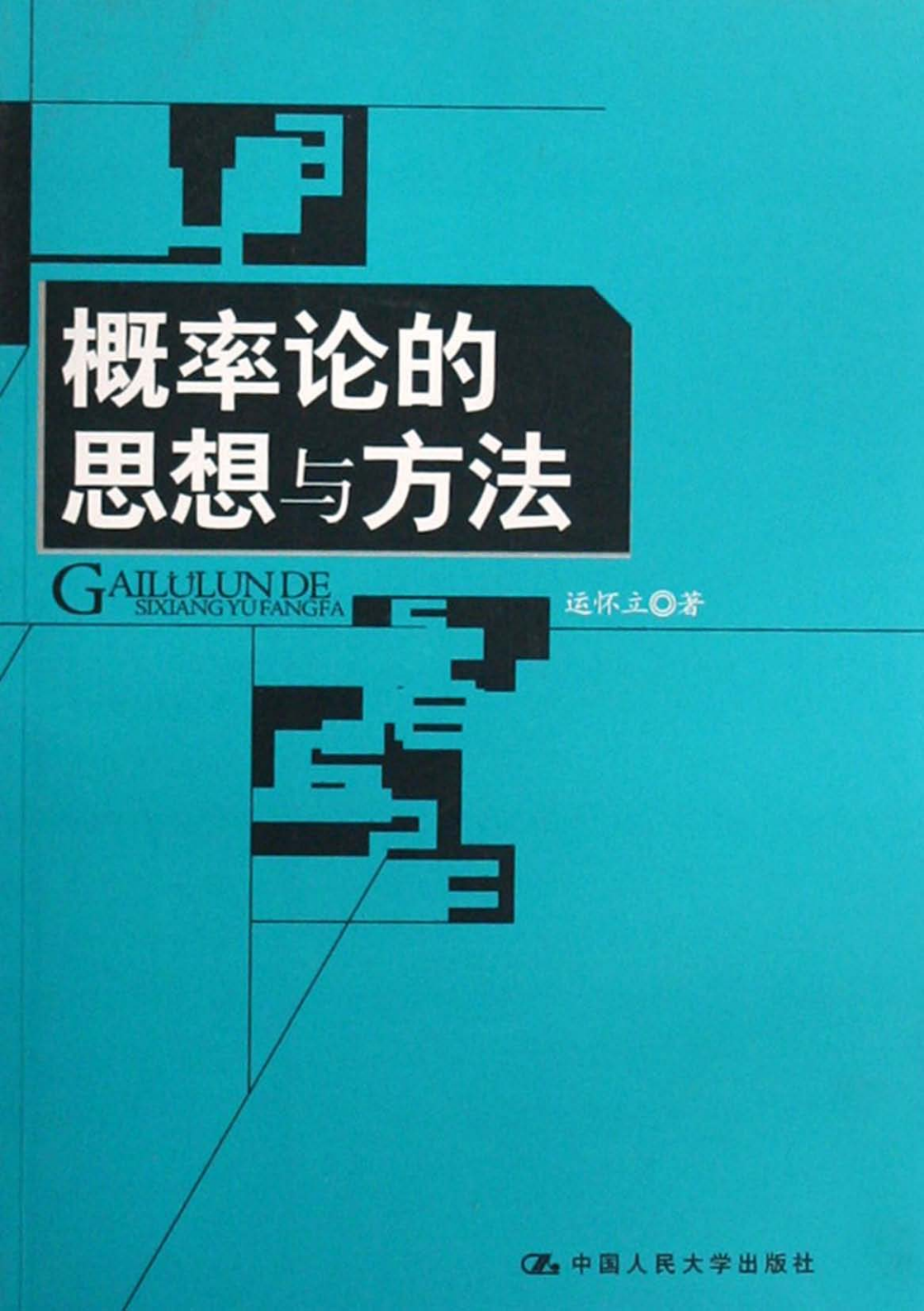




概率论的 思想与方法

GAILULUN DE
SIXIANG YU FANGFA

运怀立◎著

图书在版编目(CIP)数据

概率论的思想与方法/运怀立著.
北京:中国人民大学出版社,2008
ISBN 978-7-300-09404-5

- I. 概…
- II. 运…
- III. 概率论
- IV. O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 083555 号

概率论的思想与方法

运怀立 著

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242(总编室)	010-62511398(质管部)	
	010-82501766(邮购部)	010-62514148(门市部)	
	010-62515195(发行公司)	010-62515275(盗版举报)	
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
规 格	148 mm×210 mm 32 开本	版 次	2008 年 6 月第 1 版
印 张	10.875 插页 1	印 次	2008 年 6 月第 1 次印刷
字 数	301 000	定 价	22.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

序

欣闻运怀立老师的著作《概率论的思想与方法》问世,有幸先睹书稿,深觉其为一本佳作.欣喜之余,应允为之作序.

