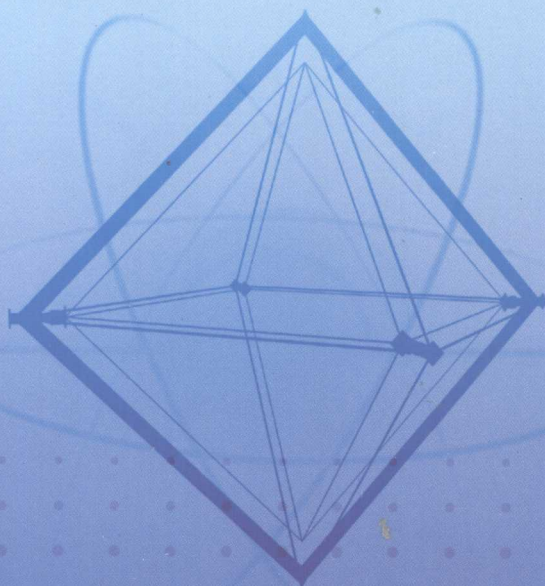


高等学校适用教材

高等数学基础

(经济管理类)

王敬修 主 编



中国计量出版社

CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

高等学校适用教材

高等数学基础

(经济管理类)

王敬修 主编

中国计量出版社

013
W143

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础/王敬修主编. —北京:中国计量出版社, 2008. 8

高等学校适用教材. 经济管理类

ISBN 978-7-5026-2832-1

I. 高… II. 王… III. 高等数学—高等学校—教材

IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 047171 号

(类 容 提 要)

本书是根据全国高等教育颁布的经济管理类高等数学教学大纲编写的。全书内容包括预备知识、函数、函数的极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学与积分学、级数、常微分方程。

本书针对学生基础知识不够牢固的特点进行系统讲授。阐释详细、说理透彻、思路清晰;辅以几何、物理、经济问题,进行启发引导,深入浅出、逐步深入并注意解题训练。书中例题较多,配有一定量习题及答案。

本书可作为工科类高校、技术职业学院、职工大学、函授大学、电视大学的教材或教学参考书。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话(010)64275360

<http://www.zgjl.com.cn>

北京市密东印刷有限公司印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

787 mm×1092 mm 16 开本 印张 14.5 字数 360 千字

2008 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月第 1 次印刷

*

印数 1—3 000 定价: 26.00 元

编委会名单

主编：王敬修

编委：牛玉玲 薛 威 张 欣

何 云 陈凡红

前言

为了提高教学质量,编写切合实际的教材是当务之急。我们根据教育部颁布的经济类教学大纲,编写了经济管理类的高等数学教材。本教材编写过程中,遵循“以应用为目的”“以必需够用为度”的原则,注重概念、重视应用。由于高等数学具有概念性强、比较抽象的特点,学生在学习过程中常常会遇到一些困难。本书添写了初等数学预备知识,起着与高等数学学习的桥梁衔接作用。有关微积分学的内容,作了慎重的选择,较系统地讲述了基本概念、理论、基本运算方法,高度重视在经济领域中的应用。

本书按照认识规律,以几何、物理、经济中典型问题作为引入数学基本概念的切入点,注意揭示概念的本质涵义及其内在之间的联系。对内容阐述详细、说理透彻,富有启发性、典型例题分析给学生获得解题充分训练的平台,在每节内容之后,有练习题,通过它进一步掌握理论。建议教学时数为140~160学时。

编者在编写过程中,参考部分著作和辅导材料,从这些书中作者得到有益的启发,并选用了其中的部分内容。在此仅向有关作者表示谢意。

本书编写过程,得到北京化工大学北方学院理工学院院长程源教授的热诚支持。在此书出版过程得到中国计量出版社热情帮助,趁此机会特致衷心的感谢。

编者深知,写好一本合适教材的艰难,但因成书时间比较仓促加之编者学术水平和教学经验有限,还需要多年的磨砺。因此请各位同仁和读者对书中的错误和缺点不吝赐教,以便今后再版加以修正。

