项中的 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 是由 n 个元素的积组成的,它们的排法是第一个下标(又叫行标)按自然序排列,而第二个下标(又叫列标)是 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$. 这说明,展开式中每项是取自行列式中不同行、不同列的 n 个元素的乘积. 又展开式中的求和实际上是对列标不同的排法而进行的. 有一个 n 级排列就对应了展开式中的一项,总共有 $n!$ 个排列,因而,n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项. 每项符号的取法是由该项所对应的排列的奇偶性决定的,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时取正号,为奇排列时取负号. 由定理 1.1 的推论 2 知,行列式展开式中,正负号的项数一样多,同为 $n!/2$ 项.

读者不妨对三阶行列式,分别用定义式与画线法进行展开,加以领会.

例 1.3 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这是一个主对角线(即左上角到右下角这条连线)之下的元素都是 0 的行列式,这样的行列式叫做上三角(形)行列式. 下面我们来计算它的值. 由行列式展

开的定义式，有

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}}a_{nj_n}. \tag{1.6}$$

由于该行列式中有许多位置是零，因而展开式中无疑将有一些项的值为零. 把这些值为零的项都去掉，余下项的和即为 D 的值. 下面开始选定可能的非零项，从确定排列着手.

j_n 可以取 $1,2,\cdots,n-1,n$ 中的任一个数，若 j_n 不取 n，则 a_{nj_n} 必取第 n 行中前 $n-1$ 个位置上的某一个元素，无论哪个，它们都是 0，从而 a_{nj_n} 所在的项也都是 0. 所以 j_n 只有取 n，这时 $a_{nj_n}=a_{nn}$.

再看 j_{n-1} 的取法. 应该看到，j_{n-1} 只能在 $1,2,\cdots,n-1$ 中取. 若 j_{n-1} 取自 $1,2,\cdots,n-2$ 中的某一个元素，则 $a_{n-1j_{n-1}}$ 就是第 $n-1$ 行中前 $n-2$ 个 0 中的一个，这时它所在的项的值也都为 0. 因而，j_{n-1} 只能取 $n-1$，这时 $a_{n-1j_{n-1}}=a_{n-1n-1}$.

这种取法归纳地进行下去，最后，j_2 只能取 2，j_1 只能取 1.

综上，在展开式(1.6)中，除了 $12\cdots n$ 这个全自然序排列之外，其他排列所对应的项都是 0，全自然序排列是偶排列，故有

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即上三角行列式的值等于主对角线元素之积.

例 1.4　考虑行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}$$

的值. 该行列式主对角线以外的元素都是零，这样的行列式称为对角(形)行列式. 由于对角形行列式本身也是上三角形的，故其值亦为主对角元素之积. 所以，$D=a_1a_2\cdots a_n$.

例 1.5　考虑行列式

$$D=\begin{vmatrix} & & & b_1 \\ & & b_2 & \\ & ⋰ & & \\ b_n & & & \end{vmatrix}$$

的值. 寻找在该行列式的展开式中，可能的使所在项为非零的那些排列. 类似的分析知，只有当排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n=n(n-1)\cdots 21$ 时，其所对应于展开式中的项才可能不为零，而其他排列所对应的项都为零. 于是

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 321)}b_1b_2b_3\cdots b_{n-2}b_{n-1}b_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}b_1b_2\cdots b_n.$$

一般讲，按照定义式(1.5)直接计算行列式往往是不可能的(除非低阶或很

特殊的情况),这是因为 n 阶行列式的展开式有 $n!$ 项,而每一项又是 n 个数的乘积.这样,计算一个 n 阶行列式,仅乘法就需要做 $(n-1)n!$ 次,而 $n!$ 是个增大相当快的量.比如 $10!=3\ 628\ 800$ 已经超过 300 万了,而 $12!=479\ 001\ 600$ 已超过 4 亿.但是,10 阶或 12 阶行列式不算太高阶行列式.在许多实际问题中,我们可以有 20 阶或 200 阶以上的行列式需要计算.由此可见,按定义式计算行列式,其计算量实在是太大了!

那么,如何计算一个行列式呢?一般来讲,行列式的计算有两种主要方法:一种是化简法,即在保持阶数不变的情况下,依据行列式的性质将其化简;另一种是降阶法,即将高阶行列式的计算问题归结为低阶的情况.在具体处理行列式问题时,经常需要将这两种方法有机地结合起来加以灵活运用.以下两节,我们将分别介绍这两种方法.

第四节 行列式的性质

在行列式的展开式(1.5)中,其项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的确定是将行指标指定为全自然序排列,而后再对列指标取自不同的 n 级排列,并根据这个 n 级排列的奇偶性确定该项的正负号.我们知道,该项中的诸因子 a_{ij} 一般是可以交换的,一旦将其现有顺序“打乱”,重新随机地排列成 $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$ 的话(其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $k_1k_2\cdots k_n$ 是两个 n 级排列),那么能否只通过这个排列,就可以确定该项是展开式中的哪一项以及它应该带有的符号呢?要解决这样的问题并不难,只需将诸因子的次序做一些调整,使其再变回到行指标为全自然序排列的情况中.由定理 1.1 的推论 3 知,通过调整诸 $a_{i_sk_s}$,将 $i_1i_2\cdots i_n$ 经过对换变为全自然序 $12\cdots n$ 是可行的,与此同时,$k_1k_2\cdots k_n$ 也相应地作了对换,设它变为了 $j_1j_2\cdots j_n$,即

$$a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}\to a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