在瞬息万变的世界环境中,人们逐步适应了和适应着 21 世纪的时代节奏.这是一个知识化和学习化的知识经济时代,社会、政治、经济、文化等都体现着新世纪的发展趋势,教育理论与实践的变化和发展充满了勃勃生机.数学教育也呈现着多姿多彩的可喜局面,保持着自 20 世纪 80 年代以来的迅猛发展势头,研究成果不断涌现,研究水平大幅提高,研究领域逐步拓展,国际交流日益密切.这些都激励着广大教育与科研工作者为促进我国数学教育事业,为实现中华民族的伟大复兴而乐于奉献自己的力量.

随着教育科学的不断发展,各种教育、教学理论纷纷登上国际教育舞台.不少其他领域的新的理念也在改造后被广泛移植、应用到数学教育中来,这也是近些年来,数学教育蓬勃发展的一个重要促进因素.然而,随着“新”的数学教育理论的大量涌现,一些不良的现象也出现了:有些教师片面追“新”而来不及完全、充分地领会和消化理论的全部内涵,就匆匆加以运用,造成教学实践中的失误甚

至错误；也有些教师对新的理论不闻不问，使得不少理论徒有其名，在实践中并未起到应有的作用。

本书作为一本面向普通高校师生的专著，有三个重要特征：

其一，本书没有刻意追求介绍、探讨那些“新”的理论，而是根植于基础的数学思想方法，将问题探讨引向深入、透彻、明晰。数学思想方法是一个古老的话题，自笛卡儿的《方法论》，到数学公理化方法的形成，再到对数学思想方法本身的产生与发展规律的反思，前后经历了 400 多年。今天，突出这一思想，仍有将理论进一步深化和更好地服务于数学教学实践的现实意义。

其二，本书并非局限于纯粹的理论分析，而是以理论与实践相结合。作者运用适当的数学思想方法对概率论中的各种类型的实际问题作了详尽的分析，使学生能够从中领会到那些重要思想方法的应用范围与技巧；同时也给出了在概率论问题解决中学生认知的心理学分析和思维策略，这对教学过程有直接的指导意义。

其三，本书给出了大量能够让学生深入理解、灵活运用数学思想方法的概率论实例的解答过程与注解，有利于培养学生良好的分析、思考问题的习惯。同时，还配备了适量的练习供学生自行研学，这不仅有利于调动学生的积极性，而且更有利于学生加深对理论知识的理解；不仅突出了数学思想方法在概率论中的价值，而且更有利于学生掌握先进的数学思想武器并将其灵活运用于解决其他学科及实际问题中去。

研究数学思想方法的书籍并不多见，运怀立老师撰写的专著《概率论的思想与方法》是继其著作《线性代数的思想方法及其教学》于 2003 年出版后的又一本力作。这两本书都是对数学学科思想方法所做的积极的、有意义的探索，是将数学方法应用于高等数学的研究、教学与学习的创新性成果。

运怀立老师从事概率论的教学工作已逾 10 年，对数学方法论的研究近 15 年。在从事教学工作期间，他一直致力于数学教育的教学改革、课程改革研究，曾在天津师范大学系统地学习和研究“数学

方法论”，后又在天津大学获得系统工程专业博士学位，参加过教育部“九五”规划项目“数学教育心理学研究”（第三负责人）、“十五”规划项目“数学教学效率论”（第二负责人）等多项课题项目的研究。目前正主持天津市教育科学“十一五”规划项目“高等数学教学评价研究（G067）”，《概率论的思想与方法》一书即为该项目的重要成果之一。

本书是作者在认真学习国内外数学科学方法论的基础上，结合自己多年的数学教学和科学研究的实践，经过长时间探讨的辛勤劳动的成果。其显著特点是系统性、深刻性与思辨性，它的内容翔实丰富，结构清新独特，笔调简洁流畅，叙述通俗易懂，有启发性。它将概率论的本质、内容、思想、方法以及发展历史有机地融合在一起，既有对概率论重要思想方法本质的深层次探讨，又有对有关哲学思想的深入分析，还有对美学思想、数学家思想等的详细论述。