编者

2008年2月于北京化工大学北方学院

目 录

第 0 章 预备知识	1
第一节 集合与集合运算	1
第二节 数理逻辑用语	4
第三节 充分条件与必要条件	6
第四节 实数、不等式	8
第五节 实数的绝对值及其不等式	10
第六节 代数式的恒等变形	12
第七节 指数与对数	13
第八节 三角公式	15
第九节 数 列	16
第十节 数学归纳法	17
第十一节 区间与邻域	18
第一章 函 数	20
第一节 函数的定义及其表示法	20
第二节 函数的几何特性	25
第三节 反函数	28
第四节 复合函数	29
第五节 初等函数	30
第六节 简单函数关系的建立	33
第二章 极限和连续	36
第一节 数列极限	36
第二节 数列极限的运算法则及存在准则	40
第三节 函数的极限	43
第四节 极限运算法则	47
第五节 两个重要极限	48
第六节 无穷小量和无穷大量	51
第七节 函数的连续性	54
第八节 连续函数的运算和初等函数的连续性	56
第九节 闭区间上连续函数性质	57
第十节 函数的间断点	58
第三章 一元函数的导数和微分	60
第一节 导数的概念	60
第二节 求导法则	66

第三节	几类特殊函数的求导法	71
第四节	高阶导数	75
第五节	微分	77
第六节	经济学中的常用函数	81
第七节	导数在经济学中的简单应用	83
第八节	函数的弹性	85
第四章	微分中值定理与导数的应用	89
第一节	微分中值定理	89
第二节	罗必达(L'Hospital)法则	93
第三节	函数单调性的判定	97
第四节	函数的极值及其求法	99
第五节	曲线的凹向与拐点、渐近线	101
第六节	函数的最大值和最小值及其应用	103
第五章	一元函数积分学	106
第一节	原函数和不定积分的概念	106
第二节	不定积分的性质	109
第三节	不定积分的换元法	111
第四节	分部积分法	115
第五节	定积分的概念及其几何意义	117
第六节	定积分的基本性质	120
第七节	微积分基本公式	123
第八节	定积分的换元法与分部积分法	127
第九节	无穷限反常积分	131
第十节	定积分的应用	132
第六章	向量代数与空间解析几何	138
第一节	向量概念	138
第二节	向量的线性运算	138
第三节	空间直角坐标系及两点间距离	139
第四节	向量的方向余弦与方向数	139
第五节	两向量的数量积及两向量的向量积	140
第六节	平面与空间直线	141
第七节	曲面与空间曲线	143
第七章	多元函数微分学	146
第一节	多元函数概念	146
第二节	二元函数极限及二元函数连续性	148
第三节	偏导数	150
第四节	全微分	153
第五节	多元复合函数的导数	155
第六节	隐函数的求导公式	156

第七节 方向导数和梯度	158
第八节 多元函数的极值及其求法	160
第九节 条件极值, 拉格朗日乘数法	163
第八章 二重积分	166
第一节 二重积分的概念	166
第二节 直角坐标系中二重积分的计算法	169
第三节 极坐标系中二重积分的计算法	172
第九章 无穷级数	176
第一节 常数项级数	176
第二节 数项级数的收敛性判别法	180
第三节 幂级数	187
第四节 幂级数的性质	190
第五节 函数的幂级数展开式	192
第十章 常微分方程	196
第一节 微分方程的基本概念	196
第二节 可分离变量的一阶方程	197
第三节 一阶齐次方程	198
第四节 一阶线性方程	199
第五节 可降阶的高阶微分方程	201
第六节 二阶常系数线性微分方程	203
附录	208
参考文献	210
习题参考答案	211

数学是科学的大门和钥匙

培根(R. BaCon)

培根(R. BaCon)

第0章 预备知识

学习高等数学,需要初等数学的知识.为此,本课程安排初等数学部分内容,其目的有两个,一是“复习”、二是“提高”,其内容有集合、数理逻辑用语、实数、不等式、绝对值、代数式变形、指数、对数、数列求和、三角公式、数学归纳法、区间和邻域.

上述编排的内容,可针对学生的实际情况自主选择,有的放矢地实施教学.

第一节 集合与集合运算

1. 集合

人们的认识与实践活动离不开集合的概念,尽管可能并没有明确意识到,实际上每个人都在和集合打交道.譬如,一个班级集体是一些学生的集合,太阳系是太阳和它的行星等的集合,如此等等.

