研究生系列教材

MATRIX ANALYSIS WITH APPLICATIONS

矩阵分析及应用

周杰 编著

四川大学出版社

四川大学研究生教材建设专项基金资助

MATRIX ANALYSIS WITH APPLICATIONS

矩阵分析及应用

周杰 编著

四川大学出版社

责任编辑:韩　果
责任校对:成　杰
封面设计:米茄设计工作室
责任印制:李　平

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析及应用／周杰编著. —成都：四川大学出版社，2008.1
ISBN 978－7－5614－3959－3
Ⅰ. 矩…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 矩阵分析　Ⅳ. O151.21
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 015557 号

书名　矩阵分析及应用

编　　著　周　杰
出　　版　四川大学出版社
地　　址　成都市一环路南一段 24 号（610065）
发　　行　四川大学出版社
书　　号　ISBN 978－7－5614－3959－3/O·125
印　　刷　成都市书林印刷厂
成品尺寸　170 mm×230 mm
印　　张　17.5
字　　数　311 千字
版　　次　2008 年 2 月第 1 版
印　　次　2008 年 2 月第 1 次印刷
印　　数　0 001～1 000 册
定　　价　28.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

序

“年年岁岁花相似，年年岁岁人不同”。在世纪之交，经过高教体制改革，又一次强强合并后的新四川大学已成为我国西部地区规模最大、学科门类最齐全的新型综合性研究型大学。校训“海纳百川，有容乃大。严谨勤奋，求是创新。”已成为川大人求学治学的座右铭。

作为新世纪的献礼，我校研究生教材建设基金资助的又一批研究生优秀教材相继正式出版了，我在此表示热烈地祝贺。

众所周知，21 世纪是知识经济的世纪，国际竞争空前激烈。竞争的焦点是科学技术，竞争的核心是创新型人才，竞争的关键是国民教育。对于四川大学这样的国家重点大学而言，必须注意大力发展研究生教育，扩大规模，注重质量，强调创新。

校长、教师、教材是办学的三大要素，而教材是科学改革与师生智慧的重要结晶。正是基于这种思考，我校建设以学科建设为龙头，作为一项重要的措施就是加强研究生的教材建设。我们通过各种渠道，筹集了专项基金，用以资助研究生优秀教材的编写和出版。我们在 1999 年首次资助的是有博士学位授权点的学科专业中涉及面大、使用面宽的研究生学位平台课程的优秀教材。而今，我们扩大了教材基金资助的范围，无论文、理、工、管、医，只要是经过专家评审后认定的优秀教材，都可被列为资助对象。特别是社会需求量大的应用学科、新兴学科、交叉学科及保护学科的优秀教材，更是优先资助出版。

我们推出的研究生教材的基本特点是：符合该学科教学大纲的基本要求，有较强的理论性和系统性。这些教材既反映了该学科发展的新知识、新动向、新成就，也反映了我校教师在该门学科教学与科研中的新成果与新经验。

前人说得好，古今之成大事业、大学问者，都必须经过三种境界：“昨夜西风凋碧树。独上高楼，望尽天涯路。”此第一境界也。“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴。”此第二境界也。“众里寻他千百度。蓦然回首，那人却在，灯火阑珊处。”此第三境界也。研究生优秀教材的建设应该算作一种“大事业”。优秀教材的作者们对于研究生教育改革的执着追求，令人钦佩；他们的无私奉献精神，值得赞扬；他们所取得的教学科研成果应该积极推广，使其产生应有的社会效益，为百年名校增添光彩。我殷切希望在陆续出版的研究生教材中能出现“传诸后世”的佳作，更希望我校有更多教授、名家动手撰写研究生教材，分门别类，出版系列的研究生教材丛书，为建设国内一流、国际知名的新四川大学做出更大的贡献。

中国科学院院士
四川大学副校长　　　　刘应明　教授
四川大学研究生院院长

前言

矩阵作为科学研究中的一项重要工具,在数学、自然科学、工程技术以及经济管理等领域发挥着重要作用,矩阵理论的许多创造性成果极大地推动和丰富了众多学科的发展. 本书致力于帮助读者学会使用矩阵这一数学工具,能够灵活运用矩阵分析的相关理论和方法解决科学和工程技术领域中的各类实际应用问题.

