全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学 上册

GAODENG SHUXUE

工科类

尹海东◎主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高　等　数　学

上　册

工　科　类

尹海东　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：工科类．上册/尹海东主编．—北京：中国农业出版社，2007.8
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-11863-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.尹…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 112995 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
责任编辑　龙永志　颜素容

北京中兴印刷有限公司印刷　新华书店北京发行所发行
2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：720 mm×960 mm　1/16　印张：19.5
字数：343 千字
定价：26.00 元

内容提要

本书是根据高等数学课程教学基本要求编写的工科高等数学教材。全书共分上下两册。上册的主要内容包括：极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程和 Mathematica 软件的介绍；下册的主要内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。为便于读者学习，各章最后都编写了演示与实验和总复习题，全书编写了习题解答。

本书适合作为普通高等院校工科专业本专科学生的学习教材，也可作为远程高等教育、成人教育、高等职业教育的教材，或研究生、教师和科技人员的学习参考书。

编 写 人 员

主　编　尹海东
副主编　王淑艳　柏继云
参　编　郭　亮　田晓筠　王丽君

前　言

高等数学课程是农林类高等院校工科学生的重要基础课程，是工科学生后续学习和从事科研工作的基础。目前国内通行的工科类高等数学教材比较多，但与农林类院校相匹配的，符合农林类院校学生特点和学习方式的教材尚不多见。

本教材的编写是按照高等数学课程教学基本要求来进行的。编者均为全日制农林类普通高等学校长期从事高等数学和应用数学教学工作的一线教师，具有丰富的教学经验，并对农林类院校高等数学教学内容、教学要求和工科学生的学习特点非常了解。编写时都尽力做到内容选择適当，符合教学要求；章节编排重点突出，难点分散；文字叙述深入浅出，便于阅读；理论分析注意几何和物理的解析，进行必要的抽象概括和严密的逻辑推理。

本教材注意将数学素质的培养融合在教学内容中，突出微积分的基本思想和基本方法。在内容上力求适用、简明、易懂；在例题的选择上力求具有层次性、全面、典型；为了提高学生的科学计算能力，书中的每章之后配备了数学实验；同时，为了便于学习，在书后还配备了所有习题和总复习题的答案。

本教材分为上、下两册，全书内容覆盖了现行农林类院校工科高等数学教学的全部内容。本书通用的教学时数在 160～180 之间，教师可根据自己学校的不同情况，对书中的内容进行适当的删减。书中的数学实验是为了配合高等数学教学而设置，所以课后的演示与实验还是比较简单的，只是要求能用 Mathematica 进行有关高等数学的运算，更深层次的数学实验本书并来涉及，有兴趣的读者也可自己阅读有关书籍。

本教材的编写分工如下：东北农业大学尹海东负责提出全书编写的总体思路，并编写第四章、第五章；王淑艳编写第一章和所有

的演示与实验；柏继云编写第二章、第三章；郭亮编写第六章；大兴安岭职业学院田晓筠演算了习题并给出习题解答；河北农业大学海洋学院王丽君编写了 Mathematica 简介；山西农业大学的张玉峰编写了第十章的前六节，并对下册全部内容进行了修改、校对和统稿；郝新生编写了第十一章，同时参与了下册书稿的校对和统稿工作；河北农业大学的罗胡英编写了第七章；赵喜梅编写了第九章，并为第七章和第八章作图；韩忠海编写了第八章的前四节；杨俊仙编写了第八章的其余部分和第十章的第七节。

本书编写过程中得到东北农业大学和山西农业大学数学系全体教师的热心帮助，任课教师对本书提出了很多中肯而又宝贵的意见；本书在出版的过程中得到了东北农业大学教材科臧宏科长的大力支持，在此表示感谢。由于编者水平有限，本教材在编写过程中难免有一些缺点和不足，请各位读者批评指正。

编　者

2007 年于哈尔滨

目　录

第一章　极限与连续

高等数学的主体内容是微积分．微积分的发展历史可以追溯到 2000 多年以前，但从真正意义上讲，微积分作为一门比较成熟的学科，却开始于 17 世纪中叶．

初等数学的研究对象主要是一些不变量，即所谓常量；而以微积分为主体的高等数学，却以变化着的量，即所谓变量为研究对象．在中学我们就知道，变量的变化过程通常不是孤立的，而是多个变量彼此之间的关联变化．表达不同变量之间变化关系的常用手段是函数，所以，可以说，高等数学是以函数为研究对象的一门学科．