我们认定集合由一些有确定对象汇集到一起,组成一个整体,或由具体的,满足某些共性条件的对象所组成的.而集合中的对象就是该集合中的元素.例如:

- (1) 某一班级中全体学生构成一个集合,其中每个学生都是这个集合的元素.
- (2) 自然数的全体构成一个集合,每个自然数都是这个集合的元素.
- (3) 所有代数式构成一个集合,其中任一个代数式都是这个集合的一个元素.
- (4) 平面上与两定点距离相等的点的全体构成一个集合,这个集合是连结两点的线段的垂直平分线,该垂直平分线上的每个点都是这个集合的元素.

一个集合,通常用英语大写字母 A 、 B 、 C 、……等表示,它的元素通常用英语小写字母 a 、 b 、 c ……等表示.

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$.如果 a 不是 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.

集合有时也简称为集.

我们约定用一些大写英语字母,表示常用到的一些数集.

非负整数全体构成的集合,叫做自然数集,记作 N ;

在自然数集内排除 0 的集合,记作 N_+ ;

整数全体构成的集合,叫做整数集,记作 Z ;

有理数全体构成的集合,叫做有理数集,记作 Q ;

实数全体构成的集合,叫做实数集,记作 R .

含有有限个元素的集合叫做有限集,含有无限个元素的集合叫做无限集.

2. 集合的表示方法

常用的集合表示法有列举法和性质描述法两种.

(1) 列举法

当集合元素不多时, 常常把集合的元素一一列举出来, 写在大括号内表示这个集合, 这种表示集合的方法叫做列举法.

例如: 中国古代的四大发明构成的集合, 可以表示为

{指南针、造纸、活字印刷、火药}

又如: 不大于 100 的自然数的全体构成的集合, 可表示为

$\{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$

用列举法表示集合时, 不必考虑元素的前后顺序. 例如, 集合 $\{1, 2\}$ 与 $\{2, 1\}$ 表示的是同一个集合.

(2) 性质描述法

对于给定 x 的取值集合 I , 如果属于集合 A 的任一元素 x 都具有性质 $p(x)$, 而不属于集合 A 的元素都不具有性质 $p(x)$, 则性质 $p(x)$ 叫做集合 A 的特征性质. 于是, 集合 A 可用它的特征性质 $p(x)$ 描述为 $\{x \in I | p(x)\}$, 它表示集合 A 是由集合 I 中具有性质 $p(x)$ 的所有元素构成的.

例如, 集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 = 0\}$ 的特征性质是

$$x^2 - 1 = 0$$

在实数范围内. 集合 A 的所有元素都满足方程 $x^2 - 1 = 0$, 满足 $x^2 - 1 = 0$ 的所有实数也都在集合 A 内.

又例, 用性质描述法表示下列集合:

{北京市}、 $\{x | x \text{ 是中华人民共和国首都}\}$ 、{大于 3 的全体实数构成集合}、 $\{x | x \text{ 能被 2 整除, 且大于 0}\}$

3. 集合之间的关系

(1) 子集

如果集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的子集, 记作

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

读作 A 包含于 B , 或 B 包含 A .

根据定义, 任何一个集合 A 都是它本身的子集, 即 $A \subset A$.

我们把不含任何元素的集合叫做空集, 记作 ϕ , 例如,

$$\{x | x + 1 = x + 2\} = \phi, \{x | x^2 < 0\} = \phi$$

(2) 集合相等

如果两个集合的元素完全相同, 那么, 我们就说这两个集合相等. 即集合 A 等于集合 B . 记作 $A = B$.

4. 集合的运算

“运算”这个词, 过去只用于数或式. 这里集合运算的意义是, 由两个已知集合, 按照某种指定的法则, 构造出一个新的集合.