全书共分七章. 第 1 章是矩阵分析的基础,包括矩阵的数值特征,几种重要变换下的标准形,半正定矩阵和正定矩阵的性质,以及 Hadamard 积和 Kronecker 积,特别介绍了矩阵求逆的几个重要公式. 第 2 章介绍向量和矩阵范数,其中包括了一些常用的范数. 第 3 章讨论矩阵序列和矩阵级数的收敛性,矩阵函数及其计算,以及矩阵微积分及其性质. 第 4 章介绍矩阵分析中非常重要的矩阵分解,包括单个矩阵的常用分解以及两个矩阵的同时对角化问题. 第 5 章为特征值分析,包括特征值的连续性,特征值所在区域的估计以及 Hermite 矩阵特征值的极性等,给出了与特征值和奇异值相关的一些重要不等式. 第 6 章详细介绍了广义逆矩阵及其主要性质,特别给出了广义逆的一些重要算法,包括有限迭代算法,更新矩阵以及几种常见分块矩阵广义逆的表达式. 第 7 章讨论与矩阵迹和特征值相关的几个重要不等式,着重分析了常用的 Löwner 偏序下矩阵逆或广义逆相关不等式成立的充要条件,并给出几个经典不等式在矩阵情形下的推广形式.

矩阵分析的内容非常丰富,不可能在一本书中面面俱到. 本书的选材包括了矩阵分析基本理论和方法,也注意了一些新理论和新方法,并且特别强调了矩阵分析在科学技术领域中的应用. 除第 1 章外,每章最后一节专门介绍相关理论和方法的应用问题,涉及到数值计算、数理统计、最优化、信号与信息处理、自动控制、图像处理、模式识别等多个应用领域,其中包括了作者及合作者近年来从事信息处理与信息融合领域相关科学研究获得的一些最新研究成果. 因此,本书可供数学、统计、管理、计算机、电子电气、通信以及自动控制等专业的研究生和高年级本科生作为教材或参考书,对在相关领域工作的科研和工程技术人员,本书也会有参考价值.

作者在叙述中尽可能做到简洁、清楚和严谨,主要定理均给出了详细证明,有一些提供了参考文献. 各章均提供了若干习题供读者选做,其中一些习题所涉及的内容是正文的补充. 为使用方便,符号表中列出了全书所用记号.

特别地, 矩阵和向量分别用大写和小写黑体英文或希腊字母表示.

本书获得四川大学研究生教材建设专项基金资助, 另外, 作者及合作者在近年来应用矩阵理论于信息处理与融合领域获得的研究成果得到了多项国家自然科学基金资助. 作者在此感谢四川大学研究生院和国家自然科学基金委, 并且感谢四川大学出版社编辑韩果老师为本书的出版所给予的热情支持和大力帮助. 最后, 作者还要对朱允民教授多年来的指导、关心和帮助表示真诚的谢意.

本书不当之处, 欢迎专家和读者指正.

周 杰

2007 年 2 月于四川大学数学学院

符号表

$\mathbb{C}^{m\times n}$ $(\mathbb{R}^{m\times n})$	所有复 (实) $m\times n$ 阶矩阵全体
$\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$	所有复 (实) n 维向量的全体
$\mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$	所有复 (实) 数的全体
$\dim V$	空间 V 的维数
$\mathrm{Re}(z)$	复数 z 的实部
$\mathrm{Im}(z)$	复数 z 的虚部
$\overline{z}$	复数 z 的共轭
$\|z\|$	复数 z 的模
$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$	向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积
$\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$	向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 生成的空间
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$(\boldsymbol{A})_{ij}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素
A_{ij}	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素的代数余子式
$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_p \\ j_1,\cdots,j_q \end{pmatrix}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,\cdots,i_p$ 行第 $j_1,\cdots,j_q$ 列元素构成的 $p\times q$ 阶子矩阵
$\boldsymbol{A}(i_1,\cdots,i_p)$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,\cdots,i_p$ 行第 $i_1,\cdots,i_p$ 列元素构成的 $p\times p$ 阶子矩阵
$\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$	由纯量 $a_1,\cdots,a_n$ 构成的 n 阶对角矩阵
$\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n)$	由矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 构成的分块对角矩阵
$\boldsymbol{A}^{1/2}$	Hermite (半) 正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (半) 正定平方根
$\boldsymbol{A}^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆
$\boldsymbol{A}^{\dagger}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆
$\boldsymbol{A}^{-}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆
$\boldsymbol{A}^{(i,j,k)}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{i,j,k\}$-逆
$\boldsymbol{A}\{i,j,k\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{i,j,k\}$-逆全体
$\mathrm{adj}\,\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\det\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\mathrm{cond}\,\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数