于是,$a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$ 在展开式中所对应的项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由于诸因子 $a_{i_sk_s}$ 每调整一次顺序,相应地,两个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $k_1k_2\cdots k_n$ 都同时做了一次对换.例如,若前两个因子做一次调整:

$$a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}a_{i_3k_3}\cdots a_{i_nk_n}\to a_{i_2k_2}a_{i_1k_1}a_{i_3k_3}\cdots a_{i_nk_n},$$

则相应的两个 n 级排列有如下对换:

$$i_1i_2i_3\cdots i_n\to i_2i_1i_3\cdots i_n,\ k_1k_2k_3\cdots k_n\to k_2k_1k_3\cdots k_n,$$

根据定理 1.1,在因子的次序调整过程中,式子

$$(-1)^{\tau(i_1i_2i_3\cdots i_n)+\tau(k_1k_2k_3\cdots k_n)}=(-1)^{\tau(i_2i_1i_3\cdots i_n)+\tau(k_2k_1k_3\cdots k_n)}$$

是一个不变量，即不随因子次序的调整而改变. 于是有

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(k_1 k_2\cdots k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2}\cdots a_{i_n k_n}\\
=&(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\
=&(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},
\end{aligned}
$$

从而，行列式的展开式又可以写成如下更一般的形式

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \tag{1.7}
$$

$$
=\sum\{(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(k_1 k_2\cdots k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2}\cdots a_{i_n k_n} \mid i_1 i_2\cdots i_n \text{ 与 } k_1 k_2\cdots k_n \text{ 为 } n \text{ 级排列}\},
$$

等号右侧表示对集合中所有元素求和.

上式中，等号右侧的集合表面上看有 $n!\cdot n!$ 个元素，实际上只有 $n!$ 个. 另外，在这个新展开式中，行指标与列指标地位是完全平等的. 但是注意，也可以特殊化. 即无论是行指标还是列指标，任意固定其一而对另一指标取遍所有 n 级排列进行求和，那么该和式仍有 $n!$ 项，从而仍是行列式的展开式. 当将 $i_1 i_2\cdots i_n$ 固定为 $12\cdots n$ 时，式(1.7)就变成了式(1.5). 从这个意义上讲，展开式(1.7)是(1.5)的推广. 当 $k_1 k_2\cdots k_n$ 固定为 $12\cdots n$ 时，展开式(1.7)成为了

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}. \tag{1.8}
$$

这个展开式是列指标按全自然序排列而对行指标的所有 n 级排列进行求和的.

设

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix},\quad
D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\
a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

称行列式 D^{T} 为 D 的转置行列式. D^{T} 可以看成是 D 的元素沿着主对角线旋转 180°所得，亦可看成是将 D 的所有行(列)按序写成所有列(行)所得(即所谓行列互换).

性质 1.1 行列式转置值不变.

证 令 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，由式(1.8)有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这个结果正是 D 按展开式(1.5)展开的结果. □

由性质 1.1，行列式中关于行所具有的性质，列也同样具有，反之亦然. 因而，下面关于行列式的性质都将是对行叙述的，对列的情况也同样成立，以下我们就不特别指出了.

性质 1.2 行列式可以按行提取公因子，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD_1\text{，其中 } D_1=|a_{ij}|_n.$$

也就是说，如果行列式中某行有公因子 k，则可以将 k 从行列式中提取出来.

证

$$D=\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=k\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=kD_1.$$ □

推论 行列式中某一行元素全为零时，其值为零.

性质 1.3 拆行相加性，即

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $1\leqslant i\leqslant n$.

证 将上面的三个行列式依次分别记为 D,D_1 和 D_2，则

$$D=\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{j_i}+c_{j_i})\cdots a_{nj_n}$$
$$=\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{j_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{j_i}\cdots a_{nj_n}$$
$$=D_1+D_2.$$
□

性质 1.4　行列式两行相同值为零,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0 \quad (1\leqslant k<l\leqslant n),$$

其中 $a_{ki}=a_{li}(i=1,2,\cdots,n)$.

证　利用展开式(1.7)的原理及定理 1.1 来证. 先将行指标固定为 $12\cdots(k-1)l(k+1)\cdots(l-1)k(l+1)\cdots n$(该排列是全自然序排列 $12\cdots n$ 之第 k 与第 l 个元素对换所得),而后对列指标的所有不同排列求和,于是有

$$D=\sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n}(-1)^{\tau(1\cdots l\cdots k\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{lj_k}\cdots a_{kj_l}\cdots a_{nj_n}$$
$$=-\sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{lj_l}\cdots a_{nj_n}$$
$$=-D.$$

所以,$D=0$.　□

性质 1.5　行列式两行成比例值为零,即

$$D=\begin{array}{c|cccc|l} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & \leftarrow\text{第 } i \text{ 行} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} & \leftarrow\text{第 } j \text{ 行} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \end{array}=0 \quad (1\leqslant i<j\leqslant n).$$

证　利用性质 1.2 和性质 1.4 即得.　□

性质 1.6　行列式某行的倍数加到另一行值不变,即