(1) 交集

一般地, 对于两个给定的集合 A 、 B 由属于 A 又属于 B 的所有元素所构成的集合, 叫做 A 、 B 的交集, 记作

$$A \cap B \text{ 即 } A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

例 $\{\text{服装、文具、自行车、化妆品、皮鞋}\} \cap \{\text{化妆品、自行车、电子表、收录机}\} = \{\text{化妆品、自行车}\}.$

例 设 $A = \{\text{奇数}\}$ $B = \{\text{偶数}\}$ $Z = \{\text{整数}\}$

求 $A \cap Z$ $B \cap Z$ $A \cap B$

解 $A \cap Z = \{\text{奇数}\} \cap \{\text{整数}\} = \{\text{奇数}\} = A$

$B \cap Z = \{\text{偶数}\} \cap \{\text{整数}\} = \{\text{偶数}\} = B$

$A \cap B = \{\text{奇数}\} \cap \{\text{偶数}\} = \phi$

例 已知 $A = \{\text{等腰三角形}\}$, $B = \{\text{直角三角形}\}$ 求 $A \cap B$

解 $A \cap B = \{\text{等腰三角形}\} \cap \{\text{直角三角形}\} = \{\text{等腰直角三角形}\}$

(2) 并集 如果两个给定的集合 A 、 B , 把它们所有元素并在一起所构成的集合叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例 已知 $Q = \{x | x \text{ 是有理数}\}$, $Z = \{x | x \text{ 是整数}\}$. 求 $Q \cup Z$.

解 $Q \cup Z = \{x | x \text{ 是有理数}\} \cup \{x | x \text{ 是整数}\} = \{x | x \text{ 是有理数}\} = Q$

(3) 差集

设 A 、 B 二个集合, 由 A 中不属于 B 的元素组成的集合, 称 A 为 B 的差集, 记作 $A - B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$

例 $Z - N = \{0, -1, -2, \dots, -n, \dots\}$; 又例, $R - Q = \{\text{所有的无理数}\}$

(4) 集合运算法则

(i) 交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

(ii) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$



习题 0.1

1. 用列举法表示下列元素构成的集合:

(1) 大于 3 且小于 13 的偶数全体;

(2) 平方等于 1 的实数全体;

(3) 一年中有 31 天的月份全体;

(4) 方程 $x^2 = 4$ 的解集;

(5) 大于 0, 且小于 5 的整数的全体.

2. 用性质描述法表示下列集合.

(1) $\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\} n \in N_+$

(2) 方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 的解集;

(3) 大于 3 的全体实数构成的集合;

(4) 正方形全体构成的集合;

(5) 被 3 除余 2 的自然数全体构成的集合.

第二节 数理逻辑用语

命题与逻辑联结词:

(1) 命题与量词

能够判断真假的句子叫做命题. 例如, 句子:

(a) $3 > 2$ (真)

(b) $2 + 4 = 7$ (假)

(c) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形(真).

一个命题非真即假, 不可能既真又假, 不能判断真假的句子, 不是命题. 例如, 句子:

(a) 祝你健康! (b) 你会说英语吗? (c) 你快离开这里! (d) $x + 1 = 0$.

其中(a)是感叹句; (b)是疑问句; (c)是祈使句; (d)是一个含变量的等式, 因不知 x 代表什么数, 无法判别真假.

例(d)是含有变量的式子, 在数学中是最常见的, 常称为开句或条件命题. 在开句前, 加上量词, 往往就可使开句变为判断真假的命题.

例如, 存在一个数 x , 使 $x - 1 = 0$ 就是一个真命题.

对任意实数 x , 使 $x - 1 = 0$ 就是一个假命题.

“存在” $\exists$ 和“任意” $\forall$, 是两个常用的量词, 加到开句前面, 就可使开句变为可判断真假的命题.

(2) 命题联结词

一些命题可用联结词把它们联结起来, 构成一个新命题. 常用的联结词有“且”、“或”、“非”、“如果…那么…”等. 下面分别说明这几个联结词在数学中的意义.

(A) 且(合取联结词)

设命题:

p : 12 能被 3 整除; q : 12 能被 4 整除

用“且”联结, 可得新命题:

12 能被 3 整除, 且能被 4 整除

一般地, 设 p 、 q 是两个命题, 则“ p 与 q ”构成一个新命题, 记作

$p \wedge q$ 读作 p 且 q

根据表 1, 我们可由 p 、 q 的真假, 判定 p 且 q 的真假.