$\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域
$\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间
$\lambda(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
$\sigma(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值
$\rho(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\mathrm{In}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的惯性
$\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的向量化
$\|\boldsymbol{x}\|$ $(\|\boldsymbol{A}\|)$	向量 $\boldsymbol{x}$ (矩阵 $\boldsymbol{A}$) 的任意范数
$\|\boldsymbol{x}\|_2$ $(\|\boldsymbol{A}\|_2)$	向量 $\boldsymbol{x}$ (矩阵 $\boldsymbol{A}$) 的 Euclid 范数
$\|\boldsymbol{x}\|_p$ $(\|\boldsymbol{A}\|_p)$	向量 $\boldsymbol{x}$ (矩阵 $\boldsymbol{A}$) 的 p 范数
$\|\boldsymbol{A}\|_F$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
$\boldsymbol{I}_n$	n 阶单位矩阵
$\mathbf{0}$ $(\mathbf{O})$	零向量 (零矩阵)
$S^{\perp}$	子空间 S 的正交补子空间
$P_{L,M}$	沿着子空间 M 到子空间 L 上的投影算子
P_L	到子空间 L 上的正交投影算子
$\boldsymbol{P_A}$	子空间 $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影矩阵
$\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为 Hermite 半正定矩阵
$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为 Hermite 正定矩阵
$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 积
$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积
$\hat{\boldsymbol{x}}$	随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的估计
$E\boldsymbol{x}$	随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的期望
$\mathrm{Var}(\boldsymbol{x})$	随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的方差阵
$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	随机向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的协方差矩阵

目 录

第 1 章　矩阵基础知识

本章介绍线性空间及几个重要的线性子空间, 线性映射及其矩阵表示, 矩阵的数值特征 (包括矩阵的秩、行列式、迹和特征值), 一些重要变换下的标准形, 半正定矩阵和正定矩阵, 以及矩阵求逆的有限迭代算法、分块算法和更新矩阵的 Sherman-Morrison-Woodbury 公式, 最后介绍 Hadamard 积和 Kronecker 积. 这些均是矩阵分析的基本知识, 也是以后各章的基础.

1.1　线性空间与线性映射

线性空间和线性映射是矩阵分析中两个极为重要的概念. 线性空间是赋予了一定运算的一个抽象集合, 而线性映射或线性变换反映了线性空间之间最基本的线性关系, 为线性代数的研究提供了极大的方便.

1.1.1　线性空间与线性子空间

定义 1.1.1　设 V 为一个非空集合, 其上定义了加法运算以及数域 F 中的数对 V 中元素的数乘运算. 称 V 是数域 F 上的线性空间或向量空间, 如果加法和数乘运算封闭且满足以下规律:

(1) 加法公理:

(i) (交换律) 若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, 则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

(ii) (结合律) 若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, 则 $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$;

(iii) (零向量的存在律) V 中存在一个零向量 $\mathbf{0}$, 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in V$, 有 $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$;

(iv) (负向量的存在律) 对任意 $\boldsymbol{x} \in V$, 存在向量 $\boldsymbol{y} \in V$, 使得 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$. 称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的负向量, 并记为 $-\boldsymbol{x}$.

(2) 数乘公理:

(i) (单位律) 对任意 $\boldsymbol{x} \in V$, 有 $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;

(ii) (结合律) 若 $a, b \in F$ 且 $\boldsymbol{x} \in V$, 则 $a(b\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x}$;

(iii) (数因子分配律) 若 $a \in F$ 且 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, 则 $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$;

(iv) (分配律) 若 $a, b \in F$ 且 $\boldsymbol{x} \in V$, 则 $(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$.

线性空间 V 上的加法和数乘运算称为 V 上的线性运算. 容易证明, 线性空间 V 有唯一的零向量, 且任一向量有唯一的负向量.

例 1.1.1 复数域 $\mathbb{C}$ 和实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $m\times n$ 阶矩阵全体分别记为 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 和 $\mathbb{R}^{m\times n}$. 容易证明: 按通常矩阵的加法、纯量与矩阵的乘法定义的运算满足定义 1.1.1 中的条件, 因而 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 和 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 均为线性空间.

线性空间 V 中线性无关向量组所含向量的最大个数称为 V 的维数, 记为 $\dim V$. 常用 V^n 表示 n 维线性空间.