中学阶段我们对于函数问题已经有所涉猎，不过我们所讨论的函数性质基本上局限在常态的、宏观的范围之内．当函数所涉及变量有无限微小的变化，或者变化的趋势无限放大时，函数会表现出一种什么样的特征？函数的量变能否引起质的变化？这些无疑是值得思考的问题．微积分体现的就是研究这些问题的基本思想．作为微积分的基础，上述问题可以用一个准确的概念——极限来描述．

本章我们将首先回顾和拓展函数概念，并在此基础上给出极限的定义和相关性质，最后对函数连续性作出说明．

第一节　函　　数

一、函数及相关概念

(一) 区间与邻域

在中学，我们已经熟悉了集合的基本概念和基本运算．在高等数学中，我们研究函数时所涉及的集合一般是实数集，记为 **R**；或者是实数集的子集，一般用大写字母 A，B，C，…来表示．除了集合的通常表达方式之外，为了研究方便，我们还喜欢用另外两种方式来表达一个数集，即：区间与邻域．

1. 区间

区间是一种特殊的数集，通常用 I 表示．常用的区间有：

设 a，b 都是实数，$a<b$，数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a, b]$. 即：

$$[a, b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a, b)，即：

$$(a, b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地，称 $[a, b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 为半开区间．

以上 4 个区间，统称为有限区间．$b-a$ 称为这些区间的长度．

将有限区间的定义加以推广，可以得到以下常用的无限区间的概念：

$$[a, +\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};\qquad (a, +\infty)=\{x\mid x>a\};$$

$$(-\infty, b]=\{x\mid x\leqslant b\};\qquad (-\infty, b)=\{x\mid x<b\};$$

$$(-\infty, +\infty)=\{x\mid x\in \mathbf{R}\}.$$

上述表达中，符号“∞”读作无穷大，“$+\infty$”读作正无穷大，“$-\infty$”读作负无穷大．需要注意的是，“∞”仅仅是一个记号，表达“无穷大”这样一种性质；而不是具体的哪一个数．

2. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域. 记作 $U(a, \delta)$，点 a 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径．

因 $|x-a|<\delta$ 相当于 $-\delta<x-a<\delta$，即 $a-\delta<x<a+\delta$，所以：

$$U(a, \delta)=(a-\delta, a+\delta).$$

a 为开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 的中心，2δ 为这个区间的长度．如图 1－1 所示．

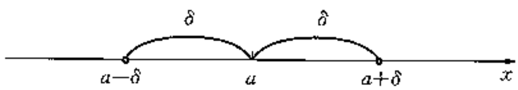

图 1－1

有的时候，为了特殊的需要，可以研究在邻域 $U(a, \delta)$ 中去掉点 a 的集合，该数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$．

(二) 函数概念

定义 1.1.1 设 D 为实数集 $\mathbf{R}$ 的一个子集，如果对于 D 中任意给定的一个元素 x，根据某一对应法则，都有确定的实数 y 与之对应，则称这种对应关系为函数关系，或者简称为函数．记作：

$$y=f(x) \quad x\in D$$

其中，x 称为自变量，数集 D 称为定义域，也就是自变量的取值集合；y 称为因变量，而数集

$$\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的值域，值域表达的是因变量所有可以取到的值的集合．

显然，函数的值域是由定义域和对应法则确定的，所以我们经常说，定义域和对应法则是函数的两个要素．考查两个函数相同与否，要同时考查这两个要素．

在定义 1.1.1 中，我们注意到，有一个地方的叙述与中学略有不同，那就是因变量 y 的唯一性．事实上，如果要求与 x 对应的 y 是唯一的一个，那么像 $x^2+y^2=1$ 这样的两个变量之间的对应关系，就不能纳入到函数的范畴之中了．为了以后研究问题的需要，我们把对因变量 y 的唯一性要求去掉，这就意味着如 $x^2+y^2=1$ 这种对应关系，我们也视为函数关系．只不过，如果 x 与 y 的对应关系是唯一的，我们把这种函数称为单值函数；如果对于确定的 x，有两个或者两个以上的 y 与之对应，我们把该对应关系称为多值函数．

对于多值函数而言，一般可以将它分拆为多个单值函数．比如说将 $x^2+y^2=1$ 分拆为 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 等．这样的由多值函数分拆出来的单值函数，一般称为原函数的单值分支，我们看到，如果从单值分支的角度看多值函数，那么多值函数不过是一些单值函数的组合罢了．