表 1

p	q	$p \wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

(B) 或(析取联结词): 具有二义性. 具有相容性, 又有排斥性.

设命题 $p: 5 > 3$; $q: 5 = 3$

用“或”联结, 可得新命题

$$5 > 3 \text{ 或 } 5 = 3$$

一般地, 设 p 、 q 是两个命题, 则“ p 或 q ”构成一个新命题, 记作

$$p \vee q$$

根据表 2, 我们可由 p 、 q 的真假, 判定 p 或 q 的真假.

表 2

p	q	$p \vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

例如: p : 明天刮风; q : 明天下雨.

用“或”联结, 则构成一个新命题:

明天刮风或明天下雨.

根据 $p \vee q$ 的真值表, 这个新命题, 当“明天刮风不下雨”, “明天下雨不刮风”, “明天刮风又下雨”三种情况中, 只要有一种情况出现时, 都是真命题. 只有当明天既不刮风, 又不下雨时, 才是假命题.

(C) 非(或否定)

设命题 p : 等腰三角形两个底角相等.

它的否定常叙述为: 等腰三角形的两个底角不相等.

一般地, 设 p 是一个命题, 则命题 p 的非(或否定)构成一个新命题, 记作 $\neg p$

根据表 3, 我们可由 p 的真假判定 $\neg p$ 的真假.

表 3

p	$\neg p$
真	假
假	真

例 已知对 $\forall$ 实数 x , 都有 $x^2 - 2x + 1 \geq 0$. 那么命题的非, 并判断真假.

解 $\neg p$: $\exists$ 一个实数, 使得 $x^2 - 2x + 1 < 0$. 因为 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$, 对任意实数都成立. 所以不 $\exists$ 一个实数 x , 使 $\neg p$ 成立, 即 $\neg p$ 假.

(D) “如果..., 则(那么)…”

设 p 、 q 是两个命题, 用“如果..., 则(那么)…”联结这两个命题, 可得一个新的命题:

如果 p , 则 q , 记作 $p \Rightarrow q$

其中 p 称为命题 $p \Rightarrow q$ 的条件, q 称为命题 $p \Rightarrow q$ 的结论.

我们可根据表 4, 由 p 、 q 的真假值, 来判断 $p \Rightarrow q$ 的真假值.

表 4

p	q	$p \Rightarrow q$
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

表 4 中第一行的规定, 与我们在平面几何中, 证明一个命题是正确的完全一致的. 在第二行, 如果条件是真, 结论是假. 因为真的不可能蕴含假的. 所以把真的蕴含假的规定为假命题应该是合理的. 在一般的推理过程中. 如果前提是假的, 后果是真是假也就不是那么重要了. 所以我们不妨把假的蕴含真的或假的蕴含假都规定为真命题. 后两行的规定, 是在数理逻辑学中为了便于命题演算, 而作为一种约定. 例如, 在生活和科学语言中, 假的蕴含假的还是经常使用的. 例如, “如果地球没有引力, 则悬空的苹果就不会落地.” 应该是正确的命题.

除此, 常用词语有: 只要…就…; 除非…否则…; 因为…所以…; p 仅当 q ; 只有…才…; 除非…才….



习题 0.2

1. 判断下列句子是不是命题.

- (1) 地球自西向东转;
- (2) 月亮会发光;
- (3) $x^2=1$;
- (4) 方程 $3x^2+1=0$ 无实数解;
- (5) $\exists$ 一个实数 x , 使 $x^2-4=0$;
- (6) 对 $\forall$ 实数 (x, y) 都有 $y=x^2$.

2. 已知命题.

p : 陈平是三好学生; q : 陈平是共青团员.

用语言表示命题: (1) $p \wedge q$; (2) $p \vee q$.

3. 写出下列命题的非.

- (1) 存在一个三角形是直角三角形;
- (2) 所有的分数都是有理数;
- (3) 不是每一个人都会开车.

4. 已知下列各对命题, 写出用“如果…, 那么…”联结所得的新命题, 并判断它们的真假.

- (1) 猫喜欢捉老鼠, 鱼喜欢在陆地上走;
- (2) 盐是咸的, 海水是甜的;
- (3) 北京是海滨城市, 北京是中国的首都.