例 1.1.2 对于所有实系数多项式的集合, 在通常的多项式加法及数乘多项式的运算下构成实线性空间 P. 因为对于任意正整数 n, 总有 n 个线性无关的向量 $1,t,t^2,\cdots,t^{n-1}$, 所以 P 为无穷维线性空间.

无穷维线性空间与有限维线性空间具有很大的差别. 除非特别强调, 本书所讨论的线性空间均为有限维线性空间.

对任意 $i=1,\cdots,n$, 令 $\boldsymbol{e}_i\in\mathbb{C}^n$ 为第 i 个元素为 1, 其余元素为 0 的向量. 显然 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关, 于是在复数域 $\mathbb{C}$ 上, 线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的维数 $\dim\mathbb{C}^n=n$.

对任意 $i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,n$, 令 $\boldsymbol{E}_{ij}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 为第 i 行第 j 列元素为 1, 其余元素为 0 的 $m\times n$ 阶矩阵. 显然 $\boldsymbol{E}_{11},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n},\cdots,\boldsymbol{E}_{m1},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}$ 作为 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 中元素线性无关, 于是在复数域 $\mathbb{C}$ 上, 线性空间 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 的维数 $\dim\mathbb{C}^{m\times n}=m\times n$.

定义 1.1.2 设 V 为线性空间, $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\in V$ $(r\geq 1)$. 称 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r$ 为 V 的一组基, 如果 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r$ 线性无关, 且 V 中任意向量均可表为 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r$ 的线性组合.

显然, $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 而 $\boldsymbol{E}_{11},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n},\cdots,\boldsymbol{E}_{m1},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}$ 为 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 的一组基.

线性空间 V^n 的一组基 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 也称为 V^n 的一个坐标系. 对任意向量 $\boldsymbol{x}\in V^n$, 若 $\boldsymbol{x}$ 在该基下的线性表示为

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n,$$

则称 $x_1,\cdots,x_n$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 在该坐标系中的坐标或分量, 并将向量 $\boldsymbol{x}$ 记为 $\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$.

在线性空间 V^n 中, 任意 n 个线性无关向量均可作为 V^n 的一组基 (或坐标系). 对不同的坐标系, 同一个向量的坐标一般是不相同的. 因此, 需要考虑一个向量在不同坐标系下的坐标变换.

设 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 和 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 分别为 V^n 的基. 由基的定义可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 &= a_{11}\boldsymbol{u}_1+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{u}_n,\\ &\vdots\\ \boldsymbol{v}_n &= a_{1n}\boldsymbol{u}_1+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{u}_n.\end{aligned}$$

称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

为由基 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 改变为基 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 的过渡矩阵, 并称

$$[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n]=[\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n]\boldsymbol{A} \tag{1.1.1}$$

为基变换公式. 容易看到过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.

对任意 $\boldsymbol{x}\in V^n$, 设 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 和基 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 下的坐标分别为 $[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $[y_1,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$, 则称

$$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

为基变换 (1.1.1) 下向量坐标的变换公式.

定义 1.1.3 设 V_1 为数域 F 上线性空间 V 的一个非空子集. 称 V_1 为 V 的线性子空间 (简称子空间), 如果 V_1 关于 V 上已有的加法运算和数乘运算封闭.

设 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 为数域 F 上线性空间 V 中一组向量, 容易验证

$$V_1=\{a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n : a_i\in F,\ i=1,\cdots,n\}$$

为 V 的子空间, 称为向量组 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 生成的子空间, 记为 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$.

容易证明有关子空间的以下两个重要结论:

命题 1.1.1 设 V_1 为 n 维线性空间 V 的 m 维子空间. 若 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 为 V_1 的一组基, 则这组基可以扩充为 V 的基, 即存在向量 $\boldsymbol{x}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n\in V$, 使得 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 为 V 的一组基.

命题 1.1.2 若 V_1 和 V_2 为线性空间 V 的两个子空间, 则

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}:\boldsymbol{x}\in V_1,\ \boldsymbol{y}\in V_2\}$$

为 V 中包含 V_1 和 V_2 的最小线性子空间, 且

$$V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{x}\in V:\boldsymbol{x}\in V_1 \text{ 且 } \boldsymbol{x}\in V_2\}$$

为 V 中包含于 V_1 和 V_2 的最大线性子空间.

对于线性空间 V 的两个子空间 V_1 和 V_2, 以下称子空间 V_1+V_2 为 V_1 与 V_2 的和空间, 并称子空间 $V_1\cap V_2$ 为 V_1 与 V_2 的交空间.