我相信，这本《概率论的思想与方法》一定可以使广大师生的思维方式得以飞跃，而不仅是一本文字材料。我也相信，广大师生能够从本书中发现自己所需要的养分，提高自身素质，实现自身的全面发展，为提高全民族的数学素养奠定基础。

我们期待着广大师生在教学中对本书作出自己的鉴定和检验，也期待着以后会有更多类似的好书展现在广大读者面前。

徐利治

2008年1月于北京

作者的话

数学方法论是研究数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新法则的一门学问. 关于数学发展规律的研究属于宏观数学方法论的研究范畴, 关于数学思想方法以及数学发现、发明与创新的研究则属于微观数学方法论的研究范畴.

微观的数学方法论, 对数学的研究、教学和学习, 都有重要的指导意义. 对研究来说, 数学方法论对各种方法进行分析、比较、评论, 从而引导人们作出更深刻、更重要的发现和发明; 对教学而言, 数学方法论的意义在于将思想、方法与具体的内容有机地结合起来, 使学生不只停留在形式上的推演, 而能深入地理解数学的本质和意义, 不仅知其然, 而且知其所以然; 用数学方法论来指导学习, 不仅学习知识、理论, 而且学习前人进行科学创造的思想方法, 领会前人是怎样工作的, 这对培养独立创新能力至关重要.

研究数学思想方法的书籍并不多见, 笔者撰写的《概率论的思想与方法》是继 2003 年《线性代数的思想方法及其教学》出版后的又一本专著. 这两本书都是对数学学科思想方法所做的积极的、有意义的探索, 是将数学方法应用于高等数学的研究、教学与学习的成果.

概率论是高等数学的一门重要基础课,是进一步学习各有关后续课程的阶梯.这门课程经过近三个世纪的发展和完善,形成了一套严密的、抽象的、形式化和逻辑性很强的理论体系.学习这门课程常会遇到较大的困难.作为从事概率论教学的教师,每一位都会面临着“教师如何教”、“学生如何学”的问题.

《概率论的思想与方法》一书作为天津市教育科学“十一五”规划项目“高等数学教学评价研究(G067)”的主要成果,通过多角度、深层次、全方位地探讨了概率论学科的思想与方法.笔者希望,此书能为普通高等学校师生加深对数学的精神、思想和方法的理解,树立先进教育观念及推动数学教育理论的深入研究作出贡献.

在本书的写作过程中,著名数学家、数学教育家徐利治先生,给予了充分肯定和亲切鼓励,并欣然提笔为本书作序,这将成为笔者继续致力于对数学思想方法研究的动力,在此表示衷心的感谢.天津师范大学《数学教育学报》副主编、编辑部主任王光明教授为本书的整体框架构思提出了许多有益的意见和建议,同时给予了诸多无私指导与关怀,令笔者深为感动.另外,天津财经大学数学系黄宜平老师和我的研究生刘博、杨珊珊,也做了很多录入、校对的工作,在此一并致谢.在本书付梓之时,还要感谢中国人民大学出版社潘旭燕、李臻云二位编辑,是出版社同志们的大力支持才使本书得以出版.

在写作过程中,笔者参考了大量的著作和文章,许多论著对我的写作给予了很多启迪.恕未能一一注出参考文献,在此,谨向有关作者致以诚挚的谢意.

囿于时间和能力,笔者希望本书能从一定程度上反映我国在数学思想方法方面的研究现状,但写作过程中常感到心有余而力不足,故本书只作引玉之砖.囿于条件和能力,本书不妥之处在所难免,恳请各位专家、学者不吝赐教.