第三节 充分条件与必要条件

当“如果 p , 则 q ”是真命题时, 那么我们就说, 由 p 可推出 q , 这时 $p \Rightarrow q$ (真) 可读作 p 推出 q .

如果由 p 可推出 q . 我们又说, p 是 q 的充分条件或 q 是 p 的必要条件. 这就是说

$$p \Rightarrow q \text{ (真);}$$

p 是 q 的充分条件; q 是 p 的必要条件;

三句话表达的都是同一逻辑关系, 只是说法不同而已, 下面我们举例说明.

(1) $x=y \Rightarrow x^2=y^2$ (真); $x=y$ 是 $x^2=y^2$ 的充分条件; $x^2=y^2$ 是 $x=y$ 的必要条件.

(2) $A=\phi \Rightarrow A \cap B=\phi$ (真); $A=\phi$ 是 $A \cap B=\phi$ 的充分条件; $A \cap B=\phi$ 是 $A=\phi$ 的必要条件.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC \Rightarrow \angle B=\angle C$ (真);

在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$ 是 $\angle B=\angle C$ 的充分条件;

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=\angle C$ 是 $AB=AC$ 的必要条件.

一般地, 如果

$$p \Rightarrow q \text{ (真)}$$

且 $q \Rightarrow p$ (真)

那么我们就说, p 是 q 的充分且必要条件, 简称充要条件, 记作

$$p \Leftrightarrow q$$

显然, 如果 p 是 q 的充要条件, 那么 q 也是 p 的充要条件.

p 是 q 的充要条件, 又常说成 q 当且仅当 p , 或 p 与 q 等价.

当且仅当的含义: “当”的意思即是条件的充分性. 就是说当这个条件满足时, 结论必成立; “仅当”的意思是条件的必要性. 即如果条件不满足, 结论不成立. 换言之, 结论“仅仅”在这个条件下成立.

例 1 “马 $\Rightarrow$ 四条腿”, “四条腿”是马的必要条件, 有了“四条腿”不一定是马, 也许是牛、兔子、狗、猫等. 但是“两条腿”的动物一定不是马. 由此可知, 充分条件具备的特点, “有了足够, 换有可能”, 必要条件的特点, 是“有了不够, 少了不行”.

例 2 如果二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$, 则这个二次方程有相等的实数根; 反之, 如果二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有相等的实数根. 则 $\Delta=0$. 由于这两个命题都是真命题, 所以这两个命题合起来可用充要条件表述为:

$\Delta=0$ 是二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等实数根的充分必要条件.

例 3 已知 p 是 q 的充分条件, s 是 r 的必要条件, p 是 s 的充要条件.

求: q 与 r 关系.

解 根据已知可得.

$$p \Rightarrow q \text{ (真)} \quad r \Rightarrow s \text{ (真)} \quad p \Leftrightarrow s \text{ (真)}$$

所以 $r \Rightarrow s \Rightarrow p \Rightarrow q$, 所以 $r \Rightarrow q$ (真)

即 r 是 q 充分条件, q 是 r 的必要条件.



习题 0.3

1. 用充分条件、必要条件或充要条件填空:

(1) x 是自然数是 x 是整数的_____;

(2) x 是有理数是 x 是实数的_____;

(3) x 是实数是 x 是有理数的_____;

(4) $a=0$ 是 $ab=0$ 的_____;

(5) $ab=0$ 是 $a=0$ 的_____.

2. 已知 p 是 q 的充分条件, r 是 q 的必要条件, s 是 r 的充要条件.

问: (1) s 是 p 的什么条件? (2) q 是 s 的什么条件?