命题 1.1.3 设 V_1 和 V_2 为线性空间 V 的两个子空间, 则有

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

证明 设 $n_i=\dim V_i\ (i=1,2)$, 且 $m=\dim(V_1\cap V_2)$. 设 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 为交空间 $V_1\cap V_2$ 的一组基, 则存在向量组 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{n_1-m}$ 和 $\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_{n_2-m}$, 使得向量组 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{n_1-m}$ 和 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_{n_2-m}$ 分别为 V_1 和 V_2 的一组基. 于是, 向量组

$$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{n_1-m},\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_{n_2-m}$$

构成和空间 V_1+V_2 的一组基, 从而结论成立. □

定义 1.1.4 设 V_1 和 V_2 为线性空间 V 的两个子空间.

(1) 称子空间 V_1+V_2 为 V_1 与 V_2 的直和, 如果 V_1+V_2 中任意向量只能唯一地表示为 V_1 中的一个向量与 V_2 中的一个向量之和, 记为 $V_1\oplus V_2$;

(2) 称 V_1 和 V_2 为 V 的互补子空间, 如果 $V=V_1\oplus V_2$.

由定义可直接证明如下结论:

命题 1.1.4 设 V_1 和 V_2 为线性空间 V 的两个子空间, 则 V_1+V_2 为直和的充要条件是 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$.

由命题 1.1.3 及 1.1.4 立即可得:

推论 1.1.1 设 V_1 和 V_2 为线性空间 V 的两个子空间, 则 V_1+V_2 为直和的充要条件是

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$$

推论 1.1.2 设 V_1 和 V_2 为线性空间 V 的两个子空间, 且 V_1+V_2 为直和. 若 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 和 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 分别为 V_1 和 V_2 的基, 则 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 为 $V_1\oplus V_2$ 的基.

1.1.2 Euclid 空间、酉空间

定义 1.1.5 设 V 为数域 F ($\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$) 上的线性空间. 称函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \to F$ 为 V 上的内积, 如果满足

(i) (非负性) 对任意 $\boldsymbol{x}\in V$, 有 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle \geq 0$;

(i′) (正定性) 若 $\boldsymbol{x}\in V$, 则 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$;

(ii) (可加性) 若 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}\in V$, 则 $\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$;

(iii) (齐次性) 若 $\boldsymbol{x}\in V$ 和 $a\in F$, 则 $\langle a\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = a\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$;

(iv) (Hermite 性) 若 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}\in V$, 则 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle}$.

内积具有如下称为 Cauchy-Schwarz 不等式的重要性质.

引理 1.1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 V 为数域 F ($\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$) 上的线性空间. 若 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 V 上的内积, 则对任意 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in V$, 有

$$|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|^2 \leq \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle, \tag{1.1.2}$$

且等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 线性相关.

证明 若 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, 则由 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{0}\rangle = 0$ 对任意 $\boldsymbol{x}\in V$ 均成立可知不等式 (1.1.2) 成立. 以下假设 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$. 对 $t\in\mathbb{R}$, 令 $p(t)=\langle \boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}\rangle$, 则

$$p(t) = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle)\,t + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle\,t^2$$

为实系数二次多项式. 由于 $p(t)\geq 0$ 对任意实数 t 均成立, 因此

$$\big(\mathrm{Re}(\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle)\big)^2 \leq \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle. \tag{1.1.3}$$

用 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\boldsymbol{y}$ 代替不等式 (1.1.3) 中的 $\boldsymbol{y}$ 得到

$$\big(\mathrm{Re}(\langle \boldsymbol{x},\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\boldsymbol{y}\rangle)\big)^2 \leq |\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|^2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle.$$

注意到 $\mathrm{Re}(\langle \boldsymbol{x},\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\boldsymbol{y}\rangle) = \mathrm{Re}\left(\overline{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\right) = |\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|^2$, 因此

$$|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|^4 \leq \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|^2.$$

从而不等式 (1.1.2) 成立.

由内积的正定性, 当且仅当 $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ (即 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 线性相关) 时 $p(t)$ 才有两个相同的实根, 此时, 不等式 (1.1.3) 中等号成立, 从而不等式 (1.1.2) 中等号成立. □

赋予了内积的复和实线性空间分别称为酉空间和 Euclid 空间. 对 Euclid 空间, 内积定义中的 Hermite 性质成为交换律: $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$.