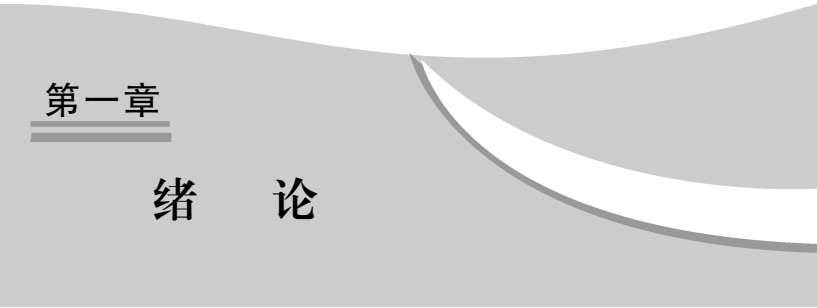
运怀立

2008年1月于天津

目 录

第一章 绪论	1
第一节 概率论的创立与发展	1
第二节 什么是数学思想方法	4
第三节 数学思想方法教学的理论探讨	7
第四节 数学思想方法教学的实践分析	26
第二章 概率解题中的辩证思维	51
第一节 陌生与熟悉	51
第二节 进与退	63
第三节 正与逆	76
第四节 合与分	88
第五节 升与降	99
第三章 怎样才能学好概率论	114
第一节 要深刻理解每一个数学概念	114
第二节 要牢固掌握重要的定理、公式和法则	128

第三节	要掌握常用的解题方法和技巧	144
第四节	综合运用数学中各分科的知识	158
第四章	概率论中的问题和方法	170
第一节	排列与组合	171
第二节	基本概念	180
第三节	随机事件及其概率	213
第五章	随机变量的分布与数字特征中的问题和方法	262
第一节	随机变量中的重点概念	262
第二节	随机变量的分布	277
第三节	随机变量的数字特征	308
附表：	标准正态分布函数表	332
参考文献		335



第一章

绪 论

如果说数学起源于人类生存的需要,或者起源于人类理智探索真理的需要,那么数学思想和方法就是伴随着数学的产生而产生,伴随着数学的发展而发展的.但是数学思想和方法的提出及研究却是随着数学教育的发展而逐步“热”起来的.正如人类在探索真理的过程中曾走过曲折的道路一样,数学教育的发展也经历过曲折与反复、成功与失败.时代的局限、统治阶级的意志、哲学思想的影响、宗教的束缚、科技的发展、社会的进步,以及不同民族的文化背景,都给数学教育留下了深深的烙印.生相伴,谊相随,数学思想和方法的发展几乎与此同时也经历了几起几落,甚至是大的沉浮.

第一节 概率论的创立与发展

17 世纪中叶,在法国出现了对赌博问题的研究.也正是对这个问题的研究,推动了数学的发展,使一门崭新的学科——概率论诞生了.

对这一问题的研究是这样开始的:有一次,爱好赌博的德梅雷

(de Méré, 1610—1684, 法国)向其好友、著名数学家帕斯卡(B. Pascal, 1623—1662, 法国)提出了有关赌博的各种问题. 例如, 甲乙双方是竞技力量相当的对手, 每人各拿出 32 枚金币, 以争胜负. 在竞争中, 取胜一次, 得一分, 最先获得 3 分的人取得全部赌金 64 枚金币. 可是, 因某种缘故, 竞争 3 次, 赌博被迫终止. 而此时, 甲得 2 分, 乙得 1 分, 问赌金如何分配?

1654 年 7 月 29 日, 帕斯卡给费尔马(Fermat, 1651—1665, 法国)写信, 商量如何解决这类问题. 来往书信持续三个月之久, 在 1654 年 10 月 27 日, 帕斯卡又给费尔马去信说:“你的信所阐述的内容是令人满意的, 你所采用的分配方法是正确的, 深感敬佩. 这种分配方法完全是你创建的. 我所想出的方案与你的方法是完全不同的, 但都达到了同样的目的……”帕斯卡的信宣告了讨论至此结束. 但在这期间他们之间到底是怎样讨论这一问题的呢?