第四节 实数、不等式

1. 实数与数轴

(1) 实数：是有理数和无理数的统称。

整数与分数统称有理数，因为整数可看作分母为1的分数，所以有理数就是分数。例如 p/q (p, q 是整数，且 $q \neq 0$) 的数叫有理数。

如果是无限不循环小数，叫无理数。例如 $\sqrt{2}$ 、 π 、 e ... 等无理数，它是不能用 p/q 的形式表示的。

(2) 数轴：规定了原点，正方向和单位长度的直线叫数轴。如图 0—1 所示。

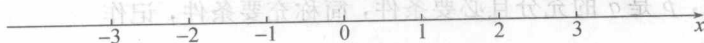


图 0—1

有了数轴之后，任何一个实数均可用数轴上的一个点表示。反之数轴上任何一点都表示一个实数。这样就建立一一对应关系。

2. 实数的性质

(1) 在实数范围内，既没有最小的数，也没有最大的数；

(2) 实数运算具有封闭性。对实数作四则运算，其结果仍然是实数；

(3) 连续性：由有理数集合 Q 和无理数集合 W 构成实数集合 $R (R=Q \cup W)$ ，才具有连续性。

3. 不等式

数轴上的任意两点中，右边的点对应的实数比左边的点对应的实数大，于是对任意两个实数 a, b ，它们具有如下的基本性质 (如图 0—2)。

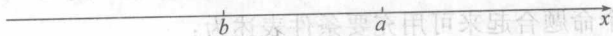


图 0—2

(1) $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$; $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$; $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$ 。

(2) 不等式的性质

性质 1 不等式的传递性

如果 $a > b$, $b > c$ 则 $a > c$

性质 2 不等式的两边同时加上 (减去) 同一实数，不等号的方向不变。

如果 $a > b$ 则 $a + c > b + c$

性质 3 如果不等式两边乘以同一正数，则不等式方向不变。反之乘以同一负数，则不等号方向改变。

如果 $a > b$, $c > 0$ 则 $ac > bc$ 。

如果 $a > b$, $c < 0$ 则 $ac < bc$ 。

(3) 算术平均值与几何平均值的性质

对于任意两个正实数 a, b ， $\frac{a+b}{2}$ 叫做 a, b 的算术平均值；

对任意两个正实数 a, b ， $\sqrt{ab}$ 叫做 a, b 的几何平均值。

定理 两个正实数的算术平均值大于或等于它的几何平均值。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a>0, b>0)$$

对任意 $n(n \geq 2)$ 个正数, 它的算术平均值大于或等于它的几何平均值, 即

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

4. 一元一次不等式的解法

解不等式实际上就是利用数与式的运算法则, 以及不等式的性质, 对所给的不等式进行变形, 并要求变形后的不等式与变形前的不等式的解集相等, 直到能表明未知数的取值范围为止.

例 1 解不等式 $2(x+1) + \frac{x-2}{3} > \frac{7x}{2} - 1$

解 $12(x+1) + 2(x-2) > 21x - 6$

$$14x + 8 > 21x - 6$$

$$7x < 14 \quad x < 2 \quad \text{解集 } \{x | x < 2\}$$

5. 一元一次不等式组的求解

首先解出每一个不等式的解集, 它的解集中的元素, 都要满足每个不等式. 因此, 求解不等式组的解集, 实际上就是求每一个不等式的解集的交集.

例 2 解不等式组

$$\begin{cases} 10+2x \leq 11+3x & (1) \\ 7+2x > 6+3x & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10+2x \leq 11+3x & (1) \\ 7+2x > 6+3x & (2) \end{cases}$$

解 由(1)式、(2)式中分别解出解集为 $\{x | x \geq -1\}$, $\{x | x < 1\}$

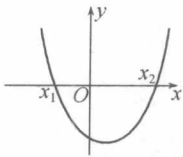
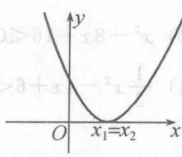
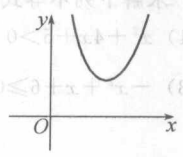
得原不等式组的解集

$$\{x | x \geq -1\} \cap \{x | x < 1\} = [-1, 1)$$

6. 一元二次不等式的解法

一般形式: $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a \neq 0$)

一元二次不等式的主要结论:

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ $a > 0$ 的图像			
方程的根	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
$y > 0 (a > 0)$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	除 $x = -\frac{b}{2a}$ 的实数	全体实数
$y < 0 (a > 0)$	$x_1 < x < x_2$	空集 ϕ	空集 ϕ

用区间分析法, 解一元二次不等式: 将它转化为一次不等式组求解. 实际上, 把数轴上直