当然，以后的学习中，多数时候我们遇到的都是单值函数．

函数的定义域是确定函数关系的要素之一．通常函数的定义域取决于函数关系的背景．如果单纯的给出函数关系的数学表达式，而忽略其背景来源，那么就可以认为使得函数表达式有意义的自变量取值范围就是函数的定义域．

例 1　求函数 $y=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域．

解　由函数表达式可知，为使函数表达式有意义，必须

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ \log_2 x\geqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x\geqslant 2$$

即原函数的定义域为 $\{x \mid x\geqslant 2\}$．

（三）函数的图像与表示法

1. 函数的图像

若给出函数表达式要求画出图像时，一般情况下采用描点法来完成．即在函数的定义域 D 内选出一些点 x，求出相应的函数值 $y=f(x)$，把一对对 $(x,\ y)$ 排列成表，将每一对 $(x,\ y)$ 作为点画在坐标平面 xOy 上，最后，

用平滑曲线将这些点从左到右顺次连接起来，这样得到的曲线就是函数 $y=f(x)$的图像．我们中学时学习的很多函数图像都是采用这种方法做出来的，如 $y=\sqrt{x}$，$y=x^3$ 等．这也是函数作图的最常用方法．

那么，函数图像的确切定义究竟是怎样的？

定义 1.1.2 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，考虑直角坐标系 xOy，以自变量的值作为横坐标 x，以对应的函数值 $f(x)$ 作为纵坐标 y，点 $M(x, y)=(x, f(x))$的全体构成的集合

$$\{M(x, y) \mid y=f(x), x\in D\},$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图像．

一般说来，函数 $y=f(x)$ 的图像是一条或几条曲线（直线作为特殊的曲线）．对于单值函数，任意一条平行于 y 轴的直线与 $y=f(x)$ 的图像至多有一个交点．

需要指出的是，我们所说的曲线是函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图像有两方面的意义：一方面是指，曲线上的每一点的坐标 (x, y) 都满足 $y=f(x)$；另一方面是指，坐标为 $(x, f(x))$ 的点都在曲线上．这也是函数表达式与其几何图形之间对应关系的共性．

2. 表示法

表示函数的方法最常用的有三种：图像法、列表法和公式法．

图像法就是我们上面刚刚提过的方法，即用坐标平面上的曲线来表示函数；该方法能够清楚直观地表示出函数的许多性质．

列表法是将自变量的一系列值与对应的函数值排列成表，直接通过表中数据来反映函数特性；例如，我们所熟悉的对数表、三角函数表等都是采用列表法来表示函数的例子．该方法的优点是可以免去很多复杂计算而直接获得函数值.

公式法是采用分析表达式把函数关系表示出来的方法，又称分析法．例如

$$f(x)=x^4+x^2+1 \quad S=\pi r^2 \quad y=x+\arcsin x$$

等等，都是用公式法表示的函数．该方法便于我们对函数的性质进行理论研究，是几种函数表示法中最主要的使用方法．

今后，我们经常将三种方法结合起来使用．

二、函数几种常见的特性

(一) 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I(I\subset D)$ 上有定义，若存在正数 M，使得对于一

切 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界的，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的有界函数．M 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个界，显然，有界函数的界不是唯一的．例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的，1 是它的一个界，而集合 $\{y \mid y\geqslant 1\}$ 中的每个元素都可作为它的界．

反之，若对于任意给定正数 M（无论它有多么大），总存在 $x\in I$，使得 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是无界的，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的无界函数．例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 内是无界的，而在区间 $(1, 2)$ 内是有界的．

（二）单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I(I\subset D)$ 上有定义，若对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)<f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是（严格）单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)\geqslant f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是（严格）单调减少的．（严格）单调增加和（严格）单调减少的函数统称为（严格）单调函数．

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是严格单调增加的，在区间 $(-\infty, 0]$ 上是严格单调减少的；立方抛物线 $y=x^3$ 在整个实数域上严格单调增加．

对于非严格单调函数将在介绍过分段函数后举例说明．

（三）奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I(I\subset D)$ 上有定义，若用 $-x$ 换 x（x 和 $-x$ 均属于 I），函数值不变，即 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的偶函数．若函数值的符号相反，即 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的奇函数．

例如抛物线 $y=x^2$、余弦函数 $y=\cos x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，而立方抛物线 $y=x^3$、正弦函数 $y=\sin x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数．

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称．

（四）周期性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I(I\subset D)$ 上有定义，若存在一个不为零的常数