实际上, 在这三个月的书信来往中, 他们以赌博为例认真地讨论了有关的数学问题. 在 7 月 29 日的信中, 帕斯卡认为, 当甲得 2 分, 乙得 1 分时赌博终止, 那么甲应该说:“任何情况下, 我有权获得赌金的一半, 即便在下一局中乙获胜, 赌金也应平分, 因而首先得 32 枚金币. 对于剩下的, 或许是你赢或许是我赢, 机会均等, 所以应平分剩下的 32 枚金币. 因此最后我应得 $48 (= 32 + 16)$ 枚金币.”假设两赌徒中甲赢了两局, 乙一局未赢, 那么接下来可能出现的情况是: 若甲再赢一局, 得 3 分, 将获得全部赌金; 若乙赢一局, 出现 $2:1$ 的局面, 这是上面讨论过的. 因此, 不管甲在下一局是输是赢, 有 $3/4$ 的赌金应属于甲. 至于剩下的 $1/4$ 赌金, 甲乙两赌徒获得赌金的机会相等, 应平分. 故甲应得赌金的 $7/8$, 乙应得赌金的 $1/8$. 假设甲赢一局, 乙一局未赢, 则可出现如下情况: 若甲再赢一局, 形成 $2:0$ 的局面, 这也是上面讨论过的情况; 若乙胜了这一局, 形成 $1:1$ 的局面. 因此在任何情况下, 甲有权获得赌金的 $1/2$, 乙有权获得赌金的 $1/8$. 至于剩下的 $3/8$ 赌金, 他们得到的机会相等, 应该平分.

在这里帕斯卡没有给出一般性的证明,而且在叙述时,显得有些混乱,很难理出头绪。

费尔马收到帕斯卡的信后,利用自己擅长的组合思想来解决有关问题,他的思路清晰,易于理解,并十分重视各种概型,指出不能把独立概率事件和条件概率事件混为一谈。而后,帕斯卡认真地研究了自己的方法,修改后的方法成为概率研究的重要转折点。

费尔马和帕斯卡在通信中,虽然没有明确揭示出概率的定义,但是,在研究赌徒取胜的机会时,涉及有利情形数与所有可能情形数的比,这实际上是概率定义的雏形。

1657年,荷兰数学家、物理学家惠更斯(Huygens, 1629—1695)也试图解决帕斯卡与费尔马通信中提出的问题,他撰写了《论赌博中的计算》一书,建立了概率和数学期望等重要概念,揭示了他们的性质和演算方法,这是最早的概率论著作。

到了18世纪,很多数学家从事概率的研究。伯努利(J. Bernoulli, 1654—1705, 瑞士)的巨著《精度术》在瑞士巴塞尔出版。在这部著作中,伯努利提出了新的概念和定理,尤其是论证了概率论的重要定律之一——“大数定律”,并给出了证明,这使建立在经验之上的频率稳定性推测进一步理论化了。从此,由对特殊问题的求解,发展到了一般理论概括,为概率论这门学科的成熟奠定了基础。

继伯努利之后,法国数学家德莫佛(de Moivre, 1667—1754)于1718年发表了《机遇原理》。书中提出了概率乘法法则,以及“正态分布”和“正态分布律”的概念,为概率论的“中心极限定理”的建立奠定了基础。

18世纪法国蒲丰(Buffon, 1707—1788)在《或然算术试验》中,把概率和几何结合起来,开始了几何概率的研究。

经过伯努利和德莫佛的努力,数学方法被有效地应用于概率研究之中,这就把概率论的特殊发展同数学的一般发展联系起来了。

19世纪初期,概率论的巨大进步是与拉普拉斯(Laplace, 1749—1827, 法国)分不开的,可以说,他是这一时期概率论发展的

集大成者，他的经典著作《分析概率论》，总结了这一个时代的概率研究。这部著作明确地表述了概率的基本定义和定理，严格证明了德莫佛-拉普拉斯定理，建立了误差理论和最小二乘法，研究了广泛的统计问题。这部著作的显著特色在于广泛而又灵活地运用了数学分析的方法。以前，概率论被当作组合数学的一部分，拉普拉斯实行方法改革之后，使之成为分析数学的一部分，从而为现代概率论的发展开辟了新途径。

后来，高斯（Gauss, Carl Friedrich, 1777—1855，德国）和泊松（Poisson, 1781—1840，法国）等人进一步地发展了概率论。高斯确立了最小二乘法和误差论的基础；泊松推广了大数定律，引入十分重要的“泊松分布”。

俄国的切比雪夫（Chebyshev, 1821—1894，俄国）也著书立说，提出大数定律，其著作无论是理论意义，还是实用价值都是很大的。

1917年苏联科学家伯恩斯坦（1880—1968）首先给出了概率的公理体系。科尔莫哥洛夫于1933年又以更完善的形式提出了公理结构。从此，基本完成了现代意义上的概率论。

1896年，英国传教士傅兰雅（Joh Fryer, 1839—1928）和毕衡芳（1833—1902，中国）合译概率论，定名为《决疑数学》。从此，概率论开始传入我国。但是各种译著的译名很混乱，如有“或然率”，“信率”，“几率”，等等，直到20世纪初，才正式定名为“概率”，废除其他译名。从21世纪开始，我国对概率论进行了系统的学习和研究，取得了一定的成果。

概率论的创立与发展的过程也极大地推动了数学思想和方法的发展，尤其是形成了独具特色的概率论的思想与方法。

第二节 什么是数学思想方法

19世纪末20世纪初，由于数学基础学科中的重大思想、方法

的出现,尤其是新的数学公理化方法的形成以及数学基础理论研究的深入开展,人们渐渐地关心数学各分支的内在联系,开始注重对数学思想、方法本身的产生及其发展规律的探讨.历史上有许多数学家在他们对数学科学本身作出贡献的同时,也从事过数学思想、方法理论的研究,撰写出一些有影响的著作.例如,解析几何的创始人笛卡儿(Descartes, Rene, 1596—1650)著有《方法论》、微积分的创始人之一莱布尼兹(Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646—1716)著有《科学与方法》、法国大数学家阿达玛著有《数学领域的发明心理学》等.这些成果为我们今天研究数学思想、方法及其教学提供了理论基础,也为数学思想、方法教学的顺利实施提供了可能性.

特别是从20世纪50年代起,许多知名的数学家——尤其是长期从事数学教育的数学家,集中精力进行了对数学思想、方法的教育功能的研究,取得了较大的进展,如美国M.克莱因著有《古今数学思想》,美籍匈牙利数学家、数学教育家G.波利亚著有《数学与猜想》、《数学的发现》、《怎样解题》,苏联亚历山大罗夫著有《数学——它的内容、方法和意义》、日本米山国藏著有《数学的精神、思想和方法》等,这些著作就是最著名的一些研究成果.这些丰富的研究成果的重要意义不仅在于为我们进一步研究提供了珍贵的参考文献,而且还在于它拉开了数学思想方法教育功能研究的序幕.

进入20世纪80年代,数学方法论作为研究数学的发展规律、数学的思想、方法以及数学发现、发明与创新等的法则的一门新兴学科,在我国数学界,特别是数学教育界获得了广泛重视.这期间徐利治先生所著的《数学方法论选讲》等是十分有意义的,其工作是奠基性和开创性的,直接推动了我国数学教育界开展数学思想、方法及其教学的研究.

进入20世纪90年代,随着教育的不断深入,国内许多专家、学者对数学思想、方法及其教学的研究兴趣日益浓厚,又有了许多新著出版,如郑毓信先生的《数学方法论入门》,张奠宙与过伯祥两位先生合著的《数学方法论稿》.不少报刊、杂志也刊登过许多

有价值的论文.特别是1992年8月国家教委(现教育部)制定的《九年义务教育数学教学大纲》中明确了数学思想、方法是数学知识的组成部分后,数学思想方法及其教学的研究更是受到了普遍关注.有关论著如雨后春笋般涌现,其涉及面宽而广,解决了不少教学实际问题,极大地推动了我国数学教育改革的进程,数学思想方法及其教学也逐渐成为我国数学教育的一个独具特色而又富有深远意义的研究领域.那么,到底什么是数学思想、方法呢?

“方法”一词,起源于希腊语,字面意思是沿着道路运动.其语义学解释是指关于某些调节原则的说明,这些调节原则是为了达到一定的目的所必须遵循的.《苏联大百科全书》中说:“方法表示研究或认识的途径、理论或学说,即从实践上或理论上把握现实的,为解决具体问题而采取的手段或操作的总和.”美国麦克米伦公司的《哲学百科全书》将方法解释为“按给定程序达到既定成果必须采取的步骤.”我国《辞源》中解释“方法”为“办法、方术或法术”.从科学的角度来说,方法是人们用以研究问题、解决问题的手段和工具,这种手段和工具与人们的知识经验和理论水平密切相关,是指导人们行动的原则.中国古代兵书《三十六计》开篇就写道:“六六三十六,数中有术,术中有数.”说明古人早已意识到数学与策略和方法之间的密切关系.我们认为,数学方法就是提出、分析、处理和解决数学问题的概括性策略.

在现代汉语中,“思想”解释为客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果.《辞海》中称“思想”为理性认识.《中国大百科全书》认为“思想”是相对于感性认识的理性认识成果.《苏联大百科全书》中指出:“思想是揭示客观现象的原则.”毛泽东在《人的正确思想从哪里来》一文中说:“感性认识的材料积累多了,就会产生一个飞跃,变成了理性认识,这就是思想.”综合起来看,思想是认识的高级阶段,是事物本质的、高级抽象的、概括的认识.我们认为,数学思想是数学中的理性认识,是数学知识的本质,是数学中高度抽象、概括的内容,它蕴含于运用数学方法分析、处理和解决数学问题的过程之中.

综上,我们可将数学思想、方法的定义做以下概括:所谓数学思想,就是对数学知识和方法的本质的认识,它是数学科学和数学学科所固有的,是数学的灵魂;所谓数学方法,就是解决数学问题的策略和程序,是数学思想的具体化反映,它是数学的根本.在一定的数学知识基础上,运用数学方法解决问题的过程就是感性认识不断积累的过程.当这种积累达到一定程度时就会产生飞跃,从而上升为数学思想.数学思想对数学方法起着指导作用;而数学方法较之数学思想具有更大的灵活性,它可促进数学思想的发展.因此,人们通常将数学思想和方法看成一个整体概念——数学思想方法.

第三节 数学思想方法教学的理论探讨

数学思想方法是数学中的精髓,是联系数学各类知识的纽带,是数学学科赖以建立和发展的重要因素.因为只有掌握了数学思想方法才能抓住数学的灵魂,掌握数学的“通性”、“通法”,才能从整体上、本质上认识数学,优化思维品质,提高数学能力.

历史永远是现实的一面镜子.古今中外数千年的数学发展史为我们提供了丰富的经验和足以为戒的教训,并深刻地告诉我们:数学的发展史就是一部生动的数学思想方法发展的历史.数学思想方法是数学知识的本质,是开启数学知识宝库的钥匙,是层出不穷的数学发现的源泉.由于数学思想方法比数学知识具有更强的概括性和包容性,它们犹如网络将全部数学知识有机地编织在一起形成环环相扣的结构和息息相关的系统,所以数学教学必须通过数学知识的教学和适当的解题活动来突出数学思想方法的教学.

一、数学思想方法教学的思维科学基础

数学思想方法和数学知识点汇成了数学结构系统的两条“河流”,二者既有联系又有区别,具体的知识点是数学的外显形式,易

于发现,是一条“明河流”,任何一个数学分支无不是以它来构筑自己的“躯体”;数学思想方法则是数学的内在形式,是获取数学知识、发展思维能力的动力工具,是一条具有潜在价值的“内河流”,把握它就等于找到了思维教育的突破口.正因为数学知识是“点石成金”以后的金而数学思想方法才是“点石”之指,这就要求我们在数学知识教学的同时,必须注重数学思想方法的有机渗透和充分发挥其自身具有的统帅作用.只有这样,才能有助于学生形成一个既有肉体又有灵魂的活的数学知识结构,从而不仅会促进学生数学能力的发展,而且还会推动学生思维品质乃至整体素质的提高.

反过来,数学思维品质的养成,势必会增强学生对数学知识尤其是对数学思想方法的理解、掌握和消化吸收能力,从而有助于数学思想方法的精神实质的贯彻执行和数学思想方法教学的顺利进行.数学思想方法和数学思维好比数学教学之双肩,任何一方的畸形发展都将直接影响数学教学的整体效果,因此发展数学思维对促进数学思想方法教学具有较为积极的意义.

(一)数学教学的本质决定了数学教学是数学思维活动的教学

苏联著名心理学家 A. H. 列昂杰耶夫有充分理由地认为:“对待教育的一个极其重要的态度——这就要根据对人的要求:在生活中应当是怎样的人,为此应当用什么来武装人,人的知识、人的思维、情感感应是怎样的,要根据对人的这些要求来对待某些教育和教养的人物.”因此,在组织和进行教学的时候,必须始终注意我们社会所建立的人的理想.

如果用这个观点来看一看普通教育的任务,其中也包括学校数学课程的任务,那么我们会得出一个结论:当前首要的、最重要的任务之一,就是发展学生思维能力的任务.

在数学教育过程中所形成的人的品质分为一般品质和特殊品质.思维当然是属于一般品质,它是在所有各科教学过程中,在学生全部生活过程中形成的.但是公认的历史经验证实,数学教学在思维的形成过程中起了最重要的和特别大